

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

*Кафедра общей, теоретической и компьютерной физики*

**Разработка анимационного сопровождения  
дисциплины «Теоретическая механика»**

АВТОРЕФЕРАТ  
БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ  
студента 4 курса 4022 группы  
направления 03.03.02 «Физика» института физики  
Карагодова Никиты Алексеевича

Научный руководитель  
д.ф.-м.н. профессор

\_\_\_\_\_

В.Л. Дербов

(подпись, дата)

Заведующий кафедрой  
д.ф.-м.н. профессор

\_\_\_\_\_

В.М. Аникин

(подпись, дата)

Саратов 2022

## Общая характеристика работы

Теоретическая механика - обязательная дисциплина в учебных планах подготовки бакалавров направления «Физика». Помимо того, что данная дисциплина имеет важнейшее прикладное значение, она является и основой всего цикла теоретической физики. Теоретическую физику отличает дедуктивный подход и математическая строгость. К сожалению, обратной стороной этих достоинств является недостаток наглядности, особенно заметный при чтении классических учебников, где иллюстрации результатов занимают совсем незначительный объем по сравнению с описанием их математического вывода.

Наиболее сложным разделом теоретической механики является механика движения твердого тела. Принципиальная трехмерность задач этого раздела, необходимость задавать тензор инерции в системе собственных осей тела, которая не является инерциальной, сложность введения обобщенных координат вращательного движения, тот факт, что кажущаяся простой угловая скорость не является полной производной от какой-либо векторной величины, которая могла бы считаться вращательной координатой - таков далеко не полный список вопросов, вызывающих определенные трудности у студентов, изучающих этот раздел впервые. Многие из этих трудностей усугубляются при углубленном освоении данной дисциплины в магистратуре.

Как в классических учебниках по теоретической механике [1], так и в более поздних книгах [2], с учетом техники того времени, максимум наглядности представлен графиками для частных случаев динамического поведения, которые приводятся далеко не для всего материала, зачастую сложны для восприятия и малоинформативны. В итоге, все, что связано с визуализацией ложится на плечи преподавателя, который либо пытается показать что-то на доске, используя все те же графики и схемы, либо демонстрирует готовые иллюстрации из книг и Интернета в компьютерной презентации. Возникает острая потребность в обеспечении курса теоретической механики анимированными демонстрациями, а современные средства вычислительной техники и программного обеспечения делают удовлетворение этой потребности вполне возможным.

**Цель ВКР** – создание анимаций свободного вращения тела для дисциплины «теоретическая механика» на игровом движке Unity.

**Объектом исследования ВКР** будет сам игровой движок Unity.

Наиболее близким к нашим целям и задачам является разработанный проф. Е.И. Бутиковым учебно-методический материал «Free rotation of an axially symmetrical body» (Свободное вращение аксиально-симметричного тела) [3]. На странице приводится сжатое изложение теоретического материала по механике симметричного волчка и приводится ссылка на Java-апплет, обеспечивающий возможность визуализировать динамику волчка при различных заданных параметрах, останавливать и снова запускать анимацию для обеспечения наглядности и проведения количественных измерений.

**Актуальность** – работа актуальна в силу педагогической необходимости анимированных демонстраций в курсе теоретической механики, а также для выявления возможностей, плюсов и минусов нового инструмента Unity для научного использования.

Что касается использования Unity в других работах, связанных с непосредственно с физикой, то таких работ мы не нашли. В основном Unity используется для создания игр, однако, за пределами игровой промышленности можно привести такие примеры, как моделирование и визуализация дизайна, моделирование и обучение, создание и визуализация синтетической среды [7].

Для более глубокого понимания того, как механика твердого тела отражается в анимации, необходимо расширение стандартных представлений о характеристике поворотов. Как в уже ставших классическими учебниках по теоретической механике [1], так и в более поздних книгах [2] описание вращательных степеней свободы твердого тела производится с помощью углов Эйлера. Более современные учебники, например [8], уже затрагивают такие альтернативные подходы, как задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов и кватернионное сложение поворотов.

Кватернионы, впервые введенные Гамильтоном [9], представляют собой пары из скаляра и вектора трёхмерного пространства со специальным образом введенными операциями сложения и умножения. Они давно используются для описания положения твердого тела как альтернатива классическим углам Эйлера (см., например, монографию [10] и ссылки в ней). Однако, особенно интенсивное применение они нашли с развитием компьютерного имитационного моделирования в технике (например, контроль ориентации подводных, летательных и космических аппаратов) и бурно развивающейся индустрии компьютерной анимации (см., например, [11]). Одним из примеров современного учебника по теоретической механике, где последовательно излагается описание кинематики твердого тела в терминах кватернионов, является размещенная в свободном интернет-доступе книга Н.И. Амелькина [12]. Unity как раз и использует аппарат кватернионов для описания вращений, в силу чего представляется целесообразным привести ниже сжатое описание этого аппарата.

#### **Задачи ВКР:**

- Постановка целей и описание актуальности работы (глава 1)
- Описание теории свободного вращения твердого тела (глава 2).
- Исследование вращения через углы Эйлера и кватернионы (глава 3).
- Демонстрация вращения через углы Эйлера и кватернионы (глава 3).
- Описание игрового движка Unity (глава 4).
- Создание анимаций свободного вращения на игровом движке Unity (глава 5).

