

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г.  
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Синхронизация и формирование пространственно-временных  
структур в многокомпонентных автоколебательных системах с  
параметрической накачкой**

АВТОРФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 2232 гр. магистратуры

направления 03.04.03 “Радиофизика”

Института физики

Рамазанова Ибадуллы Рамзесовича

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_ А.В. Слепнев

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики

д. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_ Г.И. Стрелкова

Саратов 2022 г.

# Введение

Исследование поведения связанных автоколебательных систем относится к числу основных направлений развития нелинейной динамики. Среди многообразия связанных колебательных систем большой интерес представляет взаимодействие колебательных систем с параметрическим воздействием [1, 2, 3].

Параметрическое воздействие является одним из способов, которым можно сообщить энергию колебательной системе. При этом, изменение параметров осциллятора во времени может приводить к появлению неустойчивости в системе. Простейшим примером такой системы служит линейный осциллятор с периодически меняющейся собственной частотой. Исследованию подобных моделей уже посвящено большое количество работ [4, 5], в которых в том числе, приведены различные методы аналитического решения уравнений, описывающих данные модели.

Однако могут встречаться и такие случаи, когда параметрическое воздействие оказывается на автоколебательную систему. Такие модели уже хорошо известны в механике [6, 7]. В работе [6] предложена классификация таких систем в зависимости от вида функции описывающей параметрическое воздействие и для каждого случая проведено аналитическое исследование вблизи резонансов порядка  $1/m$ . Подобные системы могут демонстрировать такие фундаментальные явления как синхронизация [8], мультистабильность, гистерезис, хаос [7] и подавление колебаний [9]. Синхронизация и хаос в системе из двух связанных генераторов ван дер Поля-Матье были также подробно рассмотрены в работе [10].

Модели в виде автоколебательных систем с параметрическим воздействием в последнее время широко применяются для описания поведения перестраиваемых микроэлектромеханических (МЭМС) генераторов высокочастотных колебаний [11, 12].

Микро- и наноэлектромеханические резонаторы применяются в качестве электромеханических фильтров, усилителей, нелинейных смесителей и высокочувствительных сенсоров. В современной электронике могут применяться различные структуры состоящие из множества МЭМС или НЭМС. Массивы из НЭМС используются в качестве датчиков сдвига частоты или генераторов частоты. Поэтому имеется практическая необходимость исследования как индивидуального [13], так и коллективного [14, 15] поведения подобных систем.

Исследованию коллективных явлений в связанных колебательных и автоколебательных системах с локальной и нелокальной связью посвящено большое количество работ [16, 17, 18, 19, 20, 21]. Показаны такие явления как, синхронизация, мультистабильность, бегущие и стоячие волны, подавление колебаний и химерные состояния. При этом, ансамблям параметрических осцилляторов с диссипативной нелокальной связью уделено очень мало внимания. Данная работа направлена на заполнение этого пробела. А исследование диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля-Матье можно считать новой ветвью в изучении параметрических систем.

**Целью работы** является выявление основных режимов динамики кольца генераторов ван дер Поля – Матье и исследование эффекта синхронизации в системе с неидентичными параметрами

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

- Анализ влияния параметрического воздействия на сосредоточенную автоколебательную систему
- Анализ влияния начальных условий и радиуса связи на формирование пространственно-временных структур в одномерном ансамбле
- Исследование особенностей синхронизации элементов ансамбля при разбросе значений собственных частот генераторов

## Основное содержание работы

**В первой главе** представлена модель и методы исследования. Модель представляет собой кольцо из  $N = 100$  диссипативно связанных генераторов ван дер Поля-Матье. Уравнения системы выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = (\varepsilon - x_i^2)y_i - w_{0i}^2 [1 - A_{pi} \sin(w_{pi}t)] x_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (y_j - y_i) \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_i, y_i$  — динамические переменные парциальных генераторов,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\varepsilon$  — параметр возбуждения,  $w_{0i}$  — собственные частоты генераторов,  $w_{pi}$  — частоты параметрического воздействия,  $A_{pi}$  — амплитуды параметрического воздействия,  $\sigma$  — коэффициент связи,  $P$  — радиус связи. Параметр возбуждения  $\varepsilon$  задается равным 0.1 для всех генераторов, при этом в каждом генераторе наблюдаются колебания близкие к гармоническим.

