

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Пространственно-временная динамика ансамбля нелокально-  
связанных логистических и кубических отображений при шумовой  
модуляции параметра связи**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 4032 группы  
направления 03.03.03 Радиофизика  
Института физики  
Никишиной Наталии Николаевны

Научный руководитель  
профессор, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Т.Е. Вадивасова

Зав. кафедрой радиофизики  
и нелинейной динамики,  
д.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_ Г.И. Стрелкова

Саратов 2022 г.

Одной из важных проблем нелинейной динамики является исследование сложных режимов поведения, формирования пространственных структур и эффектов синхронизации в ансамблях и сетях нелинейных элементов с различными видами взаимодействия. При нелокальном характере связи элементов друг с другом могут возникать разнообразные сложные пространственно-временные структуры, в том числе так называемые химерные состояния<sup>123</sup>. Такие структуры представляют собой особый вид частичной синхронизации, при которой наблюдается сочетание когерентных кластеров, кластеров с синхронным поведением, и некогерентных кластеров, кластеров с полностью несогласованными колебаниями. Возникновение таких структур происходит при различном распределении силы нелокальной связи между осцилляторами в процессе перехода системы от режима полной синхронизации к пространственно-временному хаосу. Химерные состояния наблюдались экспериментально в системах различной природы и могут играть существенную роль в динамике реальных систем.

**Актуальной задачей** анализа динамики сложных систем является задача управления формированием сложных кластерных структур, включая химерные состояния, в многослойных сетях. Интерес к проблеме управления структурами обусловлен практическими задачами в областях нейродинамики, экологии, эпидемиологии, транспортных сетей, социологии и др. При исследовании поведения сложных систем необходимо учитывать важную роль, которую могут играть случайные флуктуации (шумы), в формировании и разрушении сложных динамических режимов и пространственных структур. Шумы неизбежно присутствуют в реальной системе любой природы. Влияние шума в режиме химерных состояний пока мало исследовано, однако шумовая модуляция параметров межслойной связи в двухслойной сети логистических

---

<sup>1</sup> Y. Kuramoto, D. Battogtokh, *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* Vol.4, 380 (2002)..

<sup>2</sup> M.J. Panaggio, D.M. Abrams, *Nonlinearity.* Vol. 28, R67 (2015).

<sup>3</sup> A. Zakharova, *Chimera patterns in networks. Interplay between dynamics, structure, noise, and delay.* Springer Nature Switzerland AG, 2020.

отображений при определенных условиях может приводить к синхронизации химерных состояний, наблюдающихся в двух слоях без связи<sup>4</sup>. Таким образом, шум с регулируемыми характеристиками может служить инструментом управления пространственно-временным поведением сложных сетей.

**Целью выпускной квалификационной работы** является исследование эволюции химерных состояний в ансамблях нелокально связанных логистических и кубических отображений при модуляции коэффициентов связи цветным гауссовым шумом, а также установление возможности контроля пространственных структур при вариации параметров шумовой модуляции. Для достижения данной цели ставились следующие задачи – наблюдение эволюции мгновенных пространственных профилей при изменении управляющих параметров шума и типа шумовой модуляции; построение карт режимов, отображающих влияние шумовой модуляции на динамические режимы в ансамбле.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. **Во введении** проведен анализ состояния проблемы, показана ее актуальность и сформулирована цель работы. **В первой** главе приводятся модели и методы численного исследования. Исследуемые ансамбли представляют собой кольцо логистических отображений и кольцо кубических отображений с нелокальным взаимодействием элементов при наличии случайной модуляции параметров связи. Рассматриваются два типа шумовой модуляции: 1) к каждому коэффициенту связи добавляется независимая случайная компонента; 2) все коэффициенты связи модулируются одним и тем же шумовым воздействием. **Во второй** главе приводятся результаты численных исследований. Показана эволюция химерного состояния в кольцах логистических и кубических отображений с независимыми источниками шумовой модуляции параметров связи, а также с общей шумовой модуляцией параметров связи. **В третьей** главе приводится сравнение

---

<sup>4</sup> Т. Е. Vadivasova, А. V. Slepnev, А. Zakharova, Chaos. Vol.30, 091101 (2020).

