

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Метод повышения точности расчета старшего показателя  
Ляпунова по сигналам нейронных моделей**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 4032 группы  
направления 03.03.03 Радиофизика  
Института физики  
Мандровой Людмилы Александровны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

О.Н. Павлова

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

Г.И. Стрелкова

Саратов 2022 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Динамические характеристики хаотических колебаний, такие как Ляпуновские показатели (ЛП), широко применяются для количественной оценки режимов функционирования сложных систем в различных модельных и экспериментальных исследованиях. Если известна математическая модель, то эти величины можно оценить с любой заданной точностью. Хотя ЛП также могут быть вычислены по скалярным временным рядам, это менее точная процедура из-за нескольких ограничений применяемых алгоритмов [1]. Теоретической основой для такого анализа является реконструкция динамических систем, которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между восстановленным и исходным аттракторами. Качество реконструкции зависит от объема выборки, точности записи данных, шага дискретизации и т.д. Все эти факторы влияют на полученные результаты. В частности, короткие наборы данных и наличие шума в экспериментальных временных рядах могут привести к значительным вычислительным ошибкам и неправильной характеристике сложной динамики.

Основным ограничением подхода Вольфа [1], который обычно используется для оценки старшего показателя Ляпунова (СЛП)  $\lambda_1$ , является наличие ошибок ориентации векторов возмущений, которые возникают из-за того, что конечное число выборок не позволяет сохранить направление максимального расхождения траекторий при перенормировке. Такие ошибки обычно уменьшают значение  $\lambda_1$ . При сокращении доступной информации количественная оценка динамических характеристик по записанным данным становится более сложной. Это имеет место, например, при рассмотрении точечных процессов, в которых информация о динамике системы содержится во временах стереотипных событий. Типичными примерами являются последовательность межспайковых интервалов (МИ) между событиями генерации импульсов нейронами или последовательность моментов времени, когда траектория фазового пространства, принадлежащая хаотическому аттрактору, возвращается в сечение Пуанкаре. Извлечение динамики из таких

наборов данных осложняется потерей информации о динамике системы в промежутках между происходящими событиями. Более того, точечные процессы связаны с неравномерной выборкой, что может создать дополнительные трудности в рамках стандартного подхода к оценке СЛП. В недавнем прошлом широко обсуждалась возможность использования точечных процессов для количественной оценки метрических и динамических свойств хаотических аттракторов [2, 3]. Тем не менее, остаются открытыми вопросы, связанные с возможностью реконструкции с использованием последовательностей МИ, содержащих шум.

**Целью выпускной квалификационной работы** является поиск путей улучшения количественного описания сложной динамики автоколебательных систем по зашумленным точечным процессам.

**Материалы исследования.** Исследования проводились, используя систему Рёсслера в качестве источника хаотических колебаний и несколько вариантов нейронных моделей.

Выпускная квалификационная работа содержит введение, две главы (1. Теоретические сведения; 2. Результаты исследований), заключение и список использованных источников. Общий объем работы 36 стр.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Теоретические сведения.** В работе рассмотрены несколько моделей генерации нейронных потенциалов действия (спайков) [4, 5], в частности, обобщенная модель типа «накопление-сброс», которая представляет собой простой механизм, производящий один импульс (спайк), когда интеграл от входного сигнала  $S(t)$

$$V(t) = \int_0^t S(t') dt' \quad (1)$$

достигает порогового значения  $\Theta$ . После такого события значение интеграла (1) обнуляется. Времена генерации спайков  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , используются для получения серии МИ  $I_i = T_{i+1} - T_i$ , рассматриваемой в дальнейшем анализе.

При высокой скорости генерации спайков значение  $V(t)$  может быть найдено на основе применения метода прямоугольников при численном интегрировании, а связь между МИ и входным сигналом  $S(t)$  описывается уравнением

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t)dt = \Theta \approx S(T_i)I_i \rightarrow S(T_i) = \Theta/I_i \quad (2)$$

Таким образом, входной сигнал может быть восстановлен как нелинейное преобразование последовательности МИ.

