

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Особенности поведения средней по ансамблю скорости в системах
бильярдного типа с осциллирующими границами**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 2211 группы
направления (специальности) 03.04.01 «ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИКА И
ФИЗИКА»

Институт физики

Любченко Дмитрий Олегович

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент


08.06.22
подпись, дата

А.В. Савин

Заведующий кафедрой
к.ф.-м.н., доцент


подпись, дата

Е.Н. Бегинин

Саратов 2022 год

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Особенности поведения средней по ансамблю скорости в системах
бильярдного типа с осциллирующими границами**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 2211 группы
направления (специальности) 03.04.01 «ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИКА И
ФИЗИКА»

Институт физики

Любченко Дмитрий Олегович

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент _____ А.В. Савин
подпись, дата

Заведующий кафедрой

к.ф.-м.н., доцент _____ Е.Н. Бегинин
подпись, дата

Саратов 2022 год

Введение

Как известно, реальному процессу соответствует динамическая система, когда процесс описывается уравнениями, по которым, зная начальные условия, можно однозначно определить состояние системы в любой последующий момент времени [1]. Некоторые динамические системы описываются простыми уравнениями, и, казалось бы, их поведение достаточно тривиально. Однако существуют системы, в которых при небольшом изменении начальных условий наш прогноз будет существенно меняться. В таком случае говорят о наличии динамического хаоса в системе. Это связано с тем, что хаотические траектории неустойчивы по Ляпунову [2], то есть если мы запустим две траектории со слабо-отличающимися начальными условиями, то со временем они будут удаляться друг от друга. Однако они устойчивы по Лагранжу, в смысле траектории сосредоточены в конечной области фазового пространства. Именно поэтому исследование динамических систем и хаоса в них важно и интересно не только с фундаментальной, но и с прикладной точки зрения.

Механизмы возникновения хаоса [3] более или менее понятны, в то время сам хаос в системах может приводить к нетривиальным эффектам. Если рассмотреть бильярдную систему, то в них могут встречаться хаотические траектории [4, 5]. Такие бильярды могут быть использованы для моделирования перемешивания в системе упругих шариков [6] или демонстрации броуновского движения в газе Лоренца [7]. А если задать границам гармонические колебания, то частица в нем начнет ускоряться [8]. Такая особенность бильярда была использована для объяснения возникновения быстрых космических лучей Энрико Ферми [9], в честь которого и прозвали эффект.

Относительно недавно в работах [10, 11] был обнаружен интересный эффект в бильярде типа «стадион» с осциллирующими границами. При исследовании средней по ансамблю скорости частиц в этой системе он обнаружил, что в случае слабой кривизны границы, малые колебания

границы приводят к тому, что в системе появляется критическое значение начальной скорости, ниже которой средняя скорость начинает падать. Если начальная скорость больше критической, то частицы в среднем ускоряются. Данное явление называли эффектом демоном Максвелла в бильярде.

В данной работе исследуется система Теннисона-Либермана-Лихтенберга [12] с добавлением осцилляций границе. Система Теннисона-Либермана-Лихтенберга состоит из частицы, которая движется между ровной и гофрированной стенками. Эта модель является типичным примером консервативной системы с двумя степенями свободы. В ней наблюдается как регулярная динамика, так и хаотическая.

Целями настоящей работы являются:

1. пронаблюдать различные эффекты в системе Теннисона-Либермана-Лихтенберга, к которым приводит добавление осцилляций границе;
2. получить новую систему путём приближений уравнений модели Теннисона-Либермана-Лихтенберга с осциллирующими границами;
3. пронаблюдать аналогичные эффекты в более простой системе;
4. исследовать другие эффекты, к которым приводят приближения.

Основное содержание работы

В работе была рассмотрена система, в которой частица движется между двумя границами, абсолютно упруго ударяется о них. Одна граница фиксированная и задаётся следующим уравнением:

$$y_1 = 0. \quad (1)$$

Другая граница гофрированная и может гармонически колебаться. Её уравнение:

$$y_2 = F(x, t) = b \cos kx + a \cos \omega t + h, \quad (2)$$

где a – амплитуда колебаний, b – амплитуда гофрировки, h – среднее расстояние между стенками.

