Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра общей, теоретической и компьютерной физики

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА БАЗЕ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

АВТОРЕФЕРАТ (МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ
студента 2 курса 2225 группы
направления 03.04.02 «Физика» физического факультета
Черных Виталия Алексеевича

Научный руководитель
д.ф.-м.н. профессор ____________________________ В.М. Аникин
(подпись, дата)

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. профессор ____________________________ В.М. Аникин
(подпись, дата)

Саратов 2022

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуализация. Вариабельность вероятностных законов при моделировании стохастических и хаотических физических процессов и их мониторинга может быть разнообразна, что диктуется необходимостью отражения специфики реальных процессов. Математическая обработка экспериментальных данных, полученных в различных испытаниях, позволяет выявлять наиболее «благоприятные» величины параметров для используемых в моделировании вероятностных распределений в качественном и количественном ключе. Например, в задачах прогнозирования и оценки стабильной работы радиоэлектронных изделий непосредственно применяются законы распределений, предназначенные для вероятностного описания сугубо положительных величин (характеристик надежной работы и отказов), заданных на больших диапазонах изменения – таких, как распределение Вейбулла–Гнеденко, частным случаем которого является показательное (экспоненциальное) распределение, усеченное (слева) нормальное распределение, распределение Эрланга, гамма-распределение, логарифмически нормальное распределение, а также обратное гауссовское распределение. Вид этих распределений зависит от параметров, входящих в выражение для плотностей распределения и интегральных законов распределения, что делает их удобными при решении конкретных задач..

Статистическое моделирование основано на алгоритмах датчиков случайных величин и случайных процессов. В данной работе предлагаются оригинальные алгоритмы для моделирования случайных величин (глава 1) и стохастических процессов (глава 2), в описание которых входит распределение Вейбулла–Гнеденко.

Целями **выпускной квалификационной работы (ВКР) ставятся**:

– применение метода обратной функции для построения оригинального хаотического (обладающего динамикой хаотического процесса) датчика значений случайной величины с распределением Вейбулла-Гнеденко;

– формулировка уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФКП), обладающего точным решением относительно стационарной одномерной плотности;

– конструктивное определение стохастического процесса на базе винеровского процесса с оригинальным вероятностным распределением по сечению процесса.

Достижение цели достигается в процессе решения **задач** по реализации техник построения сопряженных отображений, аналитического решения дифференциальных уравнений для марковских случайных процессов и формулировки стохастических дифференциальных уравнений.

Научное и прикладное значение работы определяется оригинальностью подхода и полученными результатами, дополняющими алгоритмы моделирования псевдослучайных величин с заданными распределениями, а также обобщающими модели броуновского движения и полезными для использования в криптографических схемах.

Работа включает введение, две главы, заелючение и список рассмотренных источников (19 наименований). Общий объем – 38 с.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении формулируются аспектные характеристики работы – ее актуальность, цель, задачи, научная и практическая значимость.

В **главе 1** излагаемый первоначально общий подход к построению топологически сопряженных отображений конкретизируется затем в задаче построения хаотического отображения, обладающего инвариантной плотностью распределения в форме закона Вейбулла – Гнеденко, в частном случае совпадающего с показательным (экспоненциальным) распределением.

Хаотическим отображениям уделяют внимание в прикладном аспекте как генераторам псевдослучайных величин с заданными вероятностными свойствами. Наиболее обоснованный алгоритм синтеза новых хаотических отображений заключается в построении сопряженных отображений на основе базовых отображений с хорошо изученными свойствами и обладающими известными инвариантными плотностями (в форме равномерного закона). Как правило, в качестве них используют кусочно-линейные отображения, инвариантным распределением для которых является равномерное распределение.

Идею сопряжения отображений иллюстрирует приводимая схема. Говорят, что два отображения $g_1 : X_1 \to X_1$ и $g_2 : X_2 \to X_2$ топологически сопряжены или эквивалентны, если существует обратимое дифференцируемое отображение (гомеоморфизм) $h : X_1 \to X_2$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g_1} & X_1 \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ X_2 & \xrightarrow{g_2} & X_2 \end{array}$$

коммутативна, т.е. справедливы композиционные соотношения

$$h \circ g_1 = g_2 \circ h, \text{ т.е. } g_2\big(h(x_1)\big) = h\big(g_1(x_1)\big).$$

При замене координат инвариантная плотность $\rho(x)$ базового отображения преобразуется в плотность

$$\tilde{\rho}(x) = \rho\big(h^{-1}(x)\big)\left|\frac{dh^{-1}(x)}{dx}\right|,$$

где $h^{-1}(x)$ - обратная функция для h. В случае равномерного инвариантного распределения, отвечающего базовому отображению, первый сомножитель тождественно равен 1. Таким образом, инвариантная плотность сопряженного отображения определяется производной от обратной функции $h^{-1}(x)$, а алгоритм синтеза новых отображений основан на поиске сопрягающей функции*, обратная функция* от которой является заданным законом распределения.

