Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра общей, теоретической и компьютерной физики

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕГАУССОВСКИХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

АВТОРЕФЕРАТ
БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ
студента 4 курса 4022 группы
направления 03.03.02 «Физика» института физики
Самойлова Никиты Викторовича

Научный руководитель
д.ф.-м.н. профессор ____________________________ В.М. Аникин
(подпись, дата)
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. профессор ____________________________ В.М. Аникин
(подпись, дата)

Саратов 2022

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Марковские случайные процессы широко применяются для моделирования задач в различных научно-технических областях – в физике, биофизике и медицинской физике, катодной электронике, радиотехнике, автоматическом управлении, теории массового обслуживания и теории надежности и т.д. Прикладная значимость марковских моделей обусловлена, прежде всего, наличием разработанного математического аппарата (у его истоков стояли отечественные ученые А. А. Марков, А. Н. Колмогоров, Р. Л. Стратонович) и возможностью получения в ряде случаев аналитических решений для вероятностных распределений, корреляционных функций, винеровских спектров и т.д. В этой связи при решении задач моделирования в качестве возможных моделей часто рассматриваются именно марковские модели.

Эффективным методом моделирования случайных процессов является так называемый конструктивный подход, когда на базе известной модели строится новая модель, обладающая иными вероятностными характеристиками. Это позволяет существенно расширять круг решаемых различных по содержанию и отнесению к конкретной науке задач.

При этом, как представляется, при доведении решения задачи до алгоритмов и реализованных на их основе программ большое значение имеет информационная защищенность. Это, в частности, подразумевает определенную целостность программного продукта, независимость его от шаблонных алгоритмов, которыми снабжаются математические пакеты.

Данная выпускная квалификационная работа посвящена разработке оригинальных математических продуктов для задач моделирования случайных величин с заданным распределением и случайных негауссовских диффузионных процессов.

Общая характеристика (цель и задачи работы, объект и предмет исследования, методы исследования, новые (защищаемые) результаты, значимость для теории и практики) выпускной квалификационной работы (ВКР) представлены в таблице 1.

Таблица 1. Аспектные характеристики ВКР

Характеристика	Содержание
Цель ВКР	Математическое и программное конструирование оригинальных датчиков случайных величин и моделей случайных диффузионных процессов на базе винеровского процесса.
Объекты исследования ВКР	1. Разностные уравнения первого порядка (одномерные хаотические отображения) с инвариантной мерой, отличной от равномерного распределения, как основа датчиков случайных величин. 2. Стохастические дифференциальные уравнения, решения которых непрерывны, хотя приращения процессов не являются гауссовскими.
Предмет исследования	Хаотические отображения как датчики случайных величин с распределением Релея, уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (УФПК) с точным решением в виде релеевского распределения и соответствующие этому УФПК стохастические дифференциальные уравнения как моделей диффузионных процессов.
Задачи исследования	Разработка алгоритмов датчиков случайных величин на базе различных хаотических отображений с инвариантной плотностью в форме релеевского распределения посредством применения метода синтеза сопряженных отображений (глава 1). Определение коэффициентов сноса и диффузии УФПК, обладающего точным (аналитическим) решением в форме плотности распределения Релея (глава 2); Построение стохастического дифференциального уравнения как модели случайного процесса с релеевским распределением в сечении конструктивным способом (через стандартный винеровский процесс). Моделирование реализаций процесса для различных параметров (глава 3).

Научная и практическая значимость	Нахождение генератора с релеевским распределением имеет значение в теории надежности для моделирования времени жизни различных устройств. Кроме того, наличие параметра в отображении Релея заставляет взглянуть на него и с точки зрения построения схем хаотического кодирования – наличие параметра усложняет задачу криптоанализа. Модель случайного процесса с релеевским распределением в сечении определяет новый тип марковского диффузионного процесса. Модель диффузионного процесса, не являющегося гауссовским (нормальным), как того требует классическая модель диффузии, т.е. предлагаемая модель может быть сопоставлена с процессом диффузии, происходящим в средах сложной структуры
Защищаемые результаты	Программно независимые алгоритмы моделирования случайных величин и марковских диффузионных случайных процессов.

Структура работы. ВКР включает введение, 3 главы, заключение, список цитируемых источников и приложение. Общий объем 40 с.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описываются аспектные характеристики работы согласно таблице 1.

В главе 1 дается понятие о топологически сопряженных эндоморфизмах, излагается метод построения сопряженных эндоморфизмов (отображений) методом обратных функций, принцип подхода к выбору базовых эндоморфизмов (кусочно-линейных отображений) при построении хаотических отображений с заданной инвариантной мерой.