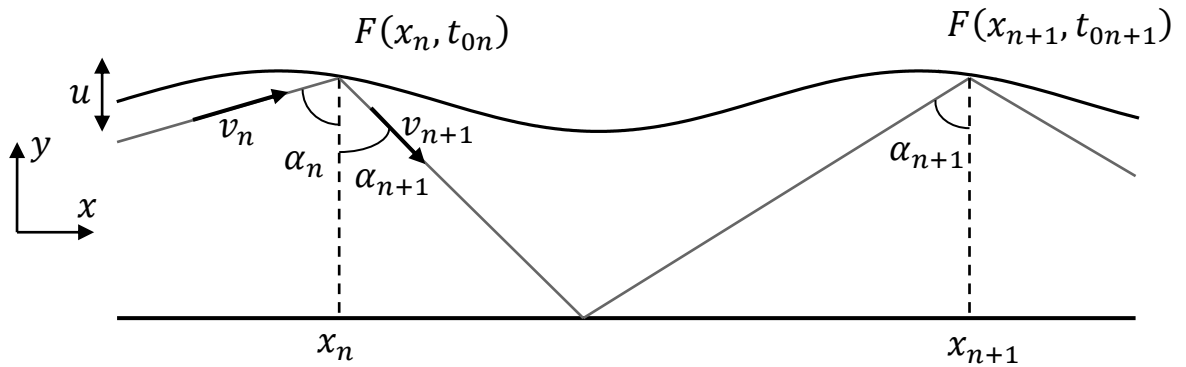


Рис. 1. Иллюстрация движения частицы между стенками. x_n – координата n -го соударения с верхней стенкой; α_n – угол между нормалью к верхней стенке и направлением скорости v_n в момент n -го удара; v_n – скорость частицы после n -го удара о верхнюю стенку; t_{0n} – время с момента начала движения до момента n -го удара о верхнюю стенку.

Для данной модели не трудно получить выражения переменных для следующего удара v_{n+1} , α_{n+1} , x_{n+1} , t_{0n+1} через предыдущие значения v_n , α_n , x_n , t_{0n} в случае слабой гофрировки и амплитуды колебаний. Выражения формируют четырехмерное отображение:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \sqrt{v_{n+1x}^2 + v_{n+1y}^2}; \\
\alpha_{n+1} &= \arctan \frac{v_{n+1x}}{v_{n+1y}}; \\
x_{n+1} &= x_n + 2h \frac{v_{n+1x}}{v_{n+1y}}; \\
t_{0n+1} &= t_{0n} + \frac{2h}{v_{n+1y}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь: $v_{n+1x} = v_n \sin(\alpha_n + 2\gamma) - 2\gamma u$, $v_{n+1y} = v_n \cos(\alpha_n + 2\gamma) - 2u$, $u = -aw \sin wt_{0n}$, $\gamma = -kb \sin kx_n$. Число параметров можно уменьшить с помощью следующей замены переменных:

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= kx_n; \\
\psi_n &= wt_{0n}; \\
\Omega_{n_{x,y}} &= \frac{v_{n_{x,y}}}{2hw}; \\
A &= 2hk; \\
B &= \frac{a}{h}; \\
C &= bk.
\end{aligned} \tag{4}$$

В результате получается четырёхмерное отображения с тремя параметрами:

$$\begin{aligned}
\Omega_{n+1} &= \sqrt{\Omega_{n+1x}^2 + \Omega_{n+1y}^2}; \\
\alpha_{n+1} &= \arctan \left[\frac{\Omega_{n_x}}{\Omega_{n_y}} \right]; \\
\varphi_{n+1} &= \varphi_n + A \frac{\Omega_{n_x}}{\Omega_{n_y}}; \\
\psi_{n+1} &= \psi_n + \frac{1}{\Omega_{n_y}},
\end{aligned} \tag{5}$$

где: $\Omega_{n+1x} = \Omega_n \sin(\alpha_n + 2\gamma) - 2\gamma u$, $\Omega_{n+1y} = \Omega_n \cos(\alpha_n + 2\gamma) - 2u$, $\gamma = -C \sin \varphi_n$, $u = -B \sin \psi_n$, Ω_n – безразмерная скорость, φ_n – безразмерная координата, ψ_n – безразмерное время, A – безразмерное расстояние между стенками, B – безразмерная амплитуда колебаний, C – безразмерная амплитуда гофрировки.