На рисунке 1 приведено отображение, построенное по методу сопряжения на основе диадического отображения, обладающее инвариантным распределением, описываемым законом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \ x \geq 0.$$

Точка $x^* = \lambda(\ln 2)^{1/k}$ является точкой разрыва второго рода.

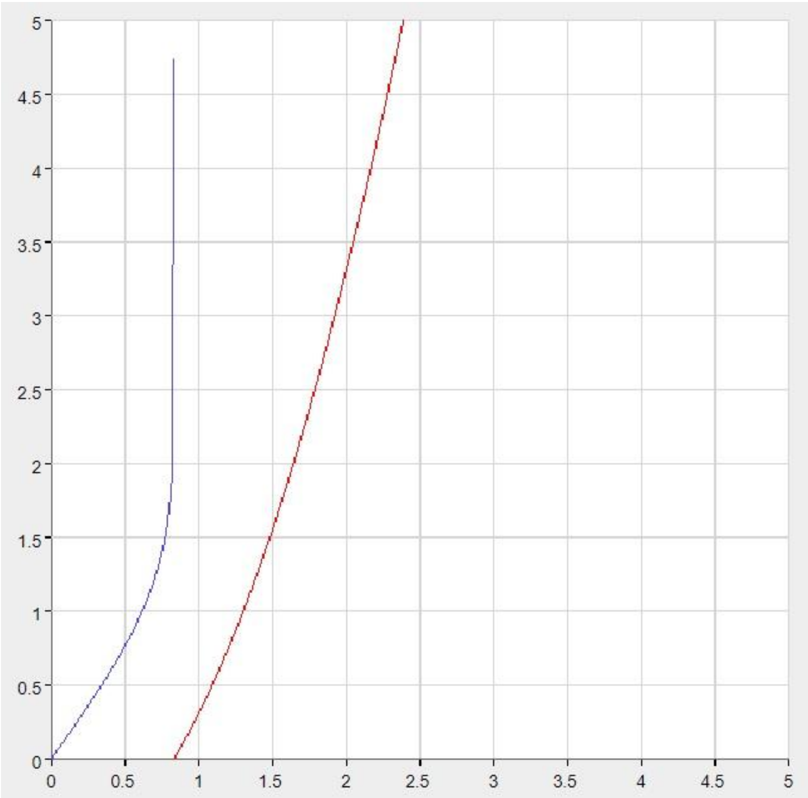

Рисунок 1 – Отображение, обладающее инвариантной плотностью в форме закона Вейбулла-Гнеденко для случая $\lambda = 1, k = 2$

В **главе 2** проводится моделирование диффузионного марковского процесса с распределением Вейбулла–Гнеденко по сечению процесса.

В компьютерном моделировании случайных процессов широко используется так называемый ***конструктивное описание***, когда моделируемый процесс (приращение моделируемого процесса на определенном временном интервале) выражается через *случайный процесс* (приращение случайного процесса на том же интервале) с известными вероятностными свойствами. Когда моделирующие уравнения формулируются в дифференциалах случайных процессах, эти уравнения называются стохастическими дифференциальными уравнениями.

Базовым при конструктивном моделировании случайных процессов часто используется ***винеровский процесс,*** являющийся марковским процессом. Винеровским процессом (стандартным винеровским процессом) называется случайная функция $\{W(t), t > 0\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $W(t)$ – гауссовский процесс (при каждом значении аргумента $W(t)$ имеет нормальное распределение);

б) $W(t)$ – однородный процесс с независимыми (на непересекающихся промежутках времени) *приращениями*[1] (процесс $X(t)$ с независимыми приращениями называется однородным, если распределение случайной величины $X(t_0 + h) - X(t_0)$ не зависит от t_0;

в) $\{W(0) = 0; \quad M\{W(t)\} = 0\}$ (процесс выходит из нуля);

г) корреляционная функция процесса $R_W(t,s) = \min(t,s), \quad t,s \geq 0$.