## Содержание работы

### 1. Сведения о динамике твердого тела

Динамические переменные, сохраняющиеся при свободном движении твердого тела и изменяющиеся под действием внешних сил - это полный импульс

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \mathbf{V} \sum_a m_a, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}$  - скорость центра масс,  $m_a$ ,  $\mathbf{v}_a$  массы и скорости точек тела, и полный момент импульса

$$\mathbf{L} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a]. \quad (2)$$

Компоненты последнего линейно выражаются через компоненты угловой скорости

$$L_i = \sum_j I_{ij} \Omega_j, \quad (3)$$

где коэффициенты  $I_{ij}$  - компоненты тензора инерции.

В собственной (подвижной) системе осей компоненты тензора инерции выражаются через массы и координаты точек тела,

$$I_{ij} = \sum_a m_a (r_a^2 \delta_{ij} - r_{ai} r_{aj}), \quad (4)$$

и являются параметрами самого тела, характеризующими величину и распределение массы по его объему.

Для шарового волчка, когда все три главных момента инерции совпадают,  $I = I_1 = I_2 = I_3$ , имеем просто  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$ . Из закона сохранения момента импульса вытекает сохранение угловой скорости, то есть свободное движение сферического волчка есть равномерное вращение вокруг неподвижной оси.

Свободный симметрический волчок, которому придана начальная угловая скорость, совершает более сложное движение, называемое прецессией. Лишь при вращении вокруг оси симметрии момент импульса также направлен вдоль этой оси. Если же вектор начальной угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$  отклонен от оси симметрии тела на некоторый угол, то вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  не совпадает с ним по направлению, но лежит в одной плоскости с  $\boldsymbol{\Omega}$  и осью симметрии тела. Взаимное расположение этих векторов показано на рис. 1. [13]

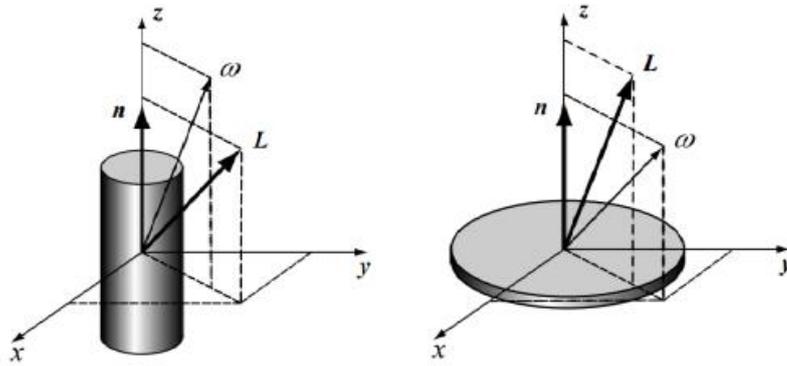


Рис.1 - Взаимное расположение векторов угловой скорости  $\Omega$ , момента импульса  $\mathbf{L}$  и оси симметрии (вектор  $\mathbf{n}$ ) для симметрического волчка вытянутой (слева) и сплюсненной (справа) формы

Для характеристики сложного движения асимметричного волчка закона можно использовать закон сохранения момента импульса и закон сохранения энергии [1] в подвижной системе осей, связанной с телом. Пусть для определенности  $I_1 < I_2 < I_3$ . В подвижной системе направление вектора момента импульса меняется, но сохраняется его длина. Для компонент момента импульса из двух указанных законов сохранения получаются два уравнения:

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2 ; \tag{5}$$

$$\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = 2E \tag{6}$$

где  $E$  – кинетическая энергия.

Уравнения (5) и (6) представляют собой уравнения сферы с радиусом  $L$  и эллипсоида с полуосями:  $\sqrt{2EI_1}$ ,  $\sqrt{2EI_2}$ ,  $\sqrt{2EI_3}$  в пространстве с координатами  $L_1, L_2, L_3$ . В процессе движения конец вектора  $\mathbf{L}$  относительно главных осей инерции волчка движется вдоль линии пересечения указанных поверхностей (рис. 2). Видно, что движение имеет сложный характер; замкнутость траекторий говорит о том, что оно всегда периодически. Более подробный анализ приводится в [1]

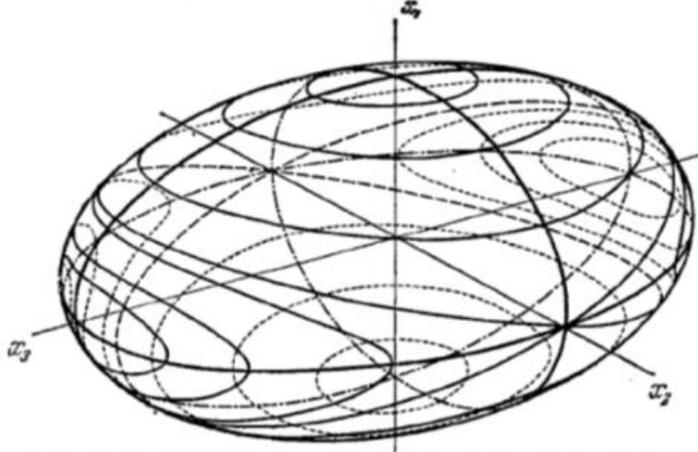


Рис.2 Ряд пересечений эллипсоида (6) со сферами (5) различных радиусов

## 2. Углы Эйлера и кватернионы

Описание вращательного движения через уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 \right) &= F_1 \\ \mu \left( \frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 \right) &= F_2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 \right) &= F_3 \\ I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 &= K_1 \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \Omega_3 \Omega_1 &= K_2 \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= K_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты угловой скорости, входящие в уравнения Эйлера (7) и (8), выражаются через углы Эйлера соотношениями, которые называются кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \dot{\Omega}_2 &= \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi) \\ \dot{\Omega}_3 &= \dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (9)$$