Рассмотрим предельный случай, когда амплитуда колебаний равна нулю ($B = 0$). В такой ситуации $u = 0$, а скорость не меняется со временем. Тогда система (5) перейдёт в двумерное отображение:

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n - 2C \sin \varphi_n \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + A \tan \alpha_{n+1}\end{aligned}\tag{13}$$

Данная система хорошо известна, как система Теннисона-Либермана-Лихтенберга [12]. Фазовое пространство такой системы является двумерное пространство – плоскость. Его структура типична для неинтегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы: наблюдаются регулярные траектории, которые строго отгороженные от хаотической области. Для дальнейшего исследования предполагается выбрать следующие значения параметров $A = 2$ и $C = 0.05$, которые хорошо попадают под определения слабой гофрировки ($C \ll A$).

Известно [8], что если бильярд с фиксированными граница демонстрирует хаотическую динамику, то у такого бильярда с осциллирующими границами будет наблюдаться ускорение Ферми. Значит, чтобы наблюдать ускорение Ферми, нужно рассматривать хаотические траектории при фиксированной границе. Рассмотрим следующую область начальных условий: $\varphi_0 \in [0; 3]$, $\psi_0 \in [1; 4]$ и $\alpha_0 \in [0.35\pi; 0.4\pi]$, и сконструируем ансамбль из 4410 с различными начальными значениями φ_0 , ψ_0 и α_0 , выбранными в виде кубической решётки из этой области и одинаковой начальной скоростью Ω_0 для каждой системы в ансамбле. Преимущественное количество траекторий такого ансамбля будет хаотичным, средний старший показатель Ляпунова $\bar{\Lambda} = 0.98$. Но если мы зададим колебания границы $B = 0.01$, то все траектории из этой области становятся хаотичными $\bar{\Lambda} = 1.23$.

Для того чтобы обнаружить эффект, продемонстрированный в работах [10, 11], нужно задать слабые колебания границы. Зависимость средней скорости по ансамблю, описанного выше, от числа итераций представлено на рис. 2 при разных значениях амплитуды B . При $B = 0.01$ (рис. 2а) и $B = 0.03$ (рис. 2б), Видно, что траектории, начальное значение которых ниже критического значения, стремятся к предельной скорости. У

траекторий, начальное значение скорости которых выше, наблюдается ускорение Ферми. Вообще говоря, предельная скорость не является постоянной величиной, она постоянно растёт с числом итерации. Однако этот рост очень слабый и измерим с флуктуациями средней скорости около предельной. Таким образом, предельная скорость является квази-постоянной. Разница между рис. 2а и рис. 2b состоит в величине предельной и критической начальных скоростей, и также в росте скорости при таких же начальных скоростях, у которых значение выше критического. При $B = 0.05$ (рис. 2с) наблюдается похожая ситуация, однако предельная скорость ощутимо растёт с числом итераций. В этом случае предельная скорость нельзя считать постоянной, и считается, что при таких параметрах эффекта бильярдного демона Максвелла нет. Переход от рис. 2b и рис. 2с даёт качественное представление о том, как исчезает эффект.