Приращение процесса характеризуется нормальным законном с параметрами (0, $\sigma^2 |t - s|$):

$$P(\Delta w(t,s)) = N(0, \sigma^2 |t - s|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 |t - s|}} \exp\left(-\frac{(\Delta w(t,s))^2}{2\sigma^2 |t - s|}\right).$$

Моделирование диффузионного марковского процесса с распределением Вейбулла– Гнеденко по сечению процесса состоит из следующих этапов:

1. Определяются коэффициенты сноса и диффузии стационарного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК), обладающего решением в форме закона Вейбулла – Гнеденко:

$$\lambda^k \frac{\partial}{\partial x}\left(x\, p_{st}(x)\right) - k(\lambda^k - x^2)\, p_{st}(x) = 0.$$

2. Строится соответствующее полученному уравнению ФПК стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито:

$$dX_t = \frac{1}{2} k\left(\lambda^k - X_t^{\ 2}\right)dt + \sqrt{\lambda^k X_t}\, dW_t$$

3. Проводится компьютерное моделирование траекторий процесса для различных значений параметра распределения Вейбулла – Гнеденко. В частно-

---

[1]) Независимость приращений *гауссовского* процесса следует из их некоррелированности. Случайные величины с абсолютно непрерывным совместным распределением независимы (в совокупности), если плотность совместного распределения равна произведению плотностей случайных величин.

сти, при $k = 1$ и $\lambda = 1/\alpha$ распределение Вейбулла сводится к показательному закону распределения.определяет экспоненциальный закон распределения.

Результаты моделирования представлены на рисунках 2 и 3.

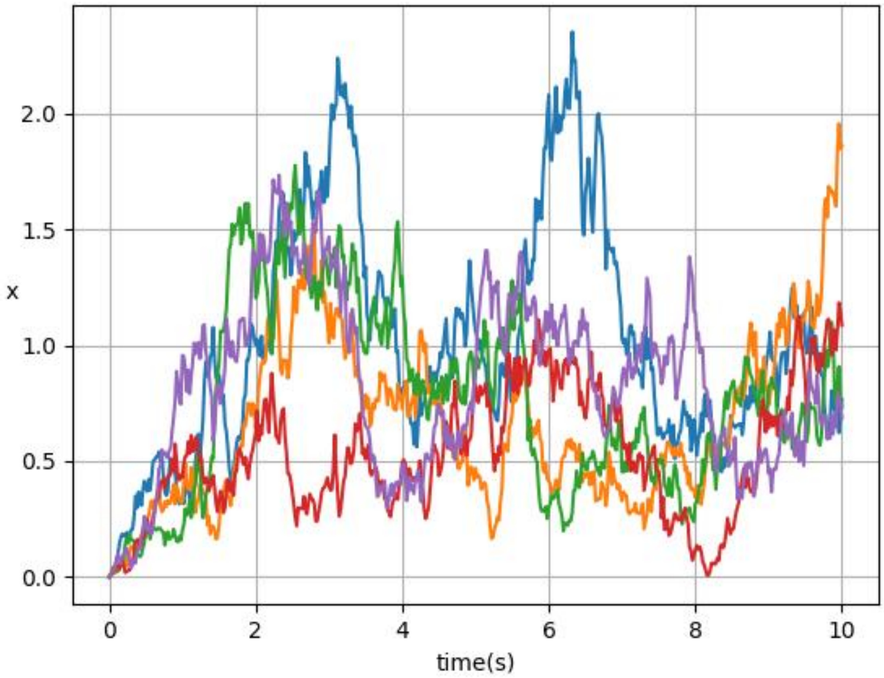

Рисунок 2 - Реализация диффузионного процесса с экспоненциальным распределением по сечению