В алгебре кватернионов [14] элементами (кватернионами) являются четырехмерные векторы  $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$  - так называемые гиперкомплексные числа, которые записываются в следующем виде:

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 * i_1 + q_2 * i_2 + q_3 * i_3,$$

где  $q_0, q_1, q_2, q_3$  — координаты кватерниона, являющиеся вещественными числами;  $i_1, i_2, i_3$  — числа, которые являются аналогами мнимой единицы в теории комплексных чисел.

Поворот с помощью кватерниона описывается формулой:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{q} * \mathbf{r} * \tilde{\mathbf{q}} = \cos(a) * \bar{\mathbf{r}} + (1 - \cos(a)) * (\bar{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{u}}) * \bar{\mathbf{u}} + \sin(a) * \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{r}}$$

Изменение скалярной части кватерниона положения  $r$  в формуле выше не изменяет векторную часть кватерниона  $r'$ .

В итоге можно сказать, что мы вращаем вектор  $\mathbf{r}$  на угол  $a$  вокруг оси  $\mathbf{u}$ . Вращение происходит по часовой стрелке, если рассматривать вращение по направлению вектора  $\mathbf{u}$ .

Переход от углов Эйлера к кватернионам описывается с помощью формул:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right)$$

$$q_1 = \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)$$

$$q_2 = \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)$$

$$q_3 = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right)$$

Покажем наглядную разницу между углами Эйлера и кватернионами, воспользуемся программой для демонстрации. На рис. 1 можно видеть, как сильно отличается их сферическая интерполяция. Слева кватернионы, справа углы Эйлера.