результатов численных исследований логистических и кубических отображений. В заключении сформулированы главные результаты работы. Список цитирования включает 23 ссылки.

Полученные в проведенных в рамках ВКР результаты, частично опубликованы в работе N.N. Nikishina, E.V. Rybalova, G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, Destruction of cluster structures in an ensemble of chaotic maps with noise-modulated nonlocal coupling // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol.27, No.2. pp. 243–252.

### Краткое содержание работы

Исследуемая система с независимыми случайными компонентами коэффициентов связи описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} x_j(n+1) &= f(x_j(n)) + \frac{1}{2P} \left( \sigma + D \sqrt{1 - \frac{\gamma}{2}} y_j(n) \right) \sum_{k=j-P}^{j+P} [f(x_k(n)) - f(x_j(n))], \\ y_j(n+1) &= (1 - \gamma) y_j(n) + \sqrt{2\gamma} \xi_j(n), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $j$  – номер элемента ансамбля (дискретная пространственная координата),  $n$  – дискретное время,  $x_j(n+1)$  – динамическая переменная,  $N$  – общее число элементов в ансамбле,  $f(x_j(n))$  – правая часть отображения, описывающая динамику элементов в изолированном случае. Граничные условия являются периодическими:  $x_{j \pm N}(n) = x_j(n)$ . Нелокальная связь для каждого элемента осуществляется с  $P$  соседями с каждой стороны. Сила связи каждого элемента с соседями характеризуется одинаковой для всех элементов постоянной компонентой  $\sigma$  и шумовой модуляцией, задаваемой независимыми источниками дискретного цветного шума  $y_j(n)$  с одинаковой интенсивностью  $D$ .

Система с общим случайным воздействием на связь описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_j(n+1) &= f(x_j(n)) + \frac{1}{2P} \left( \sigma + D \sqrt{1 - \frac{\gamma}{2}} y(n) \right) \sum_{k=j-P}^{j+P} [f(x_k(n)) - f(x_j(n))], \\ j &= 0, 1, \dots, N-1, \\ y(n+1) &= (1 - \gamma) y(n) + \sqrt{2\gamma} \xi(n). \end{aligned} \quad (2)$$

Эта модель аналогична (1), но в ней во всех слагаемых связи используется только один источник цветного гауссова шума  $y(n)$  с интенсивностью  $D$ , который задаётся уравнением, содержащим источник дискретного белого шума  $\xi(n)$  со стандартным гауссовым распределением.

Характеристики дискретного цветного шума. Пусть случайная последовательности  $y(n)$  описывается уравнением

$$y(n+1) = (1-\gamma)y(n) + \sqrt{2\gamma}\xi(n), \quad (3)$$

где  $\xi(n)$  – источник дискретного белого шума со стандартным гауссовым распределением (среднее значение распределения равно нулю, а дисперсия единице). Среднее значение  $\langle y(n) \rangle$  равно нулю, дисперсия равна единице. Интенсивность шума  $D$  и параметр  $\gamma$ , определяющий ширину спектра шума, рассматриваются как управляющие и меняются в ходе исследований. При  $\gamma = 1$  источник шума  $y(n)$  становится белым.

В отсутствии шумовой модуляции связи ( $D = 0$ ), на множестве случайных начальных значений  $x_j(0) \in [0,1]$  были определены начальные условия, которым соответствует установившийся режим химерных состояний. Значения переменных  $x_j$  в этом установившемся режиме были зафиксированы в качестве начальных состояний элементов ансамбля для дальнейших исследований.

В первом случае в обеих моделях элементы ансамбля при отсутствии связи описываются идентичными логистическими отображениями, задаваемыми функцией вида

$$f(x) = \alpha x(1-x), \quad (4)$$

где  $\alpha$  - параметр, управляющей динамикой отображения.