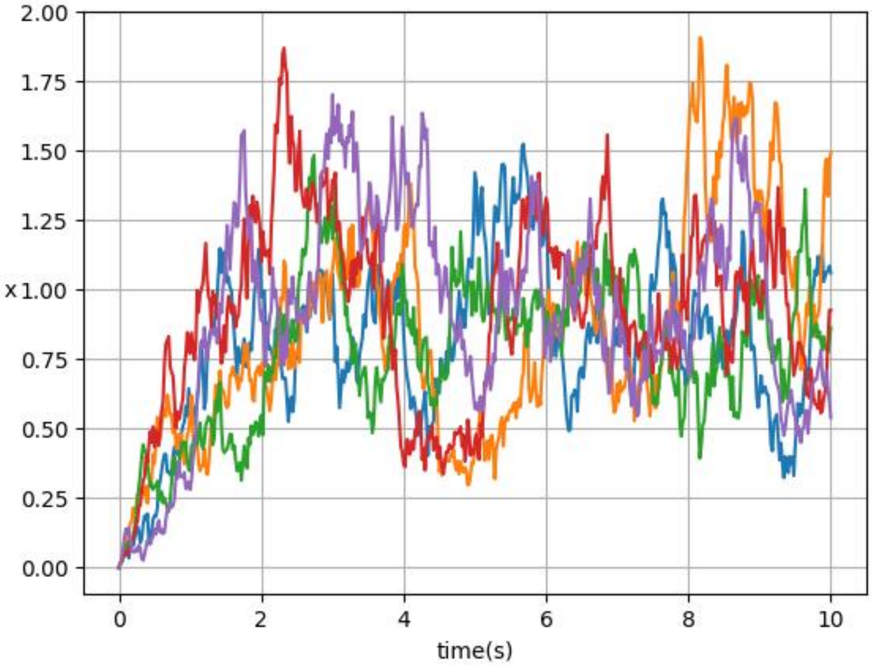

Рисунок 3 – Реализация диффузионного процесса с распределением Вейбулла-Гнеденко по сечению для k=1.5

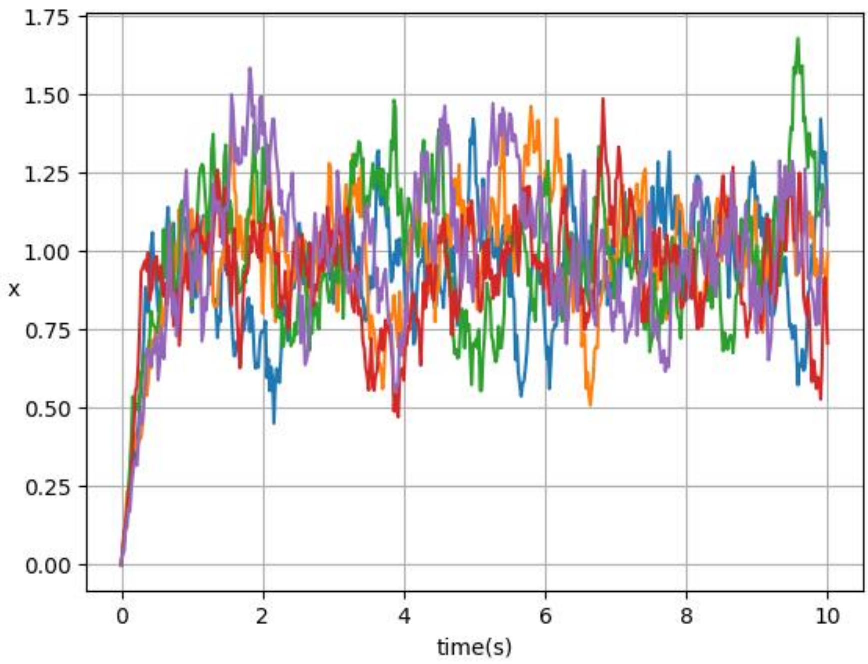

Рисунок 3 – Реализация диффузионного процесса
с распределением Вейбулла по сечению для k=5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части работы продемонстрирован метод и техника построения хаотических отображений с заданным (обратимым!) законом распределения.

Во второй части работы на конкретном примере показано, каким образом синтез негауссовских диффузионных процессов можно осуществить для заданного вероятностного распределения в сечении процесса посредством соответствующего нелинейного преобразования шага-приращения базового винеровского процесса. Динамика процесса определяется значениями вероятностных распределений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.

2. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. – 88 с.
3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
4. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М. : Мир, 1984. 528 с.
5. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М. : Мир, 1988. 240 с.
6. *Lasota A., Mackey M.C*. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 360 с.
7. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М. : Мир, 1969. 239 с.
8. *Гласс Л.,Мэки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.:Мир, 1991. 248с.
9. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. В 3т. Т.2: Получисленные алгоритмы. 3-е изд. – М.: Вильямс, 2000.-832 с.
10. *Weibull W.* A statistical distribution function of wide applicability", J. Appl. Mech.-Trans. ASME. 1951. Vol. 18, no. 3. Pp. 293–297.
11. *Dobson B.* The Weibull analysis handbook. ASQ Quality Press, 2006. 167 p.
12. *Rinne H.* The Weibull distribution. A Handbook. CRC Press, 2009. 762 p.
13. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. В 2-х тт. М. : Фазис, 1998. Т. 1. 512 с. Т. 2. 544 с.
14. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М. : Сов. радио, 1961. 558 с.
15. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М. : Сов. радио, 1977. 488 с..
16. *Гихман И.* И. Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с
17. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М. : Мир, 1987. 400 с.
18. *Портенко Н. И. , Скороход А. В. , Шуренков В. М.* Марковские процессы / Теория вероятностей–4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. М. :ВИНИТИ, 1989. Т. 46, вып. 2. С. 5–245.
19. *Миллер Б. М., Панков А. Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 . 320 с.