Другой моделью являлась модель «накопление-сброс» Маккея-Гласса, которая описывает динамику пороговой системы, производящей периодические срабатывания (генерацию спайков) без внешних воздействий. Управляющий сигнал изменяет пороговое значение, что приводит к частотной модуляции скорости генерации импульсов. Напряжение в этой модели описывается линейной функцией

$$V(t) = \alpha t + \beta. \quad (3)$$

$V(t)$  растет, пока не пересечет значение  $S(t) = x(t) + \Theta$ , где  $\Theta = 10$  - пороговое значение при отсутствии управляющего сигнала  $x(t)$ , а  $V(t)$  обнуляется после такого события. Для достижения более высокой точности определения времен генерации спайков  $T_i$ , шаг интегрирования уменьшается в их окрестности, как и в обобщенной модели НС. Если  $\alpha$  относительно мало, хотя предсказуемость все еще присутствует, динамические характеристики управляющего сигнала можно вычислить по последовательностям МИ, взяв большие наборы данных. Вторым параметр ( $\beta$ ) часто выбирается равным нулю. Соотношение между МИ  $I_i$  и различными пороговыми значениями  $S(T_i)$  в этом случае описывается следующим образом:

$$S(T_{i+1}) = \alpha I_i. \quad (4)$$

Модель НС с диссипацией является расширением обобщенной модели, которая включает диссипативный член  $-\sigma V$ , описывающий спад мембранного потенциала до состояния покоя, когда пороговый уровень не достигается.

Это затухание характеризуется параметром  $\sigma$ . Полученное уравнение для напряжения

$$dV/dt = -\sigma V + S_0 + S(t) \quad (5)$$

включает в себя входной сигнал  $S(t) = \gamma(x(t) + I_0)$ . Генерация импульса (спайка) происходит, когда  $V(t)$  пересекает пороговое значение  $\Theta$ . Значения параметров выбраны следующие:  $\sigma = 0,5$ ,  $S_0 = 0,4$ ,  $\gamma = 0,154$ ,  $\Theta = 1$ .

Взаимосвязь между МИ и выборками входного сигнала  $S_i = S(T_i)$  является более сложной, чем в предыдущих примерах:

$$S_0 + S_i = \frac{\theta}{I_i} \exp\left(\sigma \frac{I_i}{2}\right). \quad (6)$$

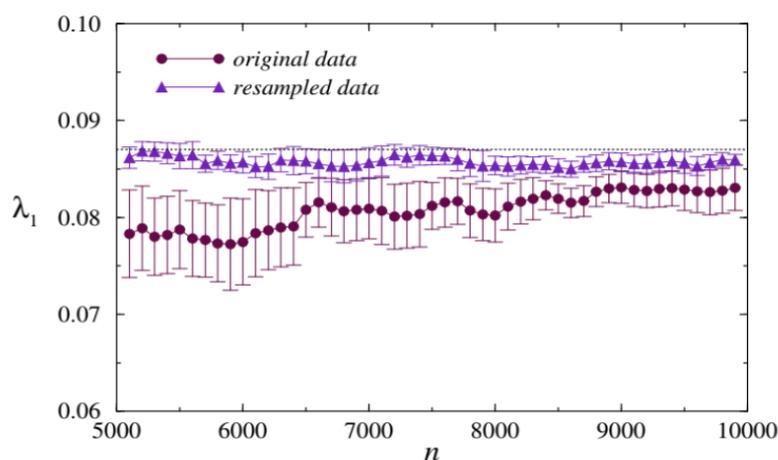
Предыдущие примеры демонстрировали генерацию одиночных импульсов (спайков напряжения) для случая хаотического входного сигнала, описываемого уравнениями Рёсслера в слабом (фазово-когерентном) хаотическом режиме. Чтобы подтвердить способность извлечения информации о динамике из точечных процессов для более сложных режимов, была рассмотрена модель генератора пачек импульсов (бёрстов), который демонстрирует колебания с двумя различными временными масштабами и, следовательно, бимодальным распределением временных интервалов между отдельными импульсами. С этой целью выбрана модель  $\beta$ -клетки, которая определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (-I_{Ca} - I_K - g_P P(V - V_K)) / \tau, \\ \frac{dn}{dt} &= \mu(n_\infty - n) / \tau, \\ \frac{dP}{dt} &= (P_\infty - P) / \tau_P, \\ I_{Ca}(V) &= g_{Ca} m_\infty (V - V_{Ca}), \\ I_K(V, n) &= g_K n (V - V_K), \\ x_\infty &= \frac{1}{1 + \exp((Vx - V) / \phi x)}, \\ x &= m, n, P. \end{aligned} \quad (7)$$