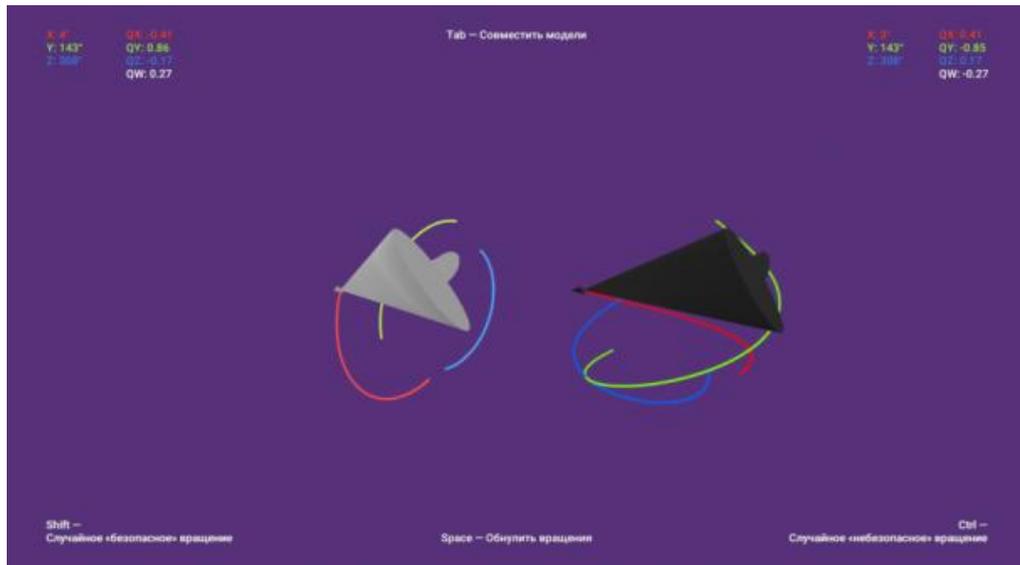


Рис. 3. Иллюстрация различия между углами Эйлера и кватернионами

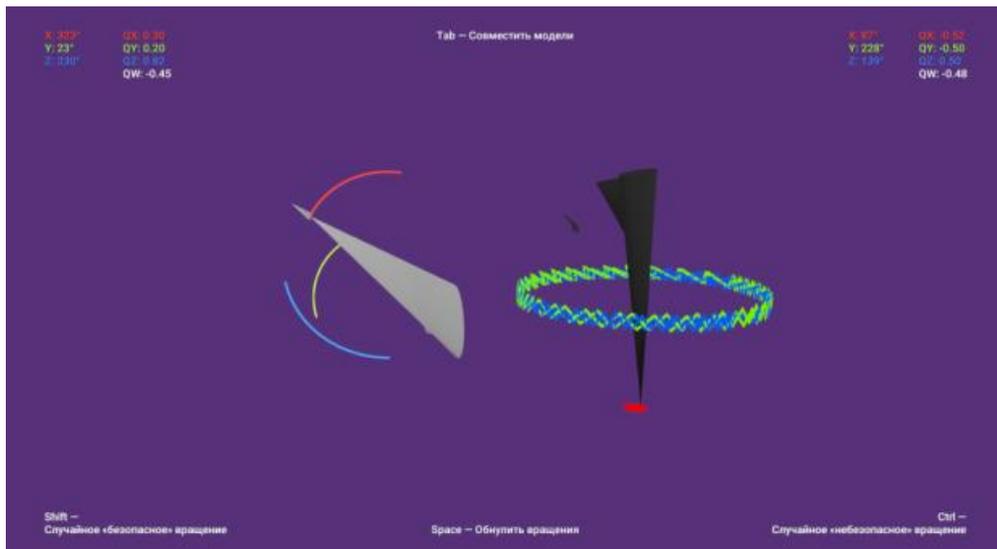


Рис. 4 Сравнение gimbal lock в углах Эйлера и в кватернионах

### 3. Примеры созданных анимаций

#### 3.1 Центр масс фигуры

Что касается центра масс, на рис. 3 показан шаровой волчок, который представлен кубом, и два цветных шарика. Красный в центре куба (плохо виден на распечатке, достаточно хорошо - на экране) - это центр масс волчка, он находится из скрипта с учетом симметрии тела. Желтый шар сделан тоже с помощью скрипта и его роль - это перенос центра масс в удобную для нас точку. Это нужно, если, например, куб неоднороден по массе. Если мы захотим сместить центр масс к краю фигуры, достаточно перенести желтый шарик вручную внутри редактора.

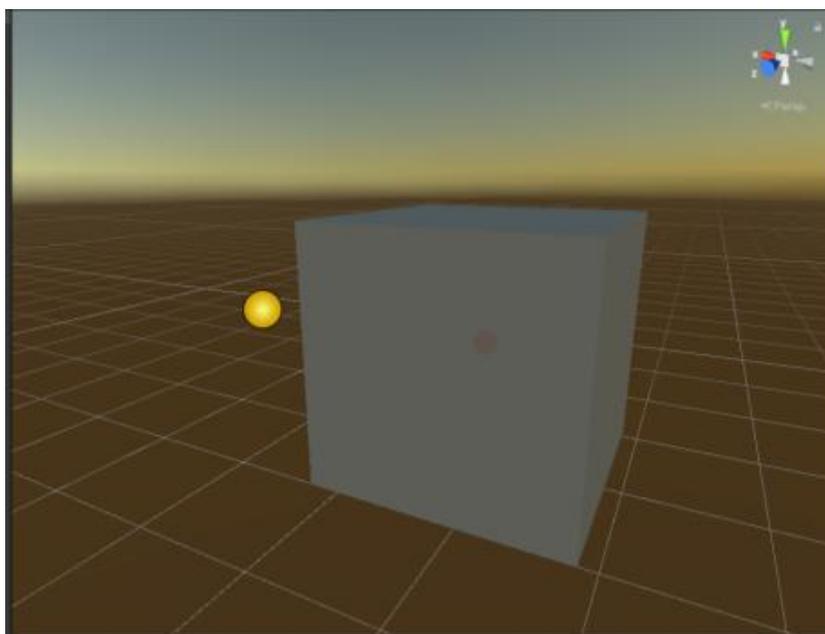


Рис. 5. Центр масс однородного куба (красный шарик в центре) и точка его переноса по желанию пользователя (желтый шарик)

#### 3.2 Шаровой волчок

Теперь, перейдем к демонстрации свободного вращения, начнем с шарового волчка (рис 4), общим случаем свободного вращения которого является просто равномерное вращение вокруг постоянной оси.

В данном случае вращение происходит вокруг вектора  $(0, 1, 0)$ , т.е. вокруг оси  $Y$  (зеленная стрелка), увеличение второй компоненты этого вектора, приведет к увеличению скорости вращения (в данном примере примерно 10 градусов/с), которая остается постоянной, так как сопротивление среды отключено. Меняя вектор вращения, мы будем получать тот же самый результат.