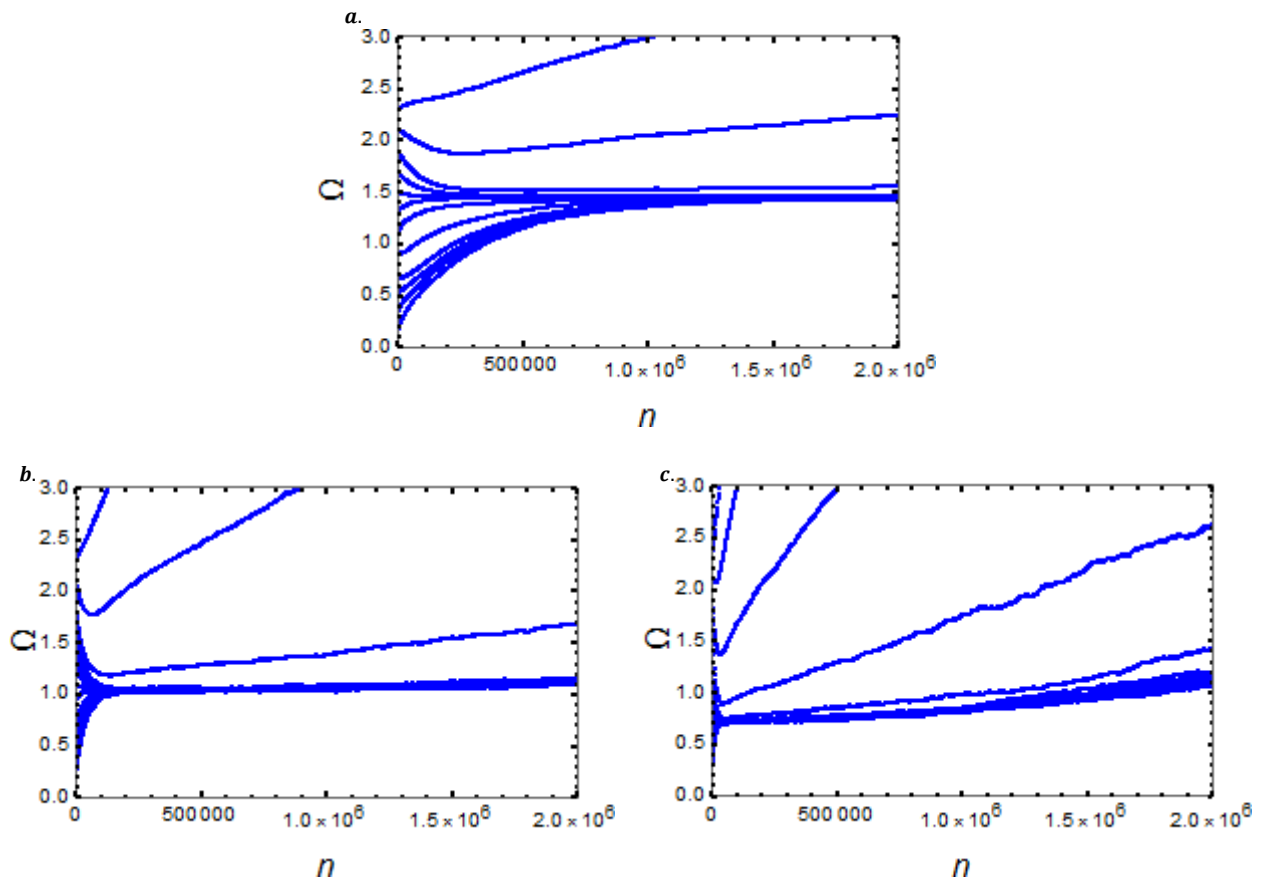


Рис. 2. Зависимость средней по ансамблю скорости Ω от числа итераций системы (5) с различными начальными $\varphi_0, \psi_0, \alpha_0$, выбранными в виде кубической решётки в хаотической области при параметрах: $A = 2, C = 0.05$ и $B = 0.01$ (a); $B = 0.03$ (b); $B = 0.05$ (c); начальные скорости Ω_0 , выбраны в диапазоне от 0.5 до 2.3 с шагом 0.2.

Для того, чтобы получить более простую систему, в которой возникает аналогичный эффект предлагается сделать две аппроксимации:

1. Скоростное приближение

Распишем выражение для скорости Ω_{n+1} :

$$\Omega_{n+1} = \sqrt{\Omega_{n+1x}^2 + \Omega_{n+1y}^2} = \sqrt{(\Omega_n \sin(\alpha_n + 2\gamma) - 2\gamma u)^2 + (\Omega_n \cos(\alpha_n + 2\gamma) - 2u)^2}; \quad (6)$$

С учетом того, что $B, C \ll 1$, то $\gamma, u \ll 1$

$$\sqrt{(\Omega_n \sin(\alpha_n + 2\gamma))^2 + (\Omega_n \cos(\alpha_n + 2\gamma) - 2u)^2} = \sqrt{\Omega_n^2 - 4u\Omega_n \cos(\alpha_n + 2\gamma)}; \quad (7)$$

Считая, что при реализации эффекта, предельная скорость много больше амплитуды колебания границы, то $u \leq B \ll \Omega_n$:

$$\Omega_n \sqrt{1 - 4 \frac{u}{\Omega_n} \cos(\alpha_n + 2\gamma)} = \Omega_n - 2u \cos(\alpha_n + 2\gamma); \quad (8)$$