Фиксированные параметры: Размер слоев ансамбля  $N = 1000$ : управляющие параметры элементов  $\alpha = 3.8$  (что соответствует хаосу в логистическом отображении); постоянные параметры связи  $\sigma = 0.32$  (постоянная компонента силы связи); число связей для каждого элемента с одной стороны  $P = 300$ .

Во втором случае элементы ансамбля при отсутствии связи описываются идентичными кубическими отображениями, задаваемыми функцией вида

$$f(x) = x(\alpha - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{10}\right), \quad (5)$$

где  $\alpha$  - параметр, управляющей динамикой отображения.

Фиксированные параметры: Размер слоев ансамбля  $N = 1000$ : управляющие параметры элементов  $\alpha = 2.8$  (что соответствует хаосу в кубическом отображении); постоянные параметры связи  $\sigma = 0.45$  (постоянная компонента силы связи); число связей для каждого элемента с одной стороны  $P = 100$ .

Примеры эволюции мгновенного пространственного профиля для колец логистических и кубических отображений для независимых источников шумовой модуляции параметров связи с ростом интенсивности шумовой модуляции связи  $D$ , полученные для различных значений параметра  $\gamma$ , определяющего ширину спектра шума, приведены на Рисунках 3-4.

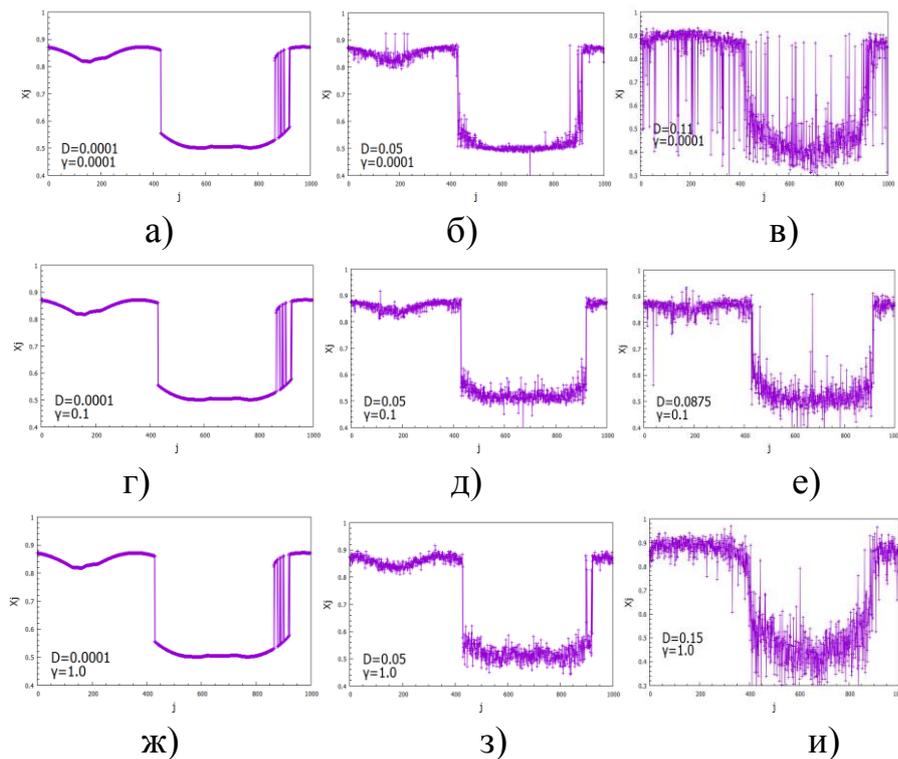


Рисунок 3. Мгновенные пространственные профили при различной ширине спектра шума (различные значения  $\gamma$ ), и различной интенсивности шума  $D$  для кольца логистических отображений с независимыми источниками шумовой модуляции параметров связи: а)  $\gamma = 0.0001$ ,  $D=0.0001$ ; б)  $\gamma = 0.0001$ ,  $D=0.05$ ; в)  $\gamma = 0.0001$ ,  $D=0.11$ ; г)  $\gamma = 0.1$ ,  $D=0.0001$ ; д)  $\gamma = 0.1$ ,  $D=0.05$ ; е)  $\gamma = 0.1$ ,  $D=0.0875$ ; ж)  $\gamma = 1.0$ ,  $D=0.0001$ ; з)  $\gamma = 1.0$ ,  $D=0.05$ ; и)  $\gamma = 1.0$ ,  $D=0.15$ , соответственно.