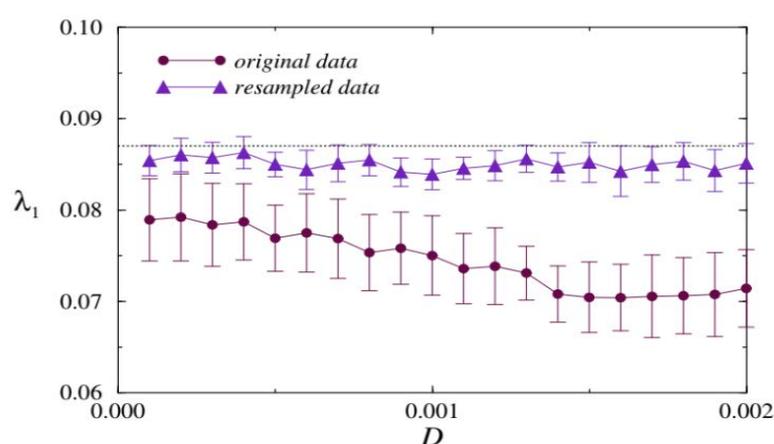
Переменные  $V$ ,  $n$  и  $P$  описывают изменения мембранного напряжения, доли калиевых каналов и концентрацию кальция, соответственно. Значения параметров были выбраны следующие:  $g_{Ca} = 3.6$ ,  $g_K = 10.0$ ,  $g_P = 4.0$ ,  $\tau = 20$  мс,  $\tau_P = 35$  с,  $V_{Ca} = 25$  мВ,  $V_K = -75$  мВ,  $V_m = -20$  мВ,  $V_n = -16$  мВ,  $V_P = -40$  мВ,  $\phi_m = 12$  мВ,  $\phi_n = 5.6$  мВ,  $\phi_P = 10$  мВ и  $\mu = 0.85$ . Модель (7) демонстрирует последовательность импульсов без внешнего воздействия с изменяющимися интервалами  $I_i$  между этими событиями.

**Результаты исследований.** В случае обобщенной модели НС мы можем заранее предположить, что переход к сигналу с равномерной выборкой улучшает оценку СЛП, особенно если не выполняется условие высокой скорости генерации спайков. В связи с этим ожидается снижение погрешности второго подхода к реконструкции (рисунок 1(а)). Тем не менее, необходимо упомянуть следующие важные моменты. Помимо больших вычислительных ошибок, реконструкция на основе исходной последовательности МИ характеризуется более высокой вариабельностью оцениваемых значений при изменении алгоритмических параметров (здесь я рассматриваю размерность вложения, изменяющуюся в диапазоне [5, 8]). Другая проблема заключается в том, что вычислительные ошибки уменьшаются с увеличением объема данных. Это соответствует результатам, полученным для низкой скорости генерации спайков, где увеличенные наборы данных уменьшали эффекты недооценки СЛП.

Реконструкция на основе сигнала с равномерной выборкой обычно обеспечивает более стабильные значения, которые в меньшей степени зависят от алгоритмических параметров (в дополнение к размерности вложения учитывалось изменение других параметров, например, размера вектора возмущения, продолжительности времени между процедурами перенормировки и т.д.).



(a)



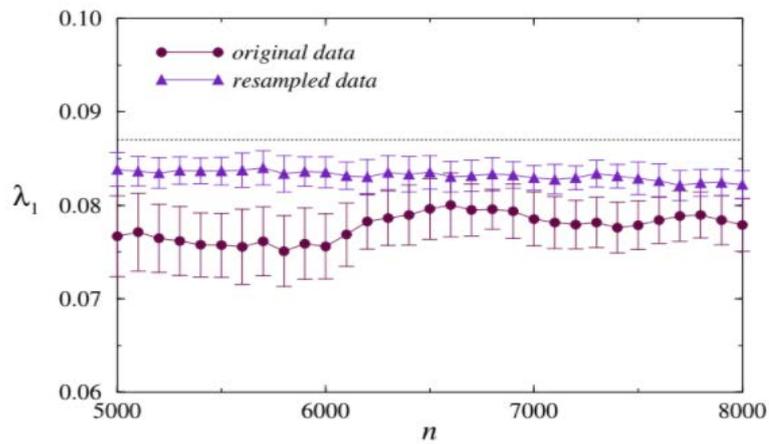
(b)

Рисунок 1 – Зависимости  $\lambda_1$  от (а) объема выборки и (б) интенсивности аддитивного шума для модели НС

