Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра общей, теоретической и компьютерной физики

РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ Э. ШРЁДЕРА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ
МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ
студента 2 курса 2225 группы
направления 03.04.02 «Физика» мнститута физики
Арлашина Дениса Михайловича

Научный руководитель
д.ф.-м.н. профессор В.М. Аникин

(

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. профессор В.М. Аникин

Саратов 2022

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Одним из математических инструментов теории многократных итераций функций действительного и комплексного аргументов, отображений и итерационных вычислений являются функциональные уравнения Эрнста Шрёдера и связанные с ним заменой переменных уравнения Нильса Хенрика Абеля и Люциана Бёттхера. Кроме того, исследования Эрнста Шрёдера, Артура Кэли и Люциана Бёттхера положили начало развитию голоморфной динамики как части теории итерационных вычислений.

Теоретическая и прикладная важность уравнений Шрёдера, Абеля и Бёттхера состоит в том, что нахождение их решений позволяет находить далее выражения для траекторий $x_n = x_n(n,\, x_0)$ для рассматриваемого итерационного процесса $x_{n=1} = f(x_n)$ на любом шаге итераций. Это в свою очередь дает возможность исследовать асимптотическое поведение x_n, в частности, определить наличие или отсутствие сходимости к неподвижной точке, установив или не обнаружив наличие предела $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. В случае хаотических процессов знание точного решения $x_n = x_n(n,\, x_0)$ позволяет рассчитать показатель Ляпунова, инвариантную плотность процесса и его автокорреляционную функцию.

Целями выпускной квалификационной работы ставится:

а) систематизация данных о решении уравнения Шрёдера для итерационных процессов, генерируемых одномерными хаотическими отображениями на действительной числовой оси,

б) получение новых решений и демонстрацией наличия хаотического поведения в рассматриваемых динамических системах (отображениях) с расчетом точного представления для итераций, инвариантной плотности и автокорреляционной функции.

Задачи работы:

Дать общее представление об общем методе решения функционального уравнения Шрёдера и записать его решения для частных задач на базе построения топологически сопряженных отображений.

Привести решения уравнения Шрёдера для классических хаотических отображений и новых отображений, «синтезированных» на основе свойств тригонометрических функций.

Научная новизна и защищаемые результаты работы – решение функциональных уравнений Шрёдера и Абеля, нахождение их связи с характеристиками рассмотренных хаотических отображений.

СТРУКТУРА И ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Структурно ВКР состоит из введения, 3-х глав, заключения, списка использованных источников (21 наименование). Общий объем – 42 с.

Во введении дается общая характеристика работы (актуальность, цели и задачи, научная и практическая значимость и т.д.).

В главе 1 приводятся обоснования, по которым Э. Шрёдер ввел специальное функциональное уравнение для изучения асимптотики итерационных процессов: нахождение решения уравнения дает возможность записать зависимость значений итерируемой функции от начального условия на каждом шаге процесса, что далее позволяет точно вычислить (в случае хаотических процессов) показатель Ляпунова и статистические характеристики– инвариантную плотность и автокорреляционную функцию.

Для итерационной функции $f(x)$ функциональное уравнение Шрёдера определяется как

$$\omega(f(x)) = \lambda\omega(x) \qquad (1)$$

Нахождение функции $\omega(x)$ и обратной к ней функции $\Omega(u) = \omega^{-1}(u)$, а также числа λ является целью решения уравнения Шрёдера. Знание решения позволяет записать аналитическое выражение на любом шага итераций:

$$x_n = f(x_{n-1}) = \Omega\left(\lambda^n\omega(x_0)\right) \qquad (2)$$

В главе в качестве основного метода решения функционального уравнения Шрёдера обосновывается метод построения топологически сопряженных отображений. Взаимно-однозначная замена переменных осуществляется по схеме

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \Omega & \rightarrow & \Omega \\ \downarrow & h & \downarrow \\ \tilde{\Omega} & \rightarrow & \tilde{\Omega} \\ & \tilde{T} & \end{array} .$$

Здесь T – исходное преобразование некоторой области в саму себя : h – производимая замена переменных, $\tilde{T}$ – сопряженное отображение.

