

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Численный анализ диффузии в фазовом пространстве консервативных и  
близких к ним систем с дискретным временем**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 2211 группы

направления  
03.04.01 «ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА»

Институт физики

Дворцов Александр Алексеевич


Научный руководитель  
к. ф.-м.н., доцент

  
подпись, дата

А.В. Савин

Зав. кафедрой нелинейной физики

к. ф.-м.н., доцент



Е.Н. Бегинин

Саратов 2022 г.

## Содержание

Введение	3
Основное содержание работы	6
Заключение	14
Список использованной литературы	15

## Введение

Широко известно, что множество физических систем могут быть математически описаны с помощью соответствующих динамических систем. То есть их можно охарактеризовать набором величин, называемых динамическими переменными, соответствующих состоянию системы в данный момент времени, а также оператором эволюции системы, позволяющим однозначно получать значения динамических переменных в последующие моменты времени по определённому правилу, исходя из текущих значений [1]. Особый интерес представляют такие системы, в которых малое изменение начальных значений с течением времени будет приводить к значительным изменениям состояния, и при этом все состояния, проходимые системой, будут находиться в ограниченной области фазового пространства. Таким образом, малое облако начальных условий с течением времени будет «расплываться» по всему фазовому объёму, а значит динамику заданного с конечной точностью состояния системы, в конце концов, нельзя будет предсказать. А возможность предсказывать события является одним из самых значимых достоинств в научном подходе к изучению мира, что обуславливает, с этой фундаментальной точки зрения, высокую актуальность изучения таких систем и перехода к подобной динамике. Такое поведение называется хаотическим [2]. В этом случае отслеживание поведения одной траектории не позволяет получить информацию о поведении системы в целом. Одним из направлений исследования в таком случае становится анализ динамики ансамбля начальных условий. В случае хаотического режима в консервативных системах его динамика в первом приближении может быть описана моделью случайных блужданий [3], в связи с чем стало традиционным использование термина «диффузия» для описания этого процесса. При более аккуратном анализе оказывается, однако, что процесс диффузии точки в фазовом пространстве значительно более сложен, чем «простое» случайное блуждание. Поэтому исследование диффузии является одной из важных задач нелинейной динамики консервативных систем [8-10].

Также динамические системы подразделяются на консервативные (гамильтоновы) и диссипативные. Консервативными называют такие системы, в которых произвольно взятый фазовый объём с течением времени сохраняется, хотя может изменять форму. Диссипативными в теории динамических систем называют системы, для которых выполняется противоположное утверждение, но зачастую подразумевается, что фазовый объём будет со временем уменьшаться. Важным отличием диссипативных систем является, то, что в системе, предоставленной самой себе в течение долгого времени, установившийся режим динамики, не будет зависеть от начальных условий. То есть в системе будет существовать аттрактор.

В Гамильтоновых системах при добавлении сколь угодно малого возмущения происходит разрушение траекторий, проходящих через седловые особые точки (сепаратрис). В случае периодических возмущений это разрушение будет носить стохастический характер. При этом в окрестности сепаратрисы будет наблюдаться область стохастической динамики, что получило название стохастического слоя. Эти узкие стохастические слои могут пересекаться в фазовом пространстве, при этом образуя стохастическую паутину, по которой возможно блуждание изображающей точки. Существование такой сети каналов возможно только с числом степеней свободы  $N \geq 3$  (6-мерное фазовое пространство) и было предсказано Арнольдом, поэтому получило название «диффузии Арнольда». Однако в случае вырождения, размерность фазового пространства можно снизить до 3.

Одним из простейших для изучения и, тем не менее, сохраняющих большинство характерных эффектов, связанных с хаотическим поведением, видов динамических систем является дискретное отображение, поскольку во множестве случаев для понимания динамики системы совершенно необязательно знать значения динамических переменных в каждый момент времени как с потоковыми системами, а достаточно ограничиться счётным набором значений в определённые моменты.

Одним из наиболее интересных отображений с фундаментальной точки зрения является отображение-паутина. Она возникла при анализе движения заряженных частиц в магнитном и поле перпендикулярного волнового пакета с большим числом

гармоник [6,7], но затем оказалось, что эта задача связана блужданиями на структурах, геометрией квазикристаллов, симметрией покрытия плоскости и проч.[5].