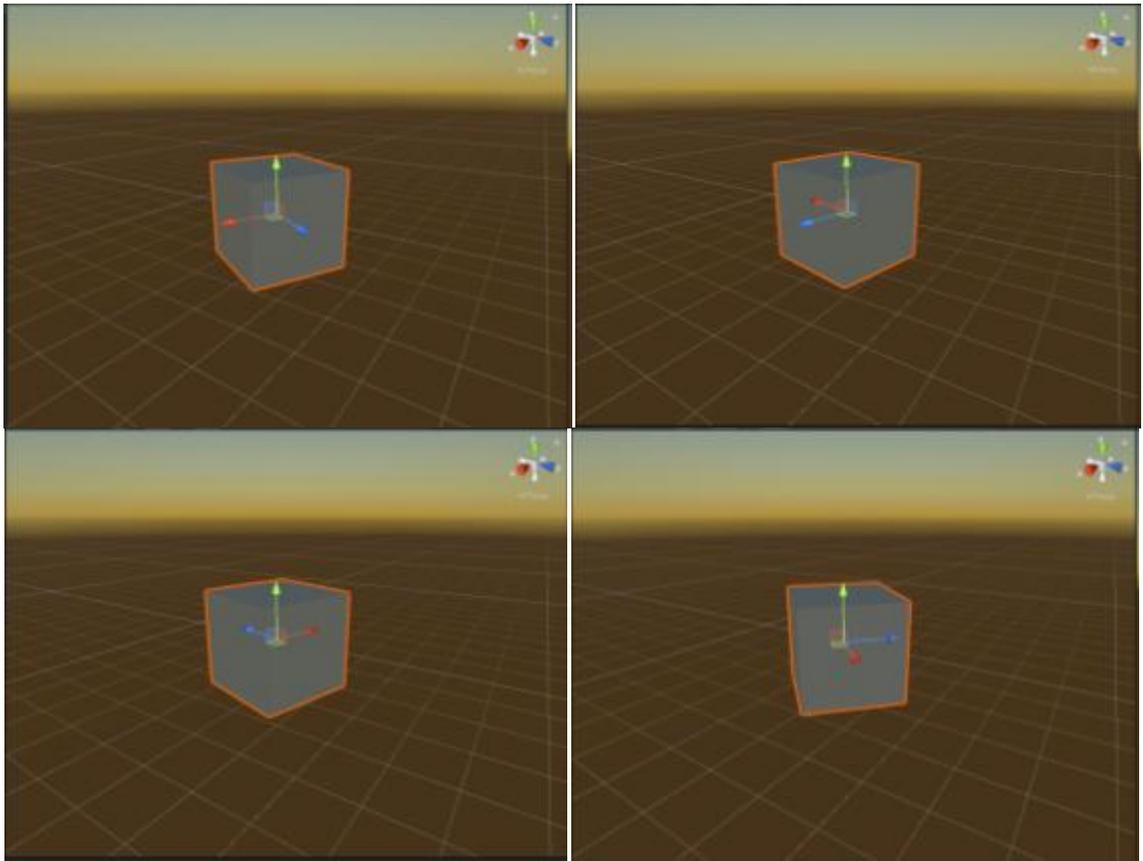


Рис. 6. Равномерное вращение куба (сферического волчка)

### 3.3 Симметричный волчок

Перейдем к симметричному волчку (рис 5), в рассматриваемом примере он задан фигурой с диагональными компонентами тензора инерции: (0.42, 0.42, 0.67)

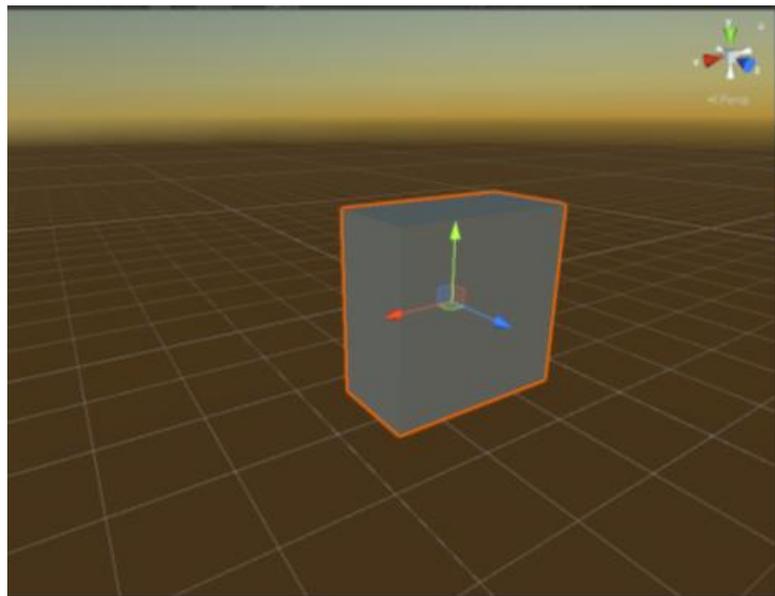


Рис. 7. Пример симметричного волчка

Зададим вращение вокруг вектора  $(1, 0, 1)$ . Наблюдаемое движение согласуется с ожидаемым результатом, который представляет собой прецессию (красная стрелочка на рис. 6). Для более четкой демонстрации и количественной обработки результатов наблюдения желательно показать вектор момента импульса, вокруг которого происходит вращение оси симметрии волчка, а также разложить угловую скорость на составляющие вдоль оси симметрии волчка и вдоль момента импульса. Добавление этих функций возможно, но не на уровне меню, а на уровне изменения кода.