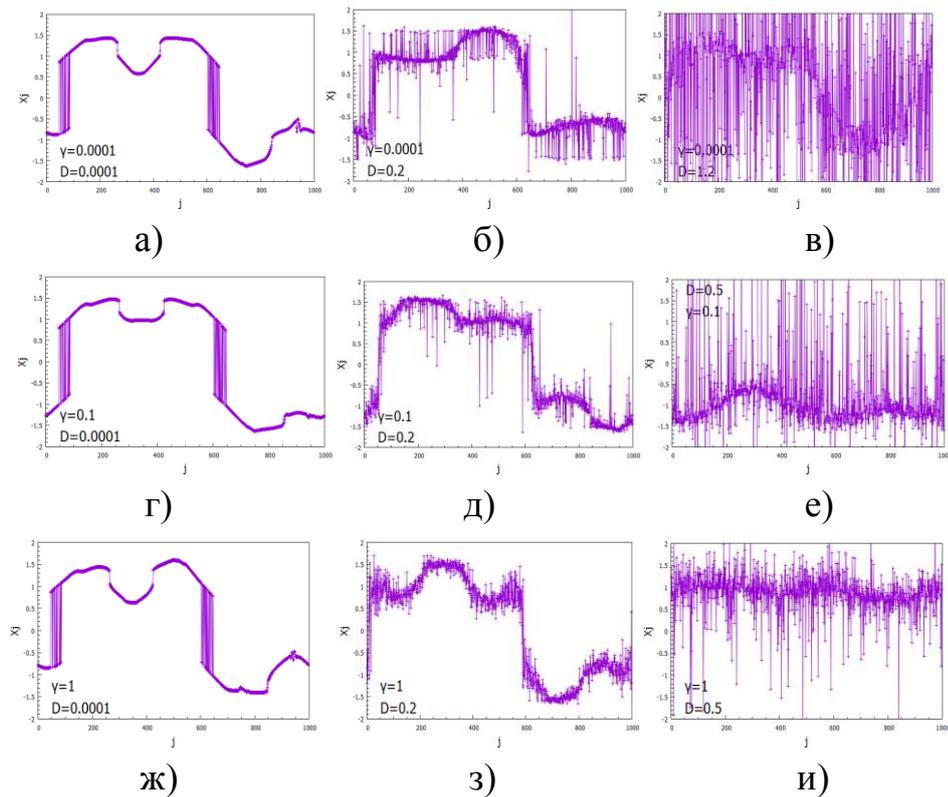


Рисунок 4. Мгновенные пространственные профили при различной ширине спектра шума (различные значения  $\gamma$ ) и различной интенсивности шума  $D$  для кольца кубических отображений с независимыми источниками шумовой модуляции параметров связи: а)  $\gamma = 0.0001$ ,  $D=0.0001$ ; б)  $\gamma = 0.0001$ ,  $D=0.2$ ; в)  $\gamma = 0.0001$ ,  $D=1.2$ ; г)  $\gamma = 0.1$ ,  $D=0.0001$ ; д)  $\gamma = 0.1$ ,  $D=0.2$ ; е)  $\gamma = 0.1$ ,  $D=0.5$ ; ж)  $\gamma = 1.0$ ,  $D=0.0001$ ; з)  $\gamma = 1.0$ ,  $D=0.2$ ; и)  $\gamma = 1.0$ ,  $D=0.5$ , соответственно.