Целями настоящей работы являются:

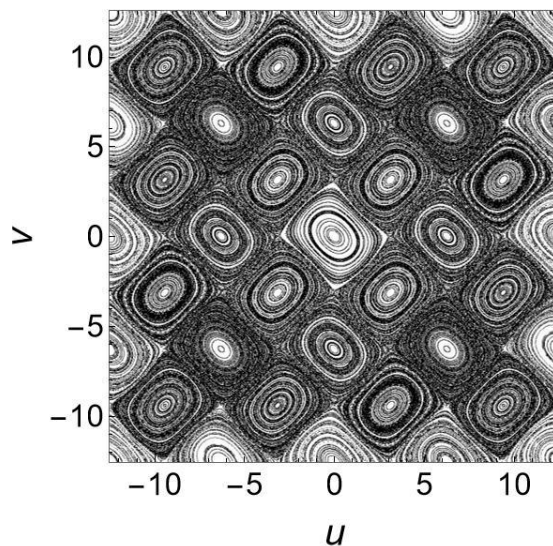
1. Исследовать диффузию точек на фазовых портретах отображения-паутины.
2. Проанализировать различие диффузии для случаев наличия кристаллической симметрии в отображении-паутина и поворотной.
3. Изучить зависимость доли убегающих траекторий от управляющего параметра.

## Основное содержание работы

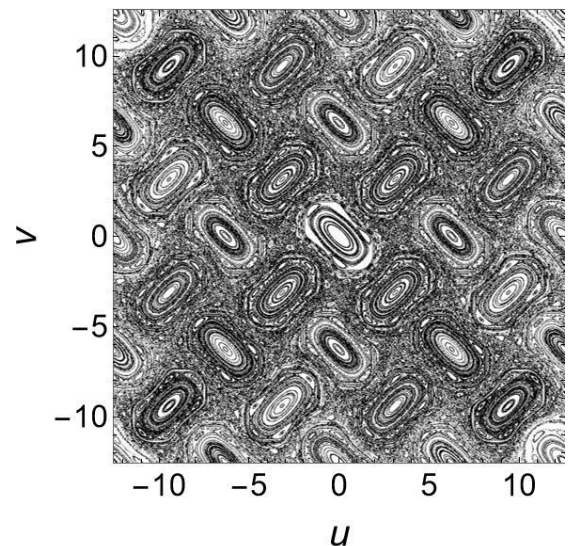
В работе рассматривается отображение (1) и приводится его вывод для системы грузика на пружинке под периодическим внешним импульсным воздействием.

$$\begin{cases} v_{n+1} = -(u_n + K_0 \sin(v_n)) \sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) + v_n \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \\ u_{n+1} = (u_n + K_0 \sin(v_n)) \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) + v_n \sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь переменная  $v$  это безразмерная координата, переменная  $u$  – безразмерный импульс, параметр  $K_0$  отвечает за интенсивность внешнего воздействия, а параметр  $q$ , фактически, обозначает отношение собственного периода колебаний системы к периоду внешнего воздействия. Это отображение известно как «отображение-паутина» из-за характерного устройства фазового пространства (рис. 1).



(a)



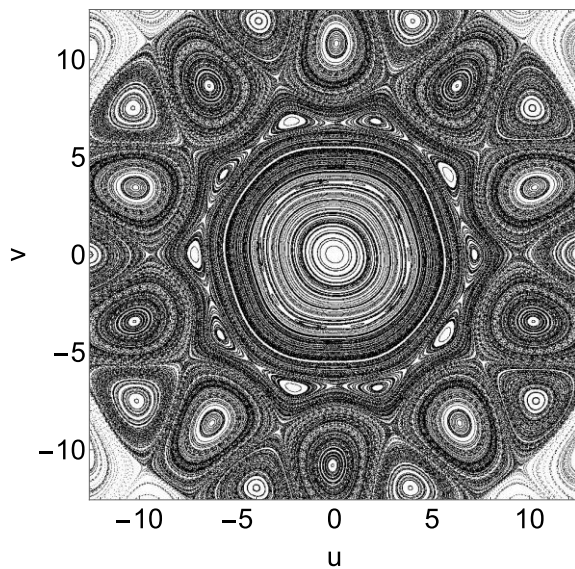
(б)

Рис.1. Фазовый портрет отображения-паутины при  $q = 4$ . а)  $K_0 = 0.7$ ,

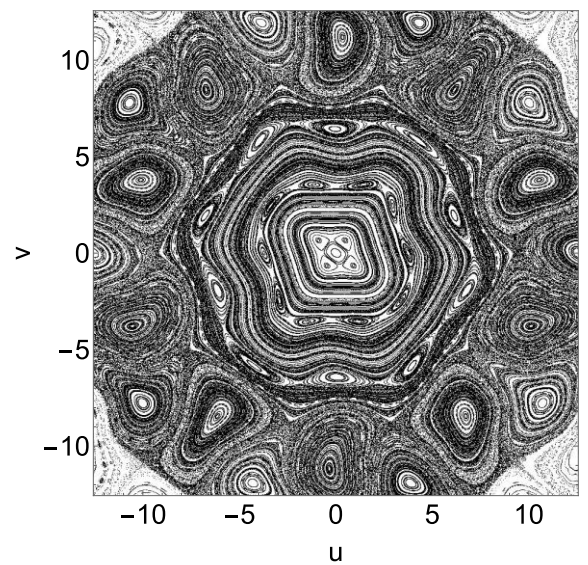
б)  $K_0 = 1.5$ .