В главе 2 описываются математические свойства винеровского стохастического процесса как диффузионного марковского процесса, характеризуется его роль для моделирования стохастических процессов типа броуновского движения. Рассматривается структура уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для диффузионных процессов. Формулируется стационарное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова, обладающего аналитическим решением в форме закона распределения, введенного в рассмотрение Релеем, которое широко используется при моделировании радиотехнических и надежностных задач радиоэлектроники. Его плотность распределения описывается функцией:

$$f(x;\sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp(-x^2/(2\sigma^2)), \quad x \ge 0, \sigma > 0. \ (1)$$

Уравнение (1) описывает случайную величину, заданную на положительной полуоси числовой прямой, причем значения параметра σ существенно влияют на вид распределения, сдвигая наиболее вероятное значение случайной величины по оси вправо. В отличие от гауссовского распределения, на основе которого определен винеровский процесс, распределение Релея не является симметричным.

Модификации подходов к моделированию стохастических процессов классифицируются в таблице 2.

Таблица 2. Виды описаний стохастических процессов

Тип описания	Подтипы описания	Средство описания
Конструктивное (прямое) описание случайных процессов (в терминах случайных процессов), через хорошо изученные эталонные случайные процессы: а) белый шум (математическую абстракцию), б) винеровский процесс (с корректно определенными свойствами).	Явное прямое описание	Функциональная связь между изучаемым случайным процессом и эталонным случайным процессом.
	Неявное прямое описание	Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), содержащее дифференциалы изучаемого и эталонного случайных функций.
Косвенное (в терминах детерминированных функций – вероятностных распределений)	Явное описание	Известные многомерные вероятностные распределения для изучаемого процесса.
	Неявное описание	Уравнения относительно плотностей вероятностного распределения изучаемого процесса.

Стационарное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова, обладающее аналитическим решением в форме (1), имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(g^2(y)p_{st}(y)\right)-2f(y)p_{st}(y)=0. \qquad (2)$$

Комбинация уравнений (1) и (2) позволяет определить коэффициенты сноса и диффузии в уравнении (2), т.е. перейти к модели диффузионного процесса с негауссовским распределением по сечению процесса.

В главе 3 строится стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито, отвечающее построенному в главе 2 уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова (2). Полученное стохастическое дифференциальное уравнение используется для компьютерного моделирование процесса, характеризующегося негауссовским распределением по сечению диффузионного процесса:

$$X(t+\Delta t)=X(t)+\Delta X(t)=X(t)+(\sigma^2-0.5X^2(t))\Delta t+\sigma\sqrt{X(t)}\Delta W(t), \quad (3)$$

где приращение винеровского процесса выражается как

$$W(t+\Delta t)=W(t)+N(0,\sigma^2\,|\,\Delta t\,|),$$

где в свою очередь $N(0,\sigma^2\,|\,\Delta t\,|)$ означает нормальный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2\,|\,\Delta t\,|$.

На рисунке 1 показана одна из компьютерных реализаций винеровского процесса, а на рисунках 2 и 3 – реализации диффузионных процессов с релеевским распределением для двух значений параметра $\sigma=1, \quad \sigma=4\,|$.

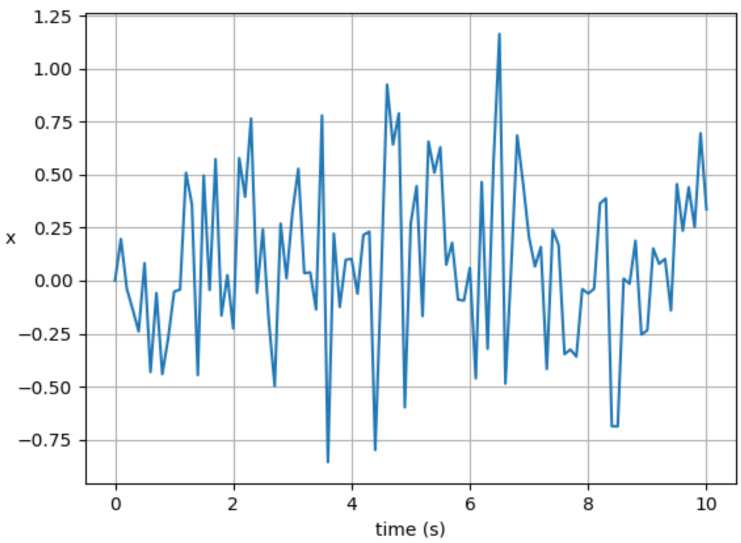

Рисунок 1. Реализация винеровского процесса
на базе стандартного нормального распределения