Первый столбец на рисунках иллюстрирует мгновенные пространственные профили из области существования химеры при слабой интенсивности шумовой компоненты связи. С увеличением интенсивности шума при различной ширине спектра шума пространственные профили во втором столбце иллюстрируют подавление кластеров некогерентности исходной химеры. В третьем столбце для кольца логистических отображений представлены формы мгновенных пространственных профилей перед уходом системы на бесконечность. Для кольца кубических отображений третий столбец иллюстрирует область пространственного хаоса.

На Рисунке 5. полученные результаты представлены в виде диаграмм режимов на плоскости управляющих параметров  $\gamma - D$ . На диаграммах режимов выделены три области, обозначенные цифрами 1, 2 и 3. В области 1 наблюдается химерное состояние, подобное исходной химере, которая устанавливается без шумовой модуляции связи. В области 2 кластеры некогерентности исходной химеры подавляются действием шума, также к этой области относится наличие уединенных состояний. Область 3 соответствует уход решений системы на бесконечность для кольца логистических отображений и область пространственного хаоса для кольца кубических отображений.

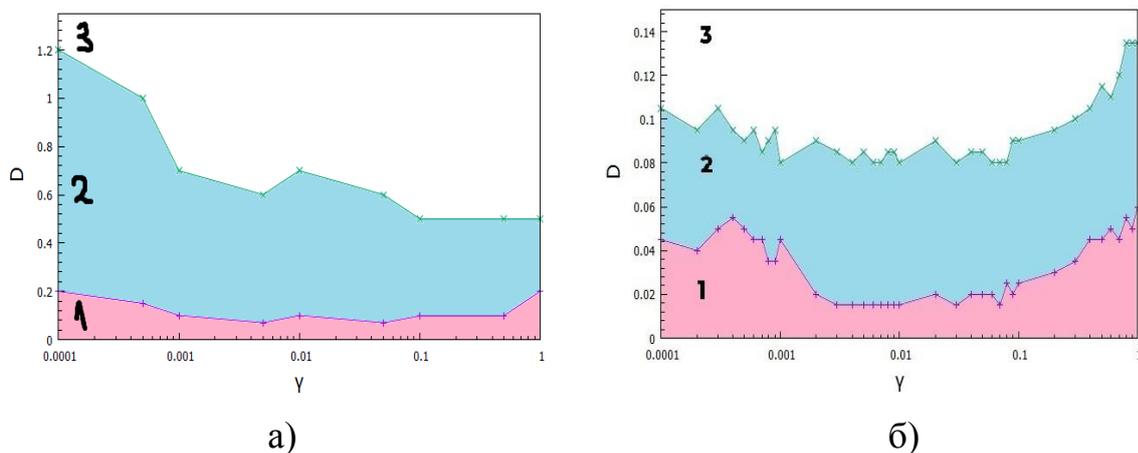


Рисунок 5. Карты режимов в кольце логистических отображений (а) и кубических отображений (б) на плоскости параметров  $\gamma - D$  в случае независимых случайных компонент коэффициентов связи: 1 – химерные состояния; 2 – область кластерной структуры с подавлением кластеров некогерентности; 3 – уход системы на бесконечность (а) и пространственный хаос (б)

Сравнивая системы логистических и кубических отображений приходим к следующим выводам: в кольце кубических отображений химерное состояние оказывается почти в два раза устойчивее к шумовому воздействию, чем в кольце с логистических отображений; в кольце кубических отображений уменьшается устойчивость системы к шумовому воздействию с переходом к широкополосному шуму, а в кольце логистических отображений устойчивость

к широкополосному шуму наоборот растет; по достижении предельного значения интенсивности шума  $D=0.1$  в кольцах различных отображений системы ведут себя по-разному.

Перейдем к рассмотрению систем под общим шумовым воздействием.