Во-первых, как видно из рисунка резонанс наблюдается во всём фазовом пространстве одинаково. Во-вторых, даже при малых амплитудах воздействия (например, при  $K_0 = 0.7$ ) в окрестностях неподвижных гиперболических точек инвариантные кривые разрушаются и образуются стохастические слои. При этом сепаратрисы образуют сеть, разделяющую окрестности эллиптических неподвижных точек. По этой сети и возможна диффузия при любых параметрах воздействия.

Принципиально отличается случай отсутствия трансляционной симметрии с сохранением поворотной симметрии фазового пространства. Например при  $q=5$ .



(a)



(б)

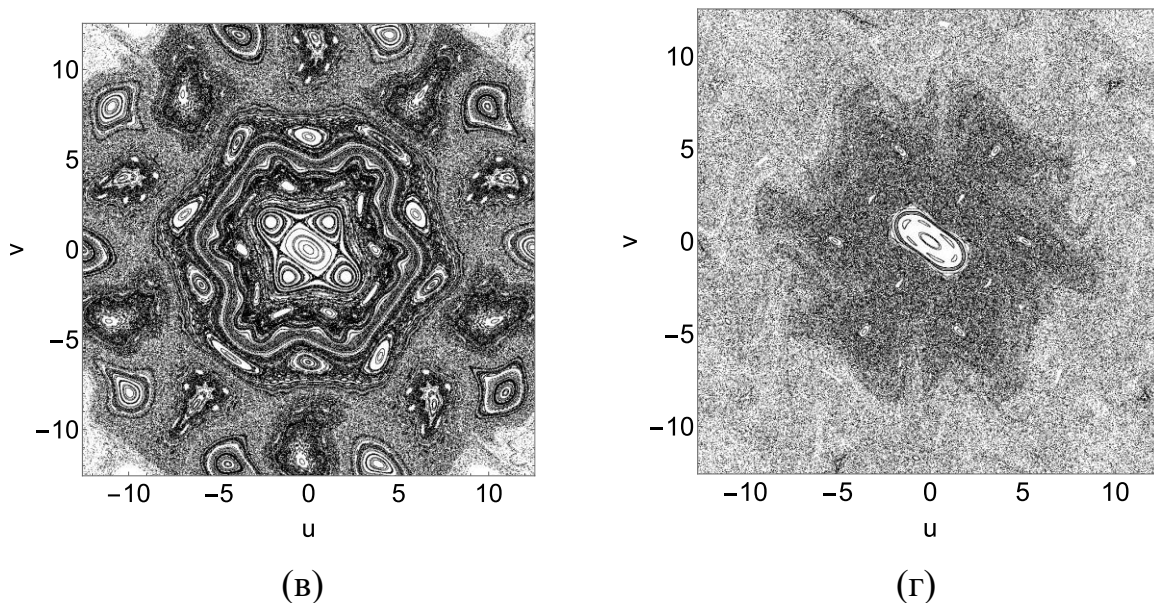


Рис.2. Фазовый портрет отображения-паутины при  $q = 5$ . а)  $K_0 = 0,2$ ,  
 б)  $K_0 = 0,7$ , в)  $K_0 = 1$ , г)  $K_0 = 2$

Фазовое пространство при  $q=5$  (рис. 4), в отличие от случая  $q=4$ , имеет выделенный центр и поэтому не будет переходить в себя при смещении по горизонтали и вертикали. Фазовый портрет заметно меняется при отдалении от центра. Даже при больших параметрах воздействия, при которых всё фазовое пространство занимает стохастическое море, видны чёткие границы областей, оставшиеся после разрушения инвариантных эллиптических кривых.

Для более детального исследования этого хаотического поведения изучается скорость диффузии в фазовом пространстве, то есть скорость «убегания» (количество шагов, необходимых для удаления точек более чем на расстояние  $\text{dist}$  в фазовом пространстве) фазовых траекторий в разных областях фазового портрета – карты диффузии. Само же расстояние  $\text{dist}$  подбиралось кратным периоду решётки отображения паутины.