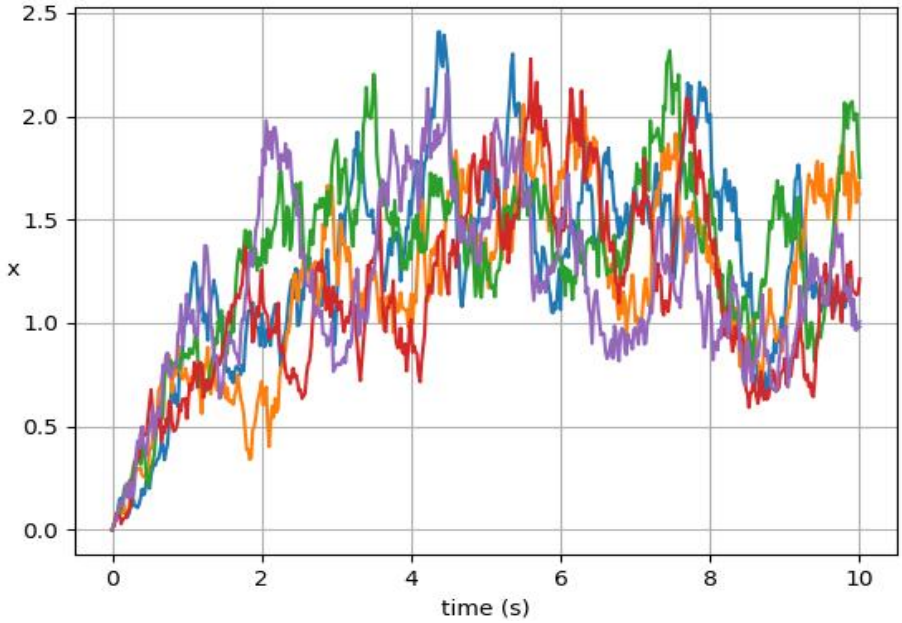

Рисунок 2. Траектории случайного марковского диффузионного процесса с параметром релеевского распределения σ=1 (5 реализаций)

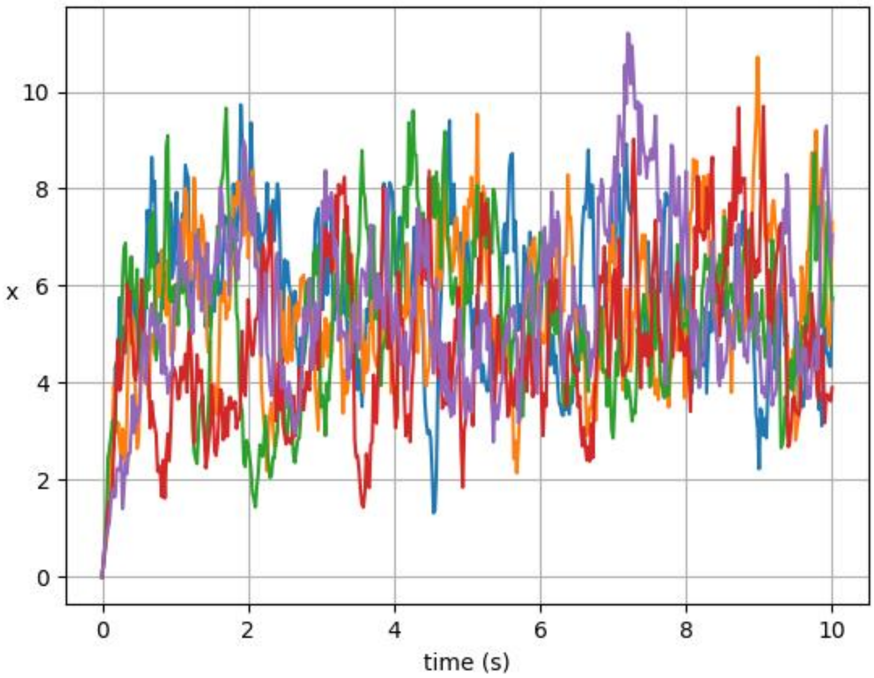

Рисунок 3. Траектории случайного марковского диффузионного процесса с параметром релеевского распределения σ=4 (5 реализаций)

ВЫВОДЫ

Моделирование негауссовских диффузионных процессов предполагает предварительное нахождение коэффициентов сноса и диффузии из стационарного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК). Эти коэффициенты находятся из условия задания точного решение стационарного уравнения ФПК для одномерной плотности в форме закона Релея.

Определенные таким способом коэффициенты сноса и диффузии подставляются в соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение (Ито), которое и используется для компьютерного моделирования. Решается, таким образом, задача конструктивного моделирования случайных негауссовых марковских диффузионных процессов через базовый винеровский процесс.

Полученные результаты обладают ***новизной и практической направленностью***. С одной стороны, нахождение генератора с релеевским распределением имеет значение в теории надежности для моделирования времени жизни различных устройств. С другой стороны, модель случайного процесса с релеевским распределением в сечении определяет новый тип марковского диффузионного процесса. Наличие параметра в отображении Релея может быть использовано для построения схем хаотического кодирования – наличие параметра усложняет задачу криптоанализа.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
2. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. 88 с.
3. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
4. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. 528 с.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
6. *Grossmann S., Thomae S.* Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes // Z. Naturforsh. 1997. V. 32a. P. 1353-1363.
7. *Tsuchia T., Szabo A., Saito N.* Exact solutions of simple nonlinear difference equation systems that show chaotic behavior // Z. Naturforsh. 1983. V. 38a. P. 1035-1039.
8. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 360 c.
9. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M.* The explicit solutions of Frobenius-Perron equation for the chaotic infinite maps // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1998.V. 8, № 5. P. 1049. DOI: 10.1142/S0218127498000863 2 .
10. *Голубенцев А. Ф., Аникин В. М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса-Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т.8, №2. С. 67 – 73.