В качестве тестового примера для демонстрации метода решения уравнения Шрёдера посредством построения сопряженных отображений выбрано разностное уравнение Улама – фон Неймана:

$$x_n = f(x_{n-1}) = 4x_{n-1}(1-x_{n-1}),\ x_n \in (0,1),\ n = 1,2,3... \qquad (3)$$

Сделаем замену переменных в (3) и определим сопрягающие функции с учетом, собственно, общего вида отображения (3). Положим:

$$x = \omega(z) = \sin^2 z, \quad z = \Omega(x) = \arcsin\sqrt{x}, \quad z \in (0, \pi/2). \qquad (4)$$

Для первой итерации получим:

$$x_1 = f(\sin^2 z_0) = 4\sin^2 z_0(1-\sin^2 z_0) = \sin^2 2z_0 . \qquad (5)$$

С использованием (5) для второй итерации найдем:

$$x_2 = f(f(\sin^2 z_0)) = \sin^2 2^2 z_0 = \sin^2(2^2 z_0).$$

Аналогично для n-й итерации будет справедливо соотношение, решающее поставленную задачу – нахождение точного явного представления для точки траектории:

$$x_n = f_n(\sin^2 z_0) = \sin^2 2^n z_0 = \sin^2(2^n \arcsin\sqrt{x_0}). \qquad (6)$$

В общем виде результат (6) легко доказывается методом математической индукции на основании (5) и (6). Результат (6) приводится в работах Э. Шрёдера и С. Улама. Таким образом, для отображения Улама – фон Неймана решение уравнения Шрёдера действительно имеет вид (4):

Значение показателя Ляпунова на основе точного траекторного решения (6) вычислияется по формуле:

$$\Lambda(x_o) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{df_n(x_0)}{dx_0} \right|. \qquad (7)$$

Для отображения Улама – фон Неймана на основании (7) получим:

$$\Lambda(x_o) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{d}{dx_0}\left(\sin^2(2^n \arcsin\sqrt{x_0}\right) = \ln 2. \qquad (8)$$

Инвариантная плотность отображения через точное траекторное решение выражается как

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta\left(x - f_k(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta\left(x - x_k\right). \qquad (9)$$

Для отображения (3) применение правила (9) дает:

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},\ x \in (0,1). \tag{10}$$

Автокорреляционная функция хаотического процесса, характеризующая статистическую связь между сечениями процесса, разделенными m шагами итераций, определяется как:

$$R(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f_{i+m}(x_0) - \bar{x} \right)\left(\left(f_i(x_0) - \bar{x} \right) \right) \tag{11}$$

где

$$\bar{x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_0) \tag{12}$$

– усредненное значение. Для известной инвариантной плотности выражение для автокорреляционной функции представляется интегралом:

$$R(m) = \int x f_m(x)\rho(x)dx - \left(\int x\rho(x)dx \right)^2 \tag{13}$$

(усреднение ведется по инвариантной плотности отображения). В случае отображения Улама – фон Неймана имеем:

$$R(m) = \int_0^1 x f_m(x)\rho(x)dx - \left(\int_0^1 x\rho(x)dx \right)^2 = \begin{cases} 1/8,\ m = 0, \\ 0,\ m \ge 0. \end{cases}. \tag{14}$$

Таким образом, отображение Улама – фон Немана обладает нулевой корреляционной функцией, что соотносится с понятием *дискретного белого шума*.

В главе 2 продемонстрировано решение уравнения Шрёдера для итерационного процесса, присущего методу Ньютона при нахождении корней нелинейных уравнений:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Итеративная формула (15) в случае численного нахождения квадратного корня из числа a преобразуется к виду:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

В ВКР формула (16) применена как в классическом понимании (прямое доказательство сходимости процесса при извлечении квадратного корня из положительного числа), так и в измененной форме, при смене знака в итерационной процедуре (16) (формально под «извлечение корня» из отрицательного числа), приводящей к возникновению хаотического отображения с инвариантным распределением Коши. На комбинации этих двух отображений сконструирован алгоритм разностной схемы, осуществляющий мгновенный переход от регулярного процесса к хаотическому и обратно.

В главе 3 рассмотрены модификации уравнения Шрёдера – уравнения Абеля и Бёттхера, связанные соответствующими заменами переменных. Даны также решения функционального уравнения Шрёдера еще для 7 хаотических отображений с использованием метода построения сопряженных отображений (посредством перехода к сопряженному отображению посредством замены переменных с использованием тригонометрических функций. Благодаря их периодичности сопряженное отображение допускает более простое решение уравнения Шрёдера.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В работе, прежде всего, отмечена выдающаяся роль первых исследований итерационных процессов, осуществленная Э. Шрёдером на последующее развитие теории итераций в комплексной области (в развитие голоморфной динамики).