2. Координатное приближение

Так как $u = -B \sin \psi_n$, то максимальное её значение $u = B$. Эффект бильярдного демона Максвелла проявляется в случае слабой кривизны и малых колебаний, то есть $B, C \ll 1$, поэтому будем считать, что:

$$\frac{\Omega_{nx}}{\Omega_{ny}} \approx \tan(\alpha_n + 2\gamma). \quad (9)$$

Используя данные приближения система (5) переходит в систему (10):

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - 2C \sin \varphi_n; \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + A \tan(\alpha_{n+1}); \\ \Omega_{n+1} &= \Omega_n + 2B \sin \psi_n \cos(\alpha_{n+1}); \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + \frac{1}{\Omega_n \cos(\alpha_{n+1}) + 2B \sin \psi_n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отображение получилось достаточно интересным. Оно распалось на ведущую систему, которая является системой Теннисона-Либермана-Лихтенберга и ведомую систему, на которую действует система Теннисона-Либермана-Лихтенберга.

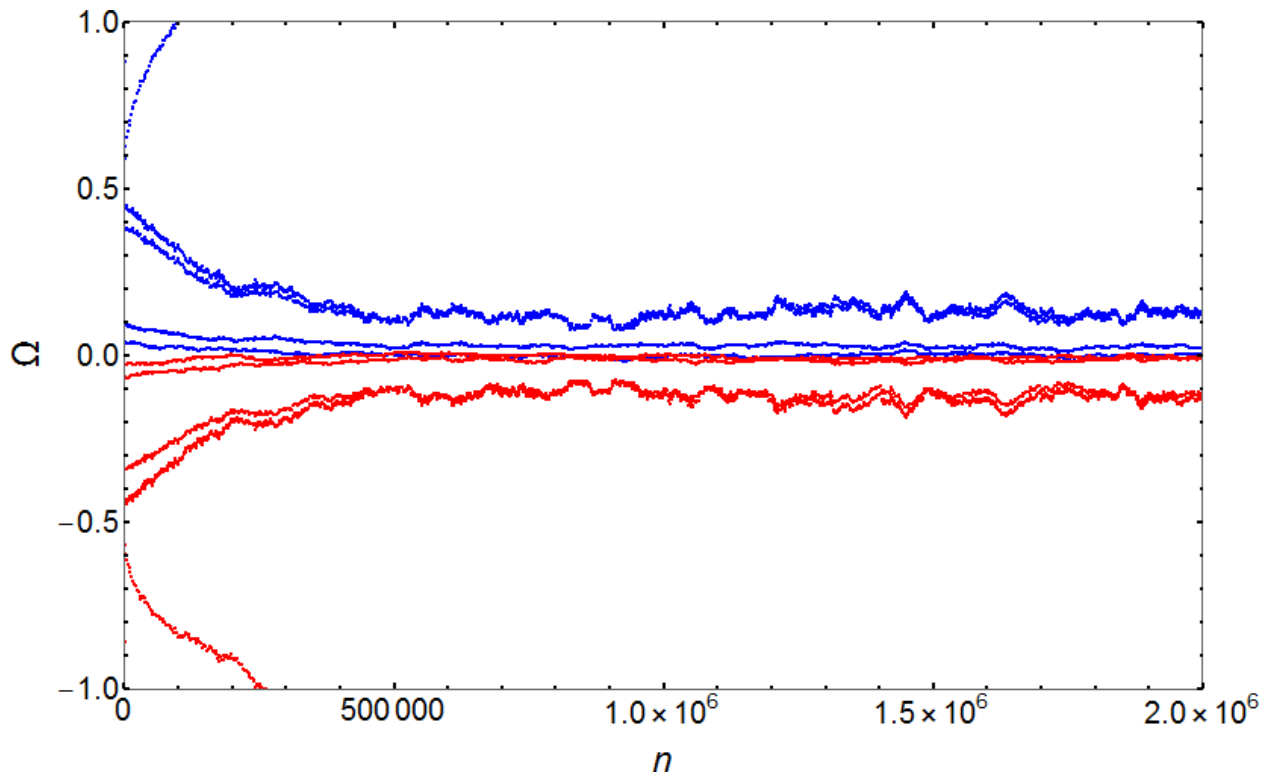


Рис. 3. Зависимость средней по ансамблю скорости от числа итераций отображения (10) с различными начальными $\varphi_0, \psi_0, \alpha_0$, выбранными в хаотической области. Параметры $A = 2, C = 0.05, B = 0.02$. Цвет кривой зависит от начальной скорости: красные – начальная скорость больше нуля, синие – меньше нуля.