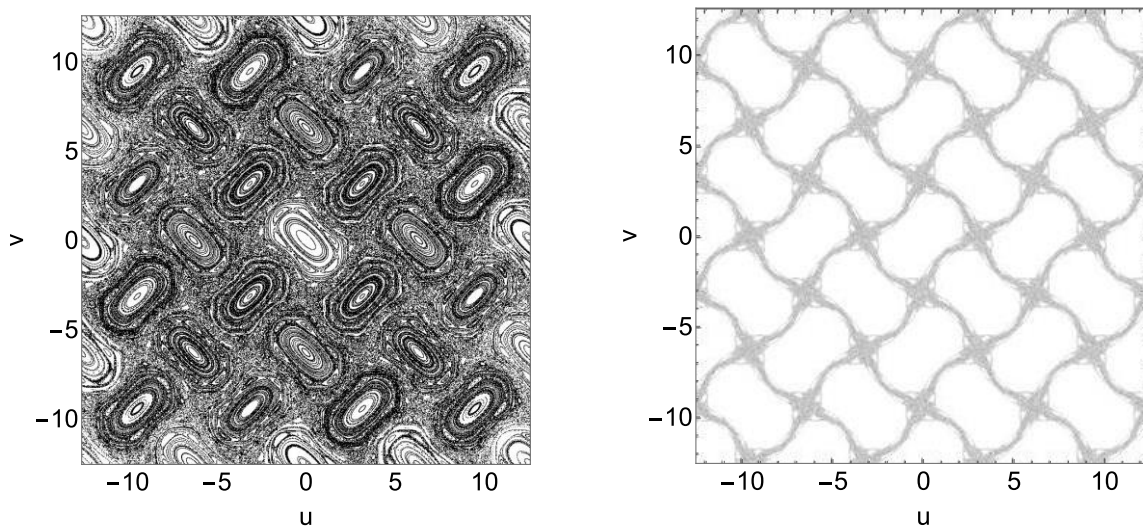
В каждом пикселе на рисунке взято по 100 точек, для всех посчитаны количества итераций отображения достаточных для удаления от начальной



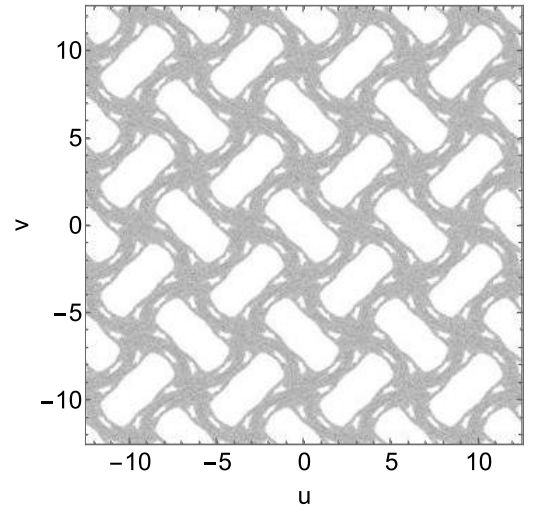
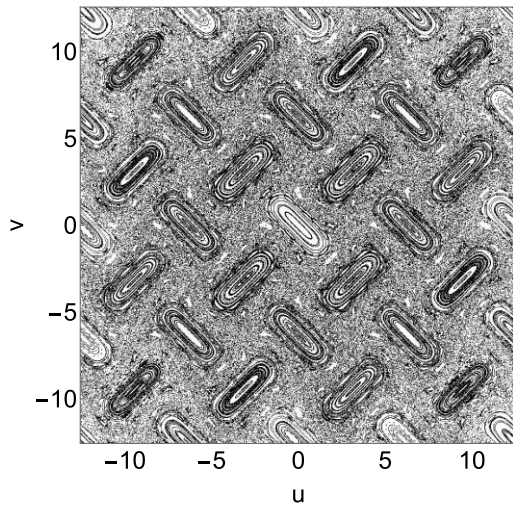
точки в фазовом пространстве более чем на  $\text{dist}$ , а затем проведено усреднение. Если количество шагов меньше некоторого, наперёд заданного, числа  $N_{\min}$ , то пиксель покрашен чёрным, больше  $N_{\max}$  – белым. В остальных случаях пиксель окрашен в оттенок серого таким образом, чтобы яркость линейно менялась от чёрного до белого, при соответствующем изменении количества шагов убегания от  $N_{\min}$  до  $N_{\max}$ . Числа  $N_{\min}$  и  $N_{\max}$  выбираются таким образом, чтобы в промежуток от  $N_{\min}$  до  $N_{\max}$  попадало не менее 90% всех «убегающих» точек.