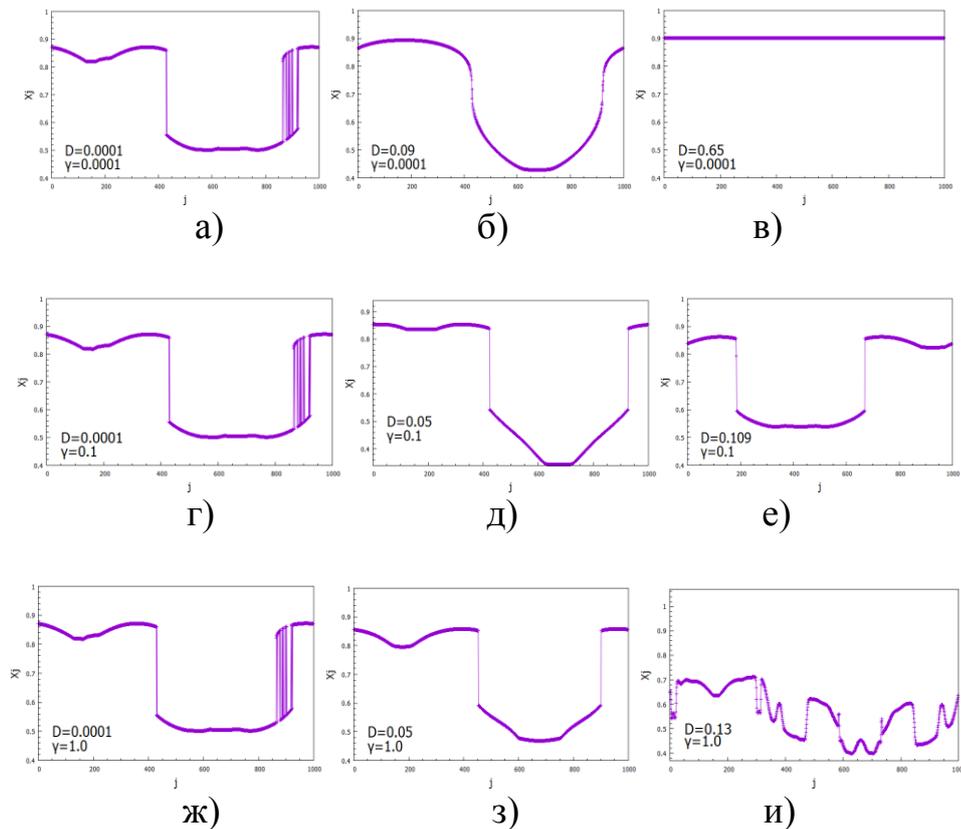


Рисунок 6. Мгновенные пространственные профили при различной ширине спектра шума (различные значения  $\gamma$ ) и различной интенсивностью шума  $D$  для кольца логистических отображений с общей шумовой модуляцией параметров связи: а)  $\gamma = 0.0001, D=0.0001$ ; б)  $\gamma = 0.0001, D=0.09$ ; в)  $\gamma = 0.0001, D=0.65$ ; г)  $\gamma = 0.1, D=0.0001$ ; д)  $\gamma = 0.1, D=0.5$ ; е)  $\gamma = 0.1, D=0.109$ ; ж)  $\gamma = 1.0, D=0.0001$ ; з)  $\gamma = 1.0, D=0.5$ ; и)  $\gamma = 1.0, D=0.13$ , соответственно