Для того чтобы обнаружить похожий эффект, описанный ранее, сделаем схожие манипуляции. Построим зависимость средней по ранее представленному ансамблю скорости от числа итераций при малой амплитуде колебаний. На рис. 3 наблюдается эффект бильярдного демона Максвелла. И он отличается от исходной системы. В данной системе есть две предельной скорости, на рис. 3 одна имеет значение 0.12, вторая нулевая. К ненулевой предельной скорости стремятся частицы, скорость которых меньше граничной, но совсем медленные ансамбли частиц стремятся к нулевой предельной скорости. Если начальная скорость выше граничной, то частицы ускоряются.

Исследование якобиана и старшего показателя Ляпунова при фиксированных параметрах и различных начальных условиях демонстрирует различные режимы динамики (рис. 4, траектория 1 демонстрирует хаотическую динамику, траектории 2 и 3 демонстрируют диссипативную регулярную динамику, у траектории 4 и 5 наблюдается режим ускорения с

консервативным якобианом и нулевым старшим показателем Ляпунова). Обсуждения возможности такого поведения были в работах по смешенной динамике [15]. В некоторых областях начальных условий наблюдаются удивительно большие якобианы (рис. 4, траектория 1). Это связано с тем, что в хаотическом режиме могут появляться полёты Леви [16], когда в бильярде удар происходит почти по касательной и следующий удар происходит через большой промежуток времени. Из-за этого производные очень велики, что не позволяет корректно рассчитать якобиан. Также в приближенной системе (10) присутствуют аттракторы с малой скоростью (рис. 4, траектории 1, 2 и 3), из-за чего наблюдаются предельные скорости. При большой скорости в некоторых случаях появляются ускоряющиеся траектории (рис. 4, траектории 4 и 5). Если предположить, что исходная система (5) является возмущением приближенной системы (10), то это может быть первопричиной появления в системе предельной скорости.