Как упоминалось ранее структура фазового пространства отображения паутины обладает поворотной симметрией. При этом при каждой итерации отображения всё фазовое пространство поворачивается на  $360^\circ/q$  вокруг начала координат. Поэтому чтобы исключить это влияние далее везде за одну итерацию отображения полагается  $q$  итераций системы (1).

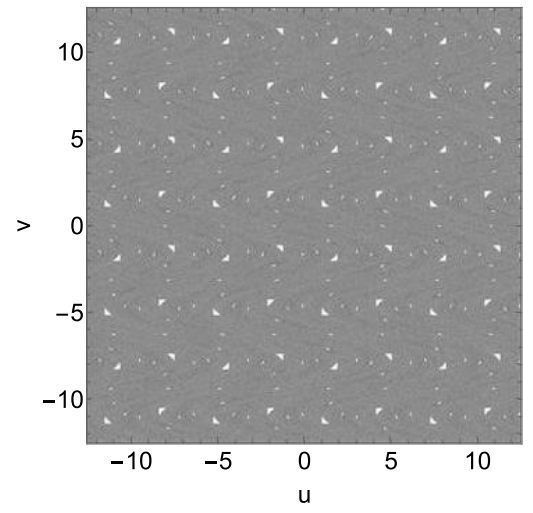
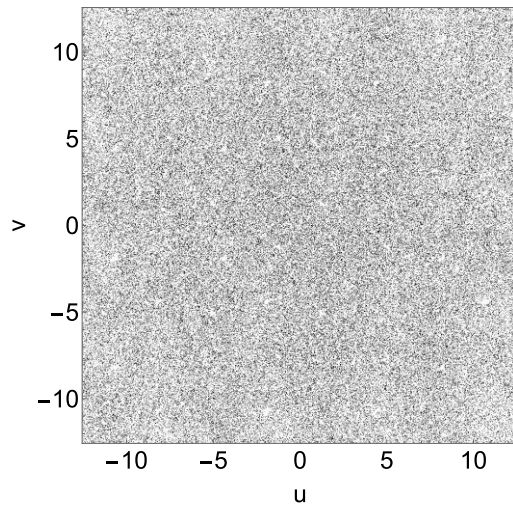
Вышеописанным способом построены карты диффузии для  $q=4$  и  $q=5$ .



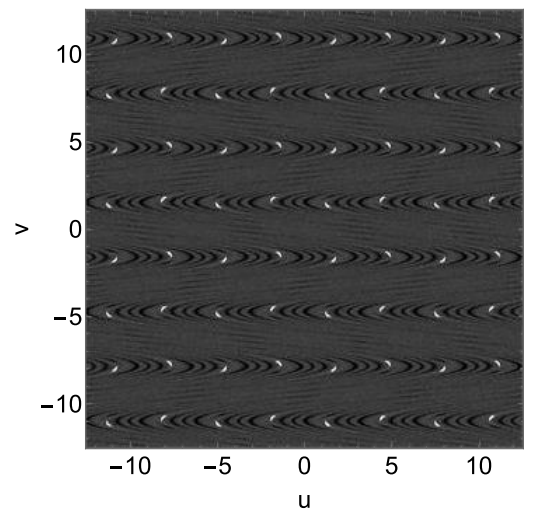
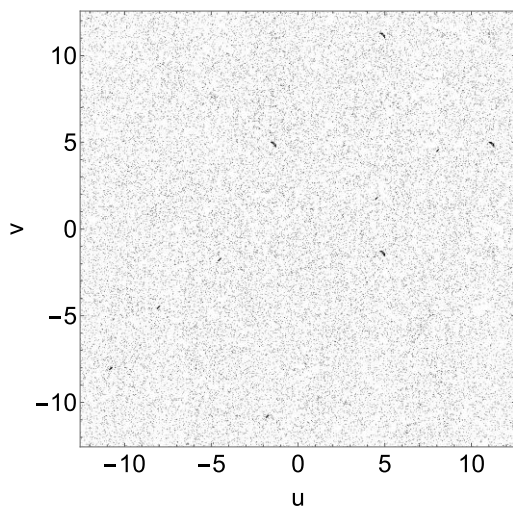
(a)