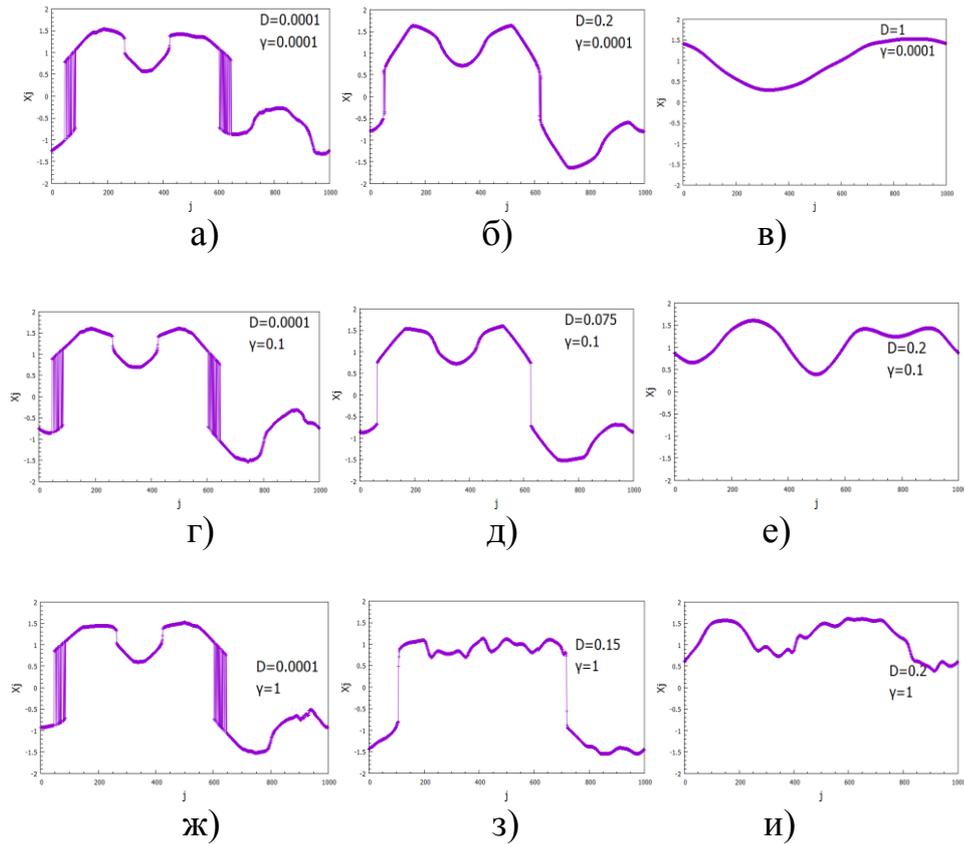


Рисунок 7. Мгновенные пространственные профили при различной ширине спектра шума (различные  $\gamma$ ) и различной интенсивностью шума  $D$  для кольца кубических отображений с общей шумовой модуляцией параметров связи: а)  $\gamma = 0.0001$ ,  $D=0.0001$ ; б)  $\gamma = 0.0001$ ,  $D=0.2$ ; в)  $\gamma = 0.0001$ ,  $D=1$ ; г)  $\gamma = 0.1$ ,  $D=0.0001$ ; д)  $\gamma = 0.1$ ,  $D=0.075$ ; е)  $\gamma = 0.1$ ,  $D=0.2$ ; ж)  $\gamma = 1.0$ ,  $D=0.0001$ ; з)  $\gamma = 1.0$ ,  $D=0.15$ ; и)  $\gamma = 1.0$ ,  $D=0.2$ , соответственно

Для малой интенсивности и малой ширины спектра шума в случае обоих колец наблюдается химерное состояние (первый столбик). При определенной интенсивности шума и для кольца и кубических и логистических отображений четко наблюдается эффект подавления кластеров некогерентности, при этом пространственная структура характеризуется кусочно-гладким пространственным профилем (второй столбик). При сильном воздействии низкочастотным шумом ( $\gamma \leq 0.01$ ) в кольце логистических отображений наблюдается эффект полной синхронизации элементов ансамбля, при большой ширине спектра система уходит на бесконечность. В кольце кубических отображений присутствует эффект частичной синхронизации с гладким пространственным профилем (третий столбик).

На диаграммах режимов, приведенных на Рисунке 8, выделены три области. В области 1 наблюдается химерное состояние, подобное исходной химере, которая устанавливается без шумовой модуляции связи. В области 2 кластеры некогерентности исходной химеры подавляются действием шума. Область 3 соответствует уходу решений системы на бесконечность для логистического кольца и область частичной синхронизации для кубического кольца.