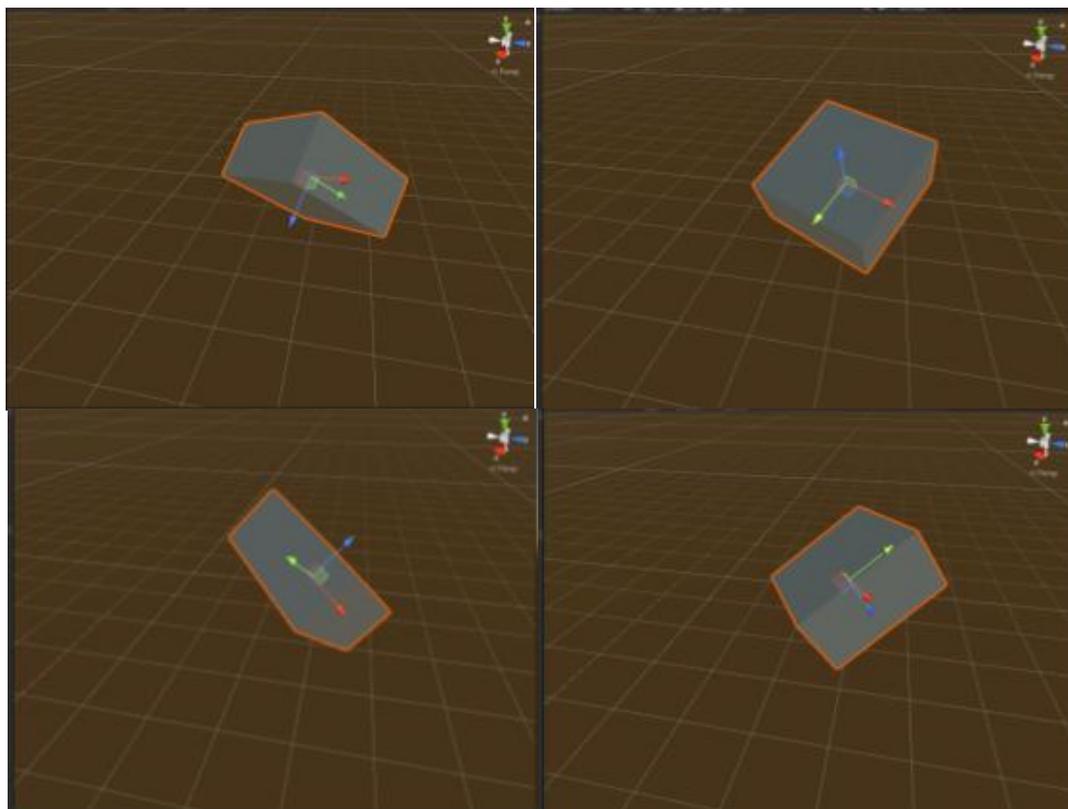


Рис. 8. Кадры, иллюстрирующие прецессию симметричного волчка

### 3.4 Асимметричный волчок в Unity

Рассматривался прямоугольный параллелепипед (рис. 7) с диагональными компонентами тензора инерции, равными  $(0.42, 0.83, 1.08)$ .

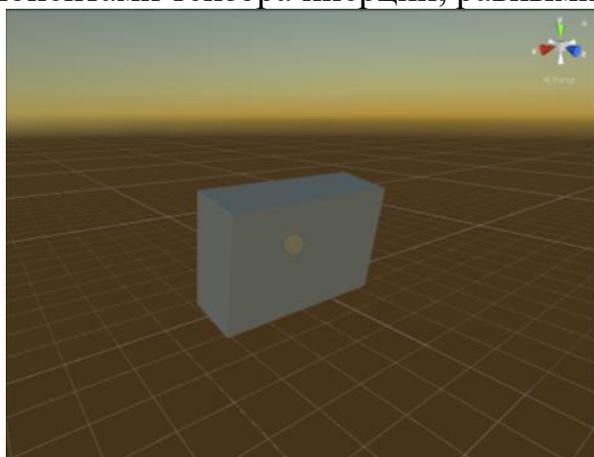


Рис. 9. Пример асимметричного волчка

В этом случае промежуточной осью является ось  $Y$ . Если задать вектор вращения  $(0, 1, 0)$ , то волчок, как и должно быть по теории, демонстрирует равномерное вращение вокруг этой оси. Для демонстрации неустойчивости этого вращения отклоним нашу фигуру от оси  $X$  на 1 градус, и раскрутим вокруг вектора  $(0, 1, 0)$ . В итоге ось  $Y$  начинает вращаться по спирали и поворачивается на 90 градусов (рис. 8).