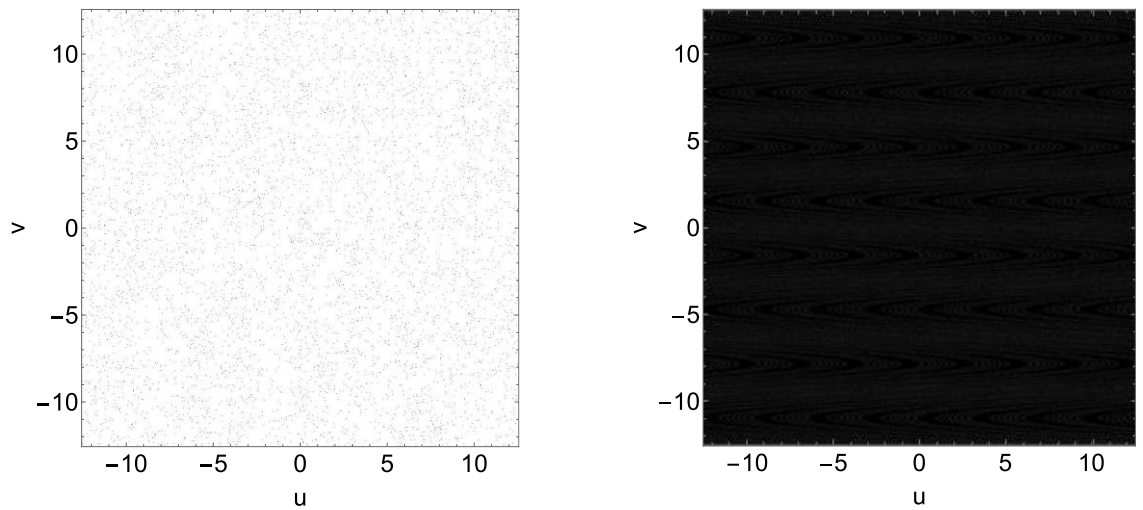
(6)



(B)



(Γ)

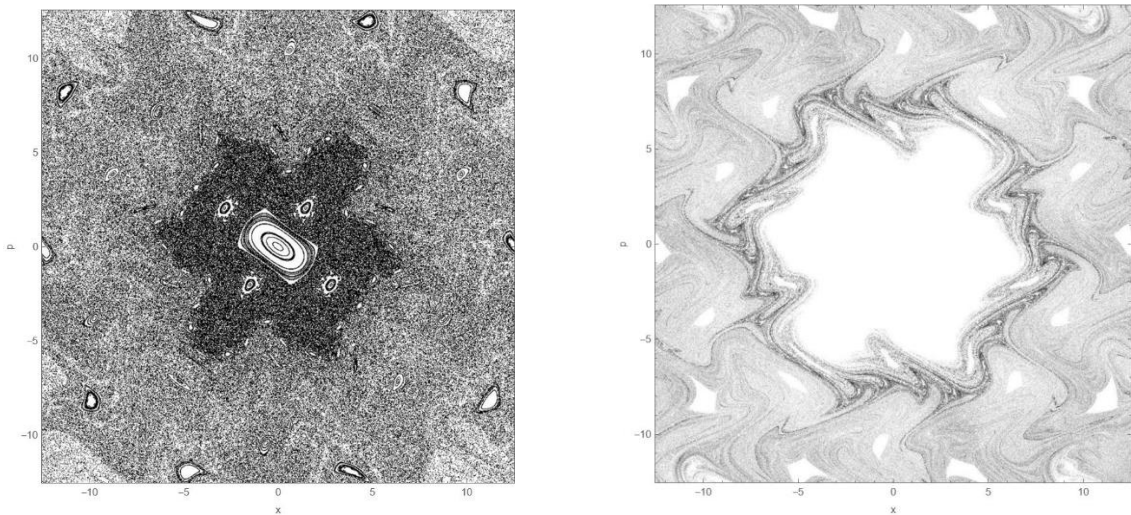


(д)

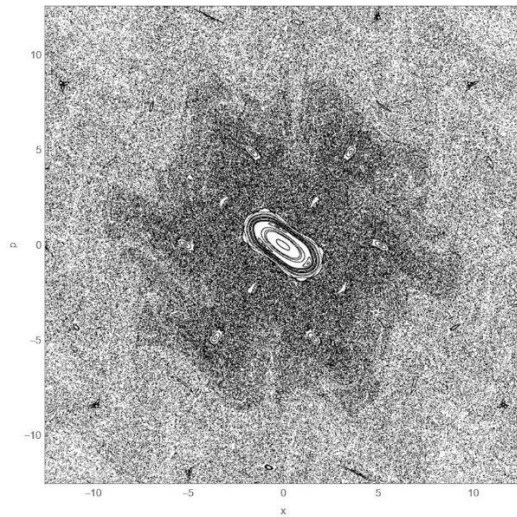
Рис. 3. Фазовые портреты (слева) и карты диффузии (справа) для отображения-паутины, при  $q = 4$ ,  $N_{min}=1$ ,  $N_{max}=256$ ,  $dist = 6\pi$ .