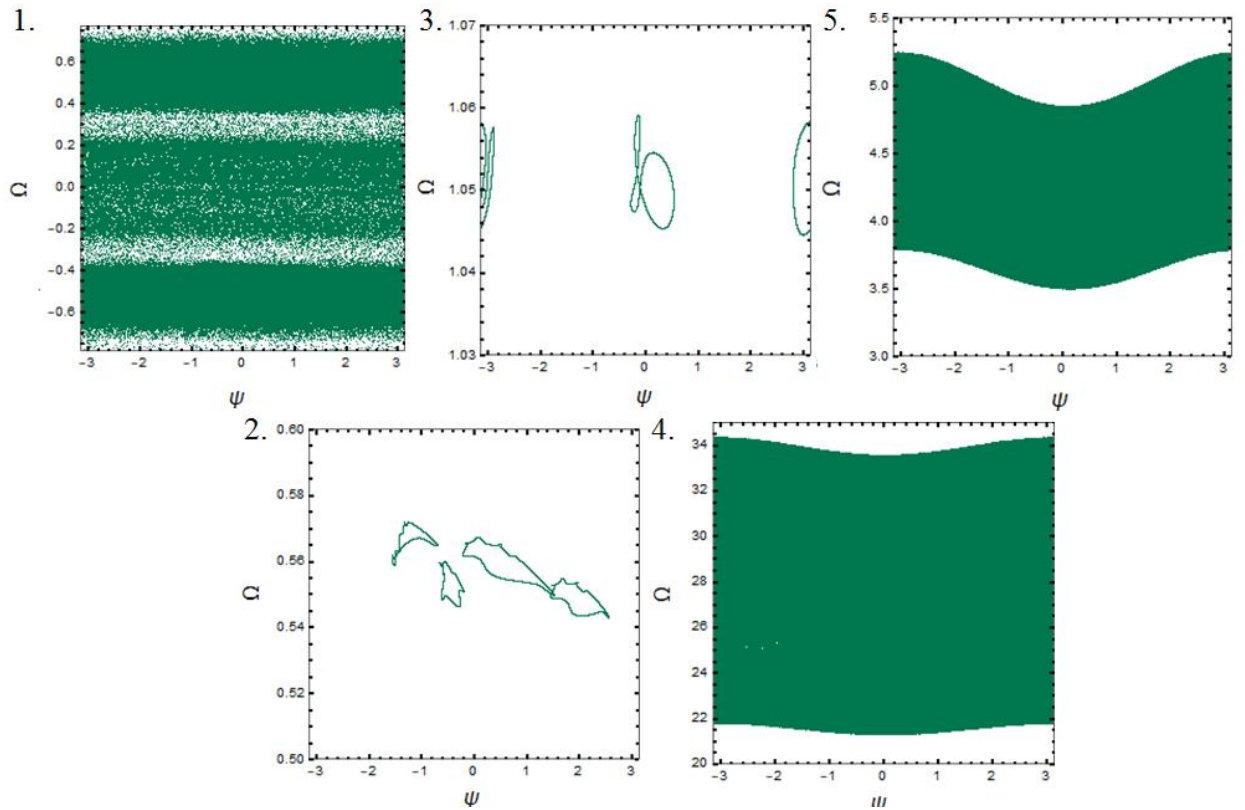


Рис. 4. Фазовая проекция ведомой системы (10) при параметрах $A = 2, B = 0.02, C = 0.05$ и начальных значениях $\Omega_0 = 1.0, \psi_0 = 0$ 1. $\alpha_0 = 0.05\pi, \varphi_0 = 0$; 2. $\alpha_0 = 0.33\pi, \varphi_0 = 0$; 3. $\alpha_0 = 0.41\pi, \varphi_0 = 0$; 4. $\alpha_0 = 0.382\pi, \varphi_0 = -0.6$; 5. $\alpha_0 = 0.41\pi, \varphi_0 = -1.8$.

Заключение

Таким образом, в данной работе была рассмотрена система, которая является модифицированной моделью Теннисона-Либермана-Лихтенберга. В ходе исследования средней по ансамблю скорости было выявлено, что в системе может появляться эффект типа демона Максвелла в бильярде, из-за которого в системе появляется критическое значение начальной скорости, и если начальная скорость ниже этого значения, то скорость стремится к предельному значению, иначе скорость начинает неограниченно расти. Предельная скорость на самом деле является квази-постоянной и может сильно нарастать со временем. В такой ситуации считается, что эффекта в системе нет.

Было получено более простое отображение, в котором проявляются эффекты, которые наблюдаются в исходной системе. Исследование якобиана и старшего Ляпуновского показателя при одних и тех же параметрах выявило сосуществование нескольких динамических режимов при разных начальных условиях. Были обнаружены области начальных условий, в которых могут возникать полёты Леви. Интересный и то, что при малой скорости мы наблюдаем аттракторы с малой скоростью, из-за чего наблюдаются предельные скорости. А при большой скорости возникают режимы неограниченного роста скорости.

Список использованной литературы

1. Д.И. Трубецков «Введение в синергетику. Хаос и структуры». М.: URSS, 2018.
2. Г. Шустер «Детерминированный хаос». М.:Мир, 1988, 250 с.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
4. Ya.G. Sinai, Russian Math. Surv. 25, 137 (1970)
5. Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: Изд. дом "Удм. ун-т", 1999.
6. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики (М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950)
7. Бунимович Л. А., в сб. Итоги науки и техники (Динамические 86 системы, Т. 2, Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления) (М.: ВИНТИ, 1985)
8. Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г. // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. С. 1781.
9. Fermi E. On the origin of the cosmic radiation // Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 1169.
10. А.Ю. Лоскутов, А.Б. Рябов. Системы бильярдного типа и ускорение Ферми. // Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 5, 2008.
11. Лоскутов А.Ю. Динамический хаос. Системы классической механики. // Успехи физических наук, 2007, т.177, №9, 27 с.
12. А. Лихтенберг, М. Либерман «Регулярная и стохастическая динамика». М.:Мир, 1984, 529 с.
13. Д.И. Трубецков «Введение в синергетику. Колебания и волны». М.: URSS, 2012.
14. André L.P. Livorati, Alexander Loskutov, Edson D. Leonel. A peculiar Maxwell's Demon observed in a time-dependent stadium-like billiard. // Physica A v. 391, i. 20, 2012
15. С. В. Гонченко, Д. В. Тураев О трех типах динамики и понятии аттрактора. // Труды МИАН, т. 297, с. 133–157, 2017
16. Заславский Г. М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. // Институт компьютерных исследований, 2004