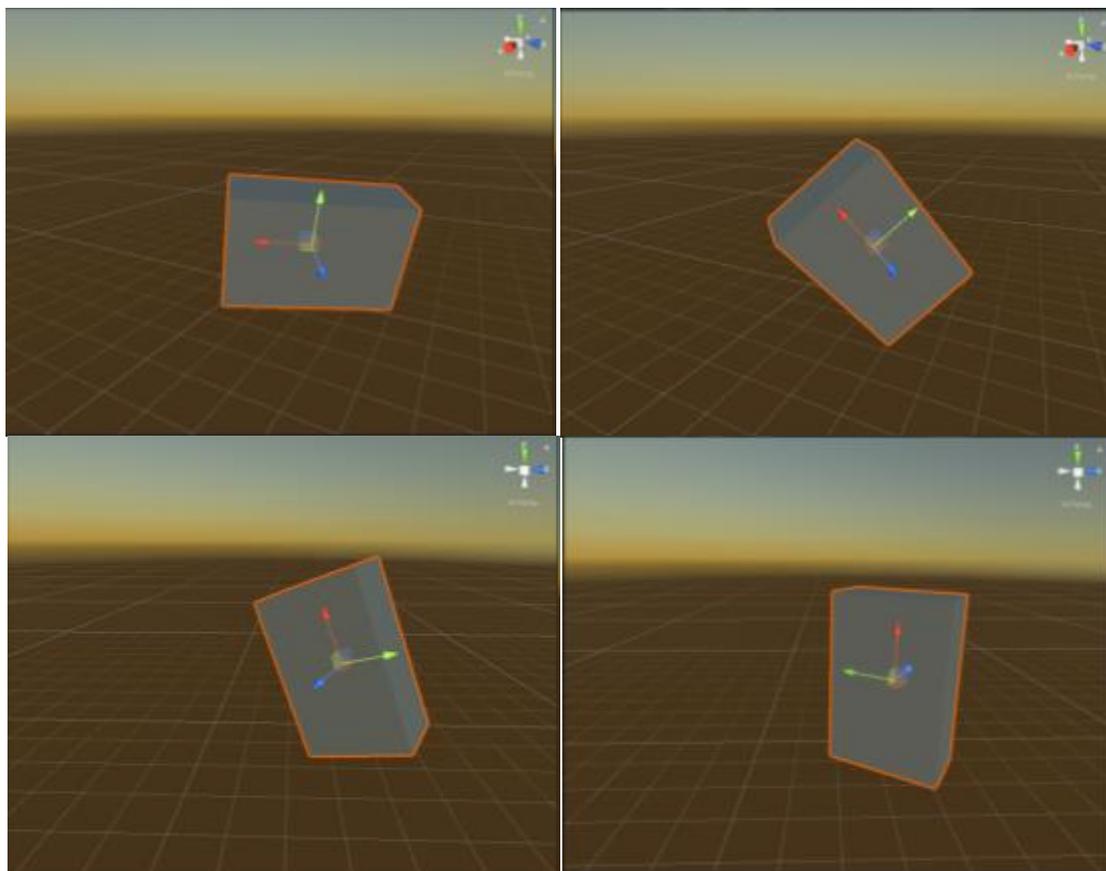


Рис. 10. Спиральное движение промежуточной оси вместо демонстрации неустойчивости

Конечно, с помощью скрипта мы можем симулировать движение похожее, по виду, на нужный нам эффект, но траектория движения будет отличаться, что говорит о физически неправильной реализации. То, что мы получили, к эффекту Джанибекова не имеет никакого отношения.

### 3.5 Асимметричный волчок в Source

Неудача демонстрации эффекта Джанибекова вызывает определенные сомнения в способности Unity корректно, а не просто правдоподобно моделировать все случаи вращательных движений твердого тела. А способны ли на это другие игровые пакеты? С целью ответа на данный вопрос, рассмотрим игровой движок Source. Он гораздо старше движка Unity и подарил миру

огромное количество замечательных проектов. Эффект мы будем наблюдать на фигуре похожую на ту, которую мы создавали в Unity (рис. 9).



Рис 11. Модель асимметричного волчка для Source

Да, Source куда более заточен под игры и на нем нет привычных нам векторов и всего остального. Однако, анимация четко показывает переворот оси вращения (эффект Джанибекова). Автор сожалеет о том, что приведенные на рис. 10 скриншоты не дают достаточно наглядного представления о движении во времени которое хорошо видно при просмотре анимации.

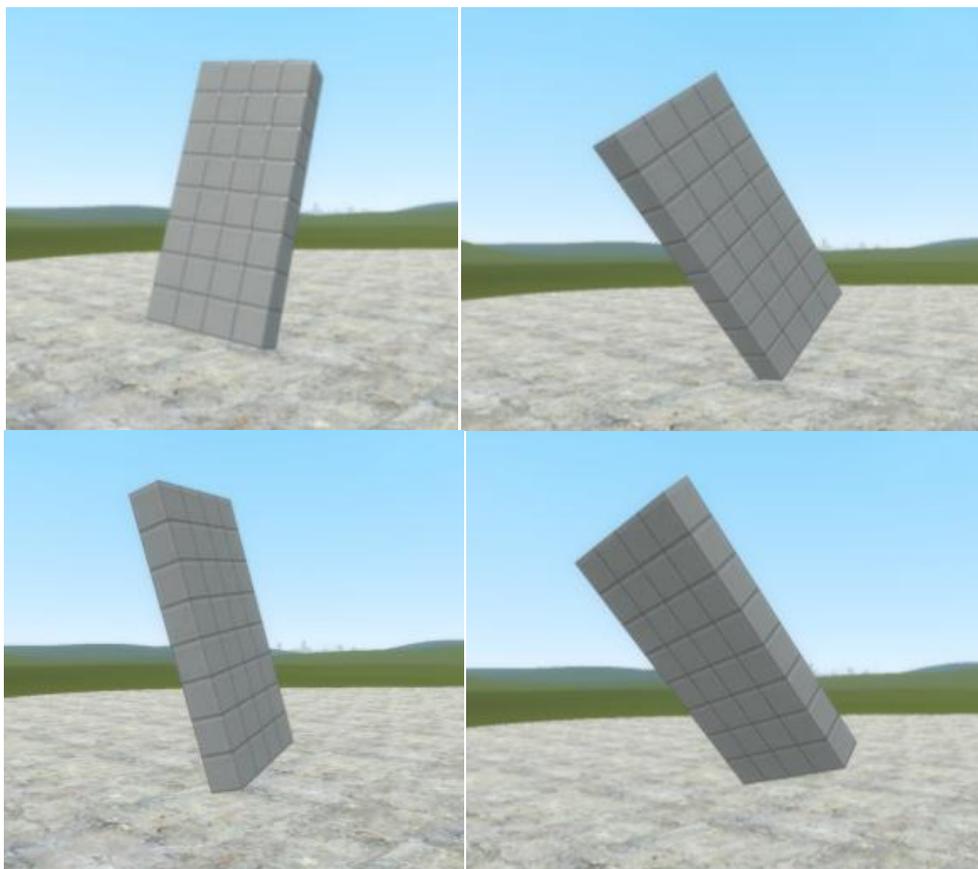


Рис. 12. Кадры анимации, демонстрирующей неустойчивость вращения вокруг средней оси для асимметричного волчка