а)  $K_0=1,5$  б)  $K_0=2$ , в)  $K_0=4$  г)  $K_0=10$

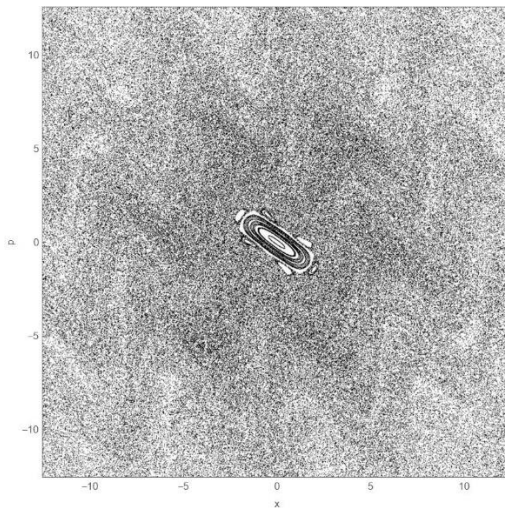
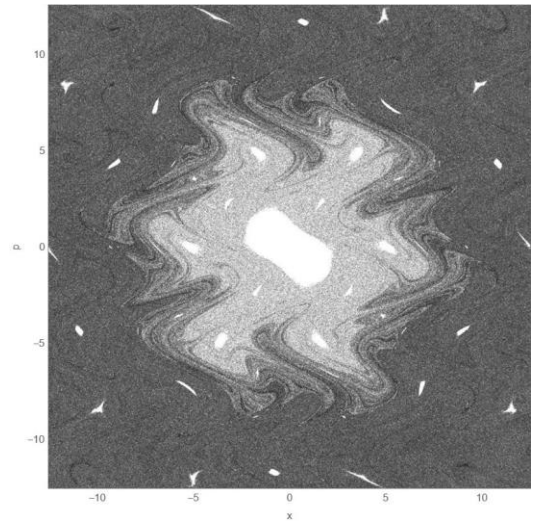
д)  $K_0=20$ .



(а)



(б)



(в)

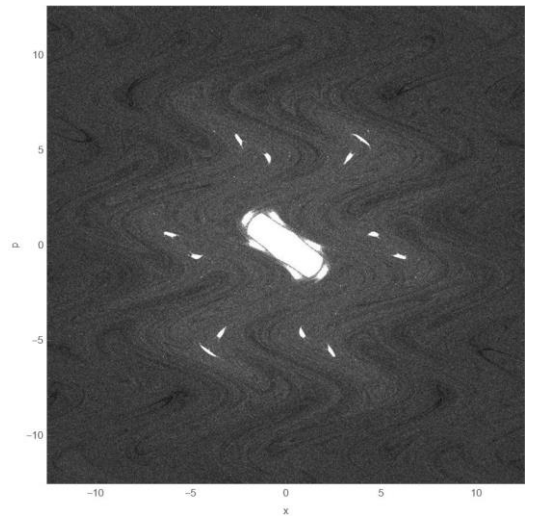


Рис. 4. Фазовые портреты (слева) и карты диффузии (справа) для отображения-паутины, при  $q = 5$ ,  $N_{min}=1$ ,  $N_{max}=256$ ,  $dist = 6\pi$ .

а)  $K_0 = 1,5$  б)  $K_0 = 2$  в)  $K_0 = 2,5$

Далее построена зависимость доли убегающих траекторий от управляющего параметра.

Для этого мы взяли 1000 случайных точек на области соответствующей квадрату со стороной в 4 раза большей чем длина одной ячейки стохастической паутины и проделали с каждой по 3000 итераций. А затем

вычислили долю точек отдалившихся в результате этих итераций более чем на расстояние  $dist = 8\pi$ . Эти действия проделаны при  $q=4$  для 400 значений  $K_0$  и построены графики (рис. 3).