Для численного интегрирования системы 1 была разработана программа на языке C++ и получено свидетельство о регистрации [22]. Интегрирование производится методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования  $h = 0.01$ . В качестве начальных условий задается либо случайное, либо периодическое распределение динамических переменных.

**Во второй главе** показано влияние параметрического воздействия на отдельный генератор ван дер Поля-Матье. Продемонстрирован переход к параметрическому режиму при превышении амплитудой параметрического воздействия некоторого порогового значения на зависимости спектра ляпуновских показателей от амплитуды параметрической накачки (рисунок 1).

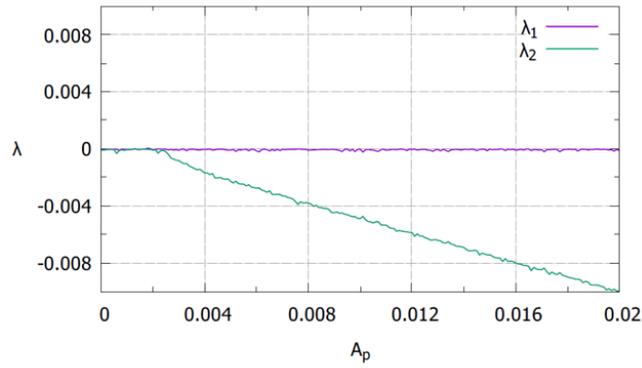


Рисунок 1 — Зависимость двух старших показателей Ляпунова от амплитуды параметрического воздействия

Также установлено, что параметрическое воздействие перестраивает фазу колебаний. На рисунке 2 показано как изменяется во времени разность фаз собственных колебаний, которая вычисляется по формуле  $\varphi(t) = \arctg(\frac{y(t)}{x(t)})$  и фазы параметрической накачки  $w_0 t$ .

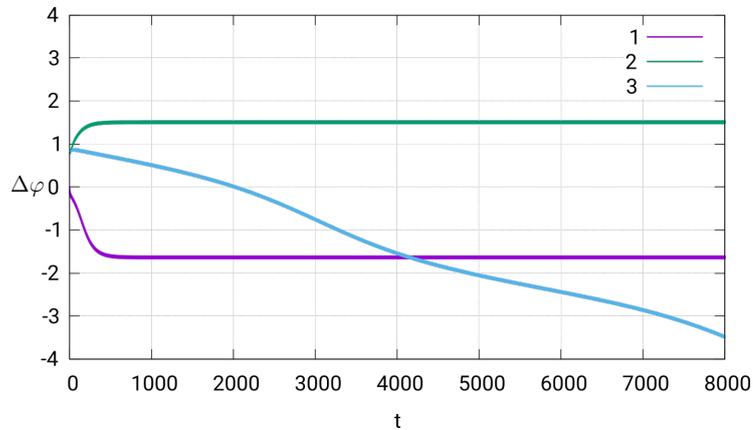


Рисунок 2 — Зависимость во времени разности фаз колебаний генератора ван дер Поля - Матье и фазы параметрического воздействия при  $A_p = 0.02$  (линии 1, 2) и  $A_p = 0.001$  (линия 3).

При амплитуде параметрического воздействия выше порогового значения фаза колебаний генератора перестраивается и в зависимости от начальных условий разности фаз генератора и параметрического воздействия стремятся к значению  $\pi/2$  или  $-\pi/2$ . При небольшом параметрическом воздействии ( $A_p = 0.001$  линия 3) разность фаз постоянно убывает по модулю.

В третьей главе представлены основные режимы динамики кольца генераторов ван дер Поля-Матье при локальной и нелокальной связи, при старте со случайных и периодических начальных условий. Для всех перечисленных случаев построены карты режимов на плоскости параметров амплитуда параметрического воздействия – сила связи. На рисунке 3 показаны карты режимов при нелокальной связи.