## 4. Выводы

При реализации этой работы было сделано многое, что может понадобиться в дальнейшем. Была описана теория вращения абсолютно твердого тела, а также описана и проиллюстрирована анимационно на Unity теория кватернионов и углов Эйлера. Показаны модели вращения шарового и симметричного волчка, написаны скрипты для нахождения и манипуляции центром массы фигуры, а также скрипт для нахождения тензора инерции. Это все пригодится при реализации дальнейших шагов, которые могли бы последовать в развитие этой работы.

В заключение можно сказать, что движение твердого тела на игровом движке Unity, возможно, реализовано не вполне корректно. Так, нами было найдено несоответствие в движении асимметричного волчка. Также, многого не хватает для работы с физикой, к примеру, нет возможности найти главные оси инерции при работе с телом произвольной формы, для этого и понадобится тензор инерции. Нет необходимых векторов, вектора угловой скорости и вектора импульса для фигуры в общем случае. Из-за недоработки физики внутри самого движка Unity, пришлось переключиться на Source, который оказался способен продемонстрировать эффект неустойчивости средней оси. Добавление отсутствующих сервисов в исходно игровые кроссплатформенные системы требует более глубоких изменений кода, целесообразность которых по сравнению с созданием новой анимационной программы, например, как это сделано в [3], неочевидна и требует дополнительного анализа.

### Список использованной литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. - М.: Наука, 1965.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с
3. Eugene Butikov (20 June 2012). Free rotation of an axially symmetrical body URL : <http://butikov.faculty.ifmo.ru/Applets/Precession.html>. Дата обращения : 26.04.22
4. EJS HOME PAGE(1999). URL : <https://www.um.es/fem/EjsWiki/>. Дата обращения : 01.05.22.
5. Francisco Esquembre. URL : <https://www.um.es/fem/PersonalWiki/>. Дата обращения : 01.05.22
6. OSP (Open Source Physics) (2003). URL : <https://www.compadre.org/osp/>. Дата обращения : 01.05.22
7. Government & Aerospace. URL : <https://unity.com/solutions/government-aerospace>. Дата обращения: 20.03.22
8. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. – М.: Физматлит, 2008. – 304 с
9. Полак Л. С. Уильям Роуэн Гамильтон (к 150-летию со дня рождения) // Труды Института истории естествознания. — АН СССР, 1956. — Т. 15 (История физ.-мат. наук). - С. 273.
10. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.

11. Боресков А. В. Графика трехмерной компьютерной игры на основе OPENGL. - М.: Диалог-МИФИ, 2004. - 384 с.
12. Амелькин Н.И. Динамика твердого тела. URL: (<https://mipt.ru/upload/medialibrary/dc2/amikin-n.i.-dinamika-tverdogo-tela.pdf>). Дата обращения : 10.04.22
13. Бутиков Е.И. Свободное вращение твердого тела. Компьютерные инструменты в образовании, № 1 (январь – февраль 2006. С. 10 – 18.
14. Мисюра Н. Е., Митюшов Е. А. Кватернионные модели в кинематике и динамике твердого тела : учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2020 – 120 с.,[1] лист ил.
15. Altmann Simon L. Rotations, Quaternions, and Double Groups. Mineola: Dover Publications, 1986. – 317 p.
16. Awesome Unity Open Source on GitHub (800+). URL: (<https://github.com/teameo.ca/baba-s/awesome-unity-open-source-on-github#Water>). Дата обращения : 15.03.22
17. Как Нил Бломkamp и Unity формирует будущее кинопроизводства с Адамом: Зеркало. // Интернет-издание The Verge. URL: <https://www.theverge.com/2017/10/4/16409734/unity-neill-blomkamp-oats-studios-mirror-cinemachine-short-film>. Дата обращения : 20.03.22
18. Как игровая компания Unity подталкивает автопроизводителей к виртуальной реальности // Интернет-портал Digital Trends. URL: <https://www.digitaltrends.com/cars/unity-automotive-virtual-reality-and-hmi/> Дата обращения: 20.03.22
19. Открытый код PhysX. URL : <https://github.com/NVIDIAGameWorks/PhysX>. Дата обращения : 20.03.22
20. Оптимизация игр в Unity 5 / пер. с англ. Рагимова Р. Н. М.: ДМК Пресс, 2017. – 306 с.: ил.
21. Poinsot L. [Outlines of a New Theory of Rotatory Motion](#) (англ.) / пер. с фр. на англ.: Ч.Уитли (Ch. Whitley). Cambridge: Pitt Press, 1834. P. 63 –68.