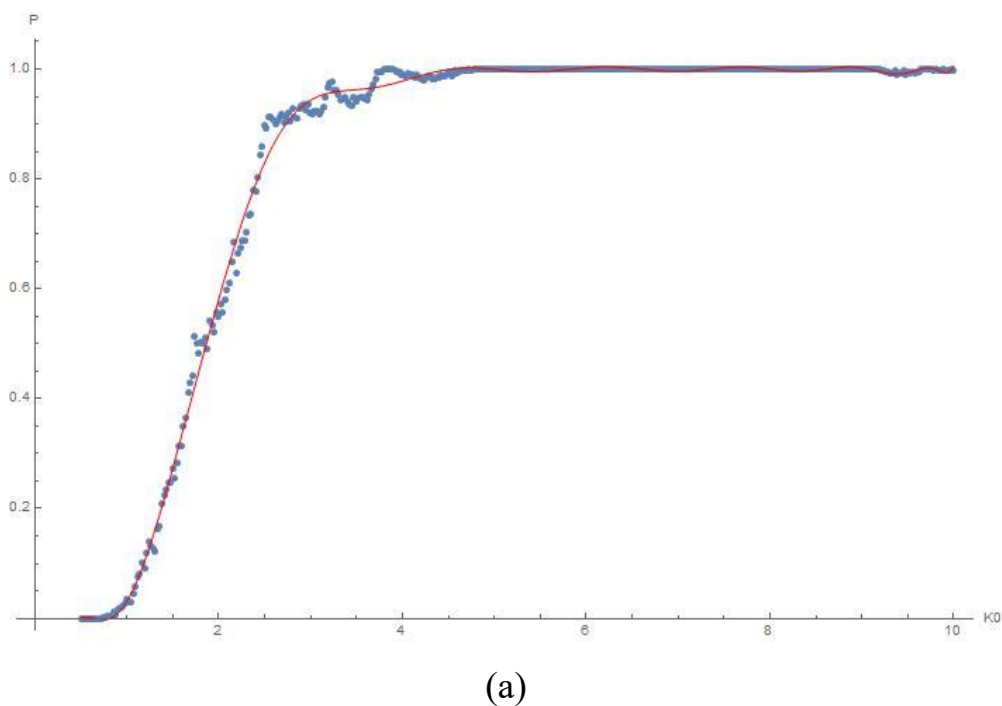


Рис. 5. Зависимость доли площади, занимаемой убегающими траекториями, от  $K_0$ . Аппроксимация (красная кривая) степенным полиномом.

## **Заключение.**

Таким образом, была исследована диффузия в фазовом пространстве отображения-паутины. Показано, что диффузия при малых значениях управляющего параметра может происходить только в области стохастической паутины. Показано, что скорость убегания увеличивается с увеличением  $K_0$ . Также что области с наименьшими скоростями убегания траекторий соответствуют окрестностям эллиптических неподвижных точек в фазовом пространстве. При увеличении параметра воздействия  $K_0$  убегающие траектории захватывают почти всё фазовое пространство.

Проведён сравнительный анализ скоростей диффузии для случаев симметрии кристаллического и некристаллического типов. Оказалось, что в случае симметрии кристаллического типа, картина диффузии одинакова во всех областях фазового портрета. В случае только поворотной симметрии, напротив, в среднем скорость диффузии значительно увеличивается при отдалении от центра. Также в этом случае скорость диффузии намного быстрее возрастает при увеличении управляющего параметра, чем в случае симметрии кристаллического типа.

Построен график зависимость площади убегания от параметра  $K_0$ . Форма графика похожа на логистическую кривую, однако флуктуирует около гладкой аппроксимации даже при больших  $K_0$ , что связано с периодическим образованием островков устойчивости в фазовом пространстве.

## Список использованной литературы

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
2. Д.И. Трубецков «Введение в синергетику. Колебания и волны». М.: URSS, 2012.
3. Райхл Л Е Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах  
М. - Ижевск: Институт компьютерных исследований 2008, 756 с.
4. Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Д.А. Усиков, А.А. Черников. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Физматлит , 1983 , 235 с.
5. Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Д.А. Усиков, А.А. Черников. УФН. - 1988. -Т.156-с.193
6. Г.М. Заславский, М.Ю. Захаров, Р.З. Сагдеев, Д.А. Усиков, А.А. Черников. ЖЭТФ. -1986. -Т.91-с.500
7. A.A. Chernikov, R.Z. Sagdeev, D.A. Usikov, M.Yu. Zakharov, G.M. Zaslavsky. Nature. – 1987. – V.326. – P.559.
8. M. S. Palmero , G. I. Díaz3 , P. V. E. McClintock, E. D. Leonel. Diffusion Phenomena in a Mixed Phase Space. 2019.
9. L. Chierchia, G. Gallavotti. Drift and diffusion in phase space. Annales de l’I. H. P., section A, tome 60, no 1 (1994), p. 1-144
10. K. Symon. Diffusion in Phase Space. 1993. LS-221.