При анализе итерационного процесса $x_{n+1} = f(x_n)$ знание решений функциональных уравнений Шрёдера, Абеля или Бётхера позволяет сформулировать *точные* траекторного решения $x_n = x_n(n,\, x_0)$ на любом шаге итераций. С этой целью уравнения, собственно, и формулировались еще на ранних этапах развития теории итераций функций вещественного и комплексного аргумента. Знание точного решения открывает возможность для исследования асимптотического поведения последовательности x_n. Отсутствие предела имеет место для отображений, демонстрирующих хаотическое поведение.

Уравнения Шрёдера, Абеля и Бётхера дают различные формы представления точного траекторного решения, но они связаны между собой нелинейными заменами переменных. В работе описан общий метод решения этих решений, состоящий в проведении замены переменных в исходном уравнение. Общий критерий выбора такой замены – получение рекуррентной формулы для вычисления значений x_n в зависимости от начальной точки x_0 и числа итераций.

В работе рассмотрены уравнения Шрёдера для итеративной схемы Ньютона, используемой для численного извлечения квадратного корня. Продемонстрировано использование точных решения при нахождении основных характеристик хаотических отображений – показателя Ляпунова, инвариантной плотности, автокорреляционной функции.

Сконструировано зависящее от параметра отображение, которое может демонстрировать как регулярное, так и хаотическое поведение при изменении параметра. Для значений параметра $\mu \in (0,1)$ разностное уравнение (отображение) обладает регулярным решением, монотонно сходящимся к (устойчивой) неподвижной точке $\sqrt{|\ln \mu|}$. Для значений параметра $\mu \in (1,\infty)$ имеют место хаотические режимы. Они характеризуются положительной экспонентой Ляпунова и инвариантной плотностью в форме распределения Коши. Значение параметра $\mu = 1$ – критическая точка, которая отделяет две области параметра, отвечающие двум качественно различным режимам – регулярному и хаотическому.

Сформулирована своего рода *обратная* задача для уравнения Абеля по нахождению итеративной функции по заданной структуре точного решения для итераций.

Приведена сводка решений уравнения Шрёдера для различных отображений, построенных с использованием тригонометрических функций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Iterative Functional Equation. Cambridge University Press, 2008. 576 p.

2. *Kuczma M.* Functional Equations in a Single Variable. Warszawa : PWN-Polish Scientific Publishers, 1968. 383 p.

3. *Alexander D. S.* A History of Complex Dynamics. From Schröder to Fatou and Julia. Braunschweig : Friedr. Vieweg & Sohn, 1994. viii+165 pp. (Series: Aspects of Mathematics. Vol. E24).

4. *Alexander, D. S., Iavernaro, F., Rosa A.* Early days in complex dynamics. A history of complex dynamics in one variable during 1906–1942. Providence, RI; London Mathematical Society, London, 2012, xviii+454 pp. (History of Mathematics, vol. 38. American Mathematical Society).

5. *Милнор Дж.* Голоморфная динамика. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.

6. *Schröder E.* Über iterirte Functionen // Mathematische Annalen. 1870 (1971)[1]. Band 3. Heft 2. S. 296–322. DOI: 10.1007/BF01443992.

7. *Тихонов А. Н., Костомаров Д. П.* Вводные лекции по прикладной математике. М. : Наука, 1984. 192 с.

[1] Том (Band) 3 журнала «Mathematische Annalen» с выходными данными «1871» состоит из двух выпусков (Heft 1 и Heft 2), на выходных данных которых стоит 1870 год. Публикация Э. Шрёдера поступила в журнал в июне 1869 г.

8. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М. : Постмаркеь, 2000. 352 с.

9. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 528 с.

10. *Пайтген Х.-О. Рихтер П.-Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М. : Мир, 1993. 176 с.

11. *де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М. : Иностранная литература, 1961. 248 с.

12. *Аникин В. М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.

13. Улам С. Нерешенные математические задачи. М. Наука, 1964. 168 с.

14. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М. : Мир, 1988. 240 с.

15. *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. СПб. : Невский Диалект; М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 192 с.

16. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. М. : Наука, 1985. 408 с.

17. *Касселс Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений. М. : Издательство иностранной литературы, 1961. 213 с.

18. *Ulam S. M., von Neuman John.* On combination of stochastic and deteministic processes // Bulletin of the American Mathematical Society. 1947. Vol. 53. Number 11. P. 1120.

19. *Аникин В. М.* Автокорреляционные свойства хаотических отображений. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2018. 80 с.

20. *Ямпольский А. Р.* Гиперболические функции. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1960. 195 с.

21. Гиперболические функции. URL: https://www.math10.com/ru/vysshaya-matematika/giperbolicheskie-funktsii/giperbolicheskie-funktsii.html (дата обращения 27.01.2022)