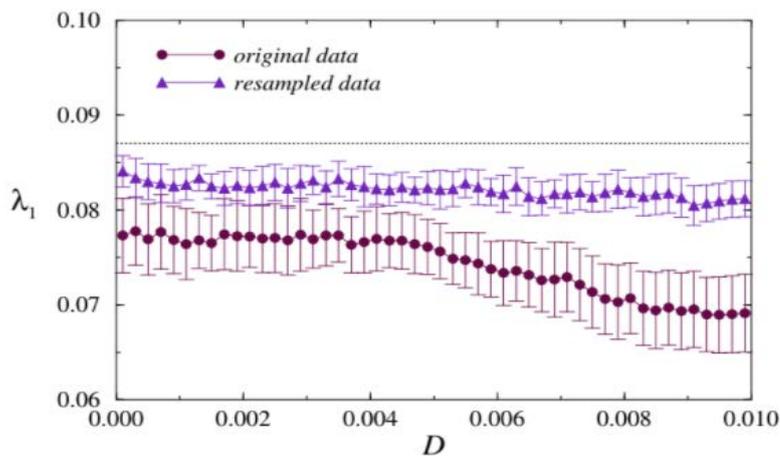
Анализ модели НС Маккея-Гласса подтверждает вывод, сделанный для обобщенной модели НС (рисунок 2). Обратите внимание, что точность вычисления  $\lambda_1$  и распределение вычисленных значений зависят от нескольких факторов, включая частоту генерации импульсов, объем данных и т.д. В рассматриваемом примере реконструкция на основе сигналов с равномерной выборкой приводит к большей относительной ошибке ( $E_\tau$ ) по сравнению с обобщенной моделью НС (для  $n = 5000$ , например,  $E_\tau \approx 3,5\%$  в отличие от  $E_\tau \approx 1,7\%$ ), но эта ошибка увеличивается для обоих подходов. По аналогии с обобщенной моделью НС, большие наборы данных улучшают оценки, выполненные с помощью первого метода реконструкции (рисунок 2(a)). Для

второго подхода это также подтверждается, но необходимо учитывать увеличенное количество отсчетов.

Зависимости СЛП от интенсивности аддитивного шума в исходной последовательности МИ (рисунок 2(б)) аналогичны тем, которые показаны на рисунке 1(б). Снова первый подход более чувствителен к аддитивным шумам. При дальнейшем увеличении интенсивности шума  $D$  такое поведение изменяется, и уменьшение  $\lambda_1$  сменяется его ростом. Однако случай, когда вызванная шумом расхожимость фазовых траекторий превосходит их разбегание, вызванное детерминированной динамикой, выходит за рамки данного исследования.



(a)



(b)

Рисунок 2 – Зависимости  $\lambda_1$  от (а) количества отсчетов (объема выборки) и (б) интенсивности аддитивного шума для модели НС Маккея-Гласса.

Здесь рассматриваются малые шумы, которые мешают оценке динамических особенностей анализируемых колебательных режимов, но детерминированная динамика системы Ресслера доминирует над случайными факторами. Распределение вычисленных значений  $\lambda_1$  более узкое для второго подхода реконструкции, и поэтому этот подход снова обеспечивает более стабильные результаты, когда алгоритмические параметры выбираются произвольно. Средняя ошибка вычисления  $\lambda_1$  значительно меньше для данных с равномерной выборкой, выполненной в ходе интерполяции. В частности, получены следующие результаты для нескольких интенсивностей шума  $D$ : 11,2% и 5,3% ( $D = 2 \cdot 10^{-3}$ ); 12,6% и 5,7% ( $D = 5 \cdot 10^{-3}$ ); 19,8% и 7,1% ( $D = 10^{-2}$ ) (рисунок 2(б)).

В отличие от рассмотренных примеров, где записанная последовательность МИ позволяет восстановить входной сигнал, а ошибки этого восстановления возникают из-за приближенного вычисления интегралов, модель НС с диссипацией представляет собой более сложный случай, когда трансцендентное соотношение между входным сигналом и выходным точечным процессом не допускает точного перехода от МИ к отсчетам  $S(t)$ . Вероятно, это основная причина менее точных оценок СЛП при втором подходе к реконструкции. Кроме того, следует отметить более сложную динамику модели НС с диссипацией по сравнению с обобщенной моделью НС. В результате оба подхода дают более высокие ошибки выполненных оценок, а значения  $\lambda_1$  могут существенно различаться в зависимости от параметров алгоритма. Тем не менее, преимущества использования сигналов с равномерной выборкой и уменьшение ошибок ориентации за счет добавления точек данных были подтверждены. Как и ожидалось, более обширные наборы данных обеспечивают лучшие оценки для обоих подходов. Эффекты шума визуально менее выражены, но относительные изменения  $\lambda_1$  меньше для реконструкции на основе равномерной выборки (7,6% и 2,9% соответственно), как и средняя ошибка

вычисления  $\lambda_1$ : 21,8% и 7,5% ( $D = 10^{-3}$ ); 24,1% и 8,9% ( $D = 2 \cdot 10^{-3}$ ); 28,3% и 10,7% ( $D = 3 \cdot 10^{-3}$ ).