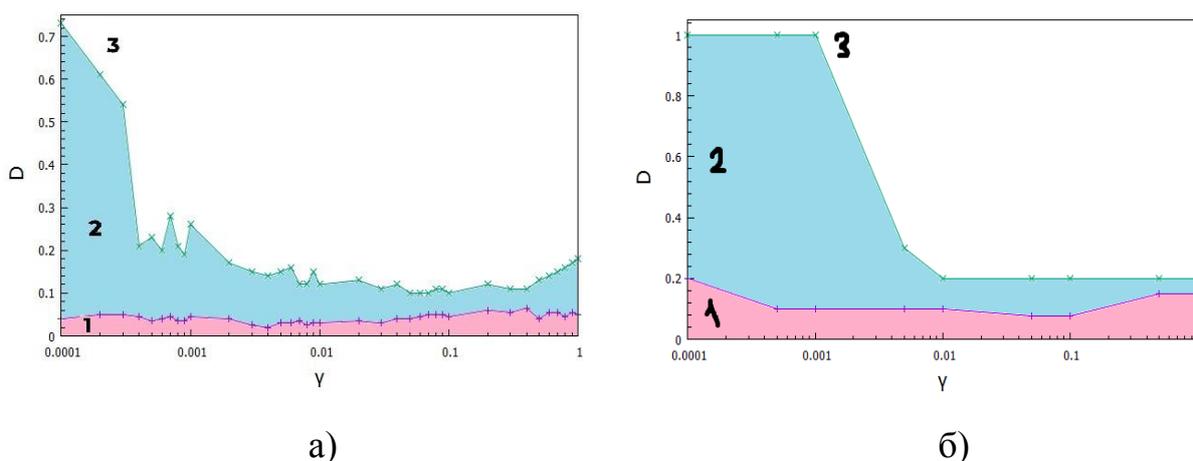


Рисунок 8. Диаграммы режимов кольца логистических отображений (а) и кубических отображений (б) на плоскости параметров  $\gamma$ - $D$  в случае общей шумовой модуляцией коэффициентов связи: 1 – химерные состояния; 2 – область кластерной структуры с подавлением кластеров некогерентности; 3 – уход системы на бесконечность (а) и частичная синхронизация (б)

Сравнивая поведения кольца логистических отображений и кольца кубических отображений, получаем, что: в системе с кубическими отображениями область существования химерных состояний оказывается в почти 2 раза больше, чем в системе с логистическими отображениями; в области 2 для обоих колец отображений характерен кусочно-гладкий пространственный профиль; в случае кольца логистических отображений явление полной синхронизации наблюдается лишь для малых значений  $\gamma$ , затем система уходит на бесконечность. Для кольца кубических отображений для любого значения ширины спектра шума при больших значениях интенсивности

шума, разного для разной ширины спектра, наблюдается явление частичной синхронизации.

Из проведенных исследований можно сделать вывод, что с помощью шумовой модуляции параметров связи можно управлять характером пространственной структуры. Подавление кластера некогерентности наблюдается и для кольца логистических, и для кольца кубических отображений при случайной модуляции параметров связи как независимыми источниками шума, так и общим шумом, причем спектральные свойства шума для получения данного эффекта оказываются несущественными. Кроме того, при независимых шумовых воздействиях с достаточно низкими частотами можно получить структуры, подобные уединенным состояниям для кольца логистических отображений, а при шумовых воздействиях с большой интенсивностью для кольца кубических отображений возможно наблюдать явление пространственного хаоса.

Однако наиболее удобно использовать для управления общее шумовое воздействие. При этом, для системы с логистическим отображением при достаточно низкочастотном цветном шуме с ростом интенсивности шумовой модуляции связи можно получить не только переход от химерного состояния к кластерной структуре с кусочно-гладким профилем, но и достичь режима полной синхронизации всех элементов ансамбля, в то время как для системы кубических отображений для любой ширины спектра шума на больших интенсивностях наблюдается частичная синхронизация. Можно заключить, что шумовая модуляция связи приводит к росту эффективного значения связи.

Как показало исследование, важную роль играет спектральный состав шумового воздействия. Поведение ансамбля хаотических элементов существенно зависит не только от интенсивности шума, но и от ширины спектра шумовой модуляции связи, а также от вида используемого отображения в системе.