Хотя случай генератора пачек импульсов (бёрстов) отличается от механизмов «накопление-сброс» для генерации импульсов, и вместо хаотического внешнего воздействия рассматривается внутренняя сложная динамика модели  $\beta$ -клетки, переход к сигналам с равномерной выборкой способен значительно повысить точность и стабильность численных оценок при использовании алгоритма Вольфа. Используя тот же объем данных, мы не обнаружили очевидных изменений СЛП для первого метода реконструкции. Следовательно, необходимо использовать более обширные наборы данных, чтобы ожидать лучшей характеристики рассматриваемого динамического режима по последовательностям МИ. Второй метод реконструкции приводит к лучшим оценкам. Этот метод также более устойчив к малым интенсивностям аддитивного шума, добавляемого к выходному точечному процессу, и обеспечивает более узкое распределение вычислительных ошибок, подтверждая вывод о преимуществах перехода к сигналам с равномерной выборкой. По-прежнему, средняя ошибка вычисления  $\lambda_1$  принимает значительно меньшие значения для данных с равномерной выборкой: 17,8% и 5,6% ( $D = 10^{-3}$ ); 18,6% и 7,8 ( $D = 2 \cdot 10^{-3}$ ); 19,3% и 8,2% ( $D = 3 \cdot 10^{-3}$ ).

Таблица 1 суммирует выполненные оценки и показывает, что в отличие от различий между двумя подходами в зависимости от используемой модели (самые сильные различия возникают для обобщенной модели НС, а минимальные различия возникают для модели НС с диссипацией), реконструкция на основе сигналов с равномерной выборкой превосходит подход, в котором аттрактор восстанавливается по исходной последовательности МИ, рассматривая соответствующие интервалы как координаты в фазовом пространстве.

Таблица 1: Сравнительный анализ относительных изменений  $\lambda_1$ , оцененных по зашумленным последовательностям МИ.

Модель	Относительные изменения $\lambda_1$ (в %)	
	Метод 1	Метод 2
Обобщенная модель НС	8.3	0.6
Модель НС Маккея-Гласса	9.4	3.2
Модель НС с диссипацией	7.5	2.9
Модель генерации бёрстов	4.2	0.9

Таким образом, в этой работе изучена проблема анализа динамических характеристик хаотических режимов динамики по последовательностям МИ, смоделированным различными типами нейронных моделей, описывающих генерацию спайков. Хотя недавние исследования в области реконструкции динамических систем создали теоретическую основу для этой техники не только для фазовых переменных, полученных с постоянным шагом по времени, но и для динамических систем с неравномерной дискретизацией, существующие теоремы не учитывают случай конечных выборок и наличие измерительного шума в точечных процессах.

Последовательности МИ уже содержат сокращенную информацию о динамике системы; даже если не учитываются конечные объемы данных. Ожидается, что при учете дополнительных ограничений точность выполненных оценок будет ниже. В связи с этим возможные способы повышения качества реконструкции могут быть применены для достижения большей точности количественного определения характеристик хаотических аттракторов из доступных точечных процессов. Здесь я обсудила два варианта реконструкции: (1) простой подход с использованием последовательности МИ с задержкой и (2) реконструкция на основе перехода к сигналам с равномерной выборкой, которая включает в себя восстановление входного сигнала (по крайней мере, приблизительно) для

моделей НС с хаотическим внешним воздействием или мгновенной частоты колебаний для автономной автоколебательной динамики хаотических систем с генерацией бёрстов. Несмотря на индивидуальные различия в механизмах, ответственных за генерацию импульсов, полученные результаты согласуются и демонстрируют несколько преимуществ второго подхода к реконструкции.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

- [1] Wolf, A. Determining Lyapunov exponents from a time series / A.Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano // *Physica D.* – 1985. – Vol. 16. – P. 285-317.
- [2] Sauer, T. Reconstruction of dynamical system from interspike intervals / T. Sauer // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. – Vol. 72. – P. 3911–3914.
- [3] Sauer, T. Interspike interval embedding of chaotic signals / T. Sauer // *Chaos.* – 1995. – Vol. 5. – P. 127–132.
- [4] Pavlov, A. N. Extracting dynamics from threshold-crossing interspike intervals: possibilities and limitations / A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva, E. Mosekilde, V.S. Anishchenko // *Phys. Rev. E.* – 2000. Vol. 61. – P. 5033–5044.
- [5] Pavlov, A. N. Chaotic dynamics from interspike intervals / A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva, E. Mosekilde, V.S. Anishchenko // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 63. – P. 036205.