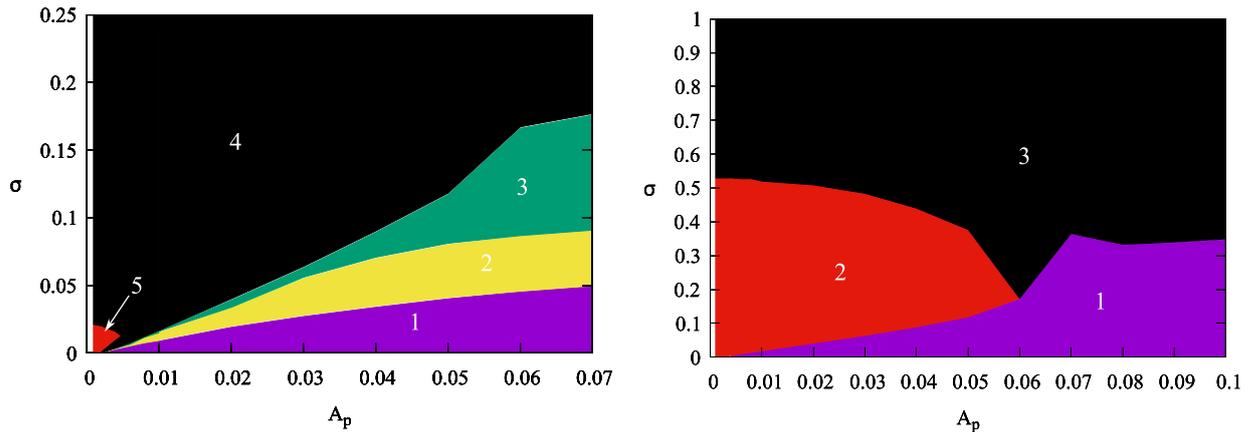


Рисунок 3 — Карты режимов при случайных (слева) и периодических (справа) начальных условиях и нелокальной связи  $P = 10$

При случайных начальных условиях на карте режимов отмечены области кластеризации (1), химерных состояний (2), кластерной синхронизации (3), полной синхронизации (4) и бегущих волн (5). При периодических начальных условиях система демонстрирует режимы кластеризации (область 1), бегущих волн (область 2) и полной синхронизации (область 3).

В случае локальной связи было выявлено только два режима, бегущие волны и кластерная синхронизация (рис. 4), которая проявляется при больших значениях параметрического воздействия.

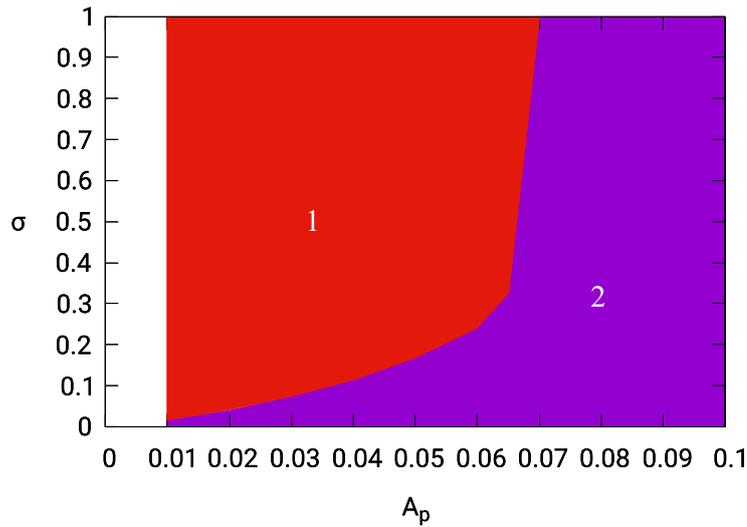


Рисунок 4 — Карта режимов при локальной связи  $P = 1$

Границы этих режимов совпадают при периодических и случайных начальных условиях.

**Четвертая глава** посвящена исследованию синхронизации кольца генераторов ван дер Поля-Матье при случайном распределении собственных частот. Результаты исследования показали, что полная синхронизация частот колебаний возможна только при нелокальной связи (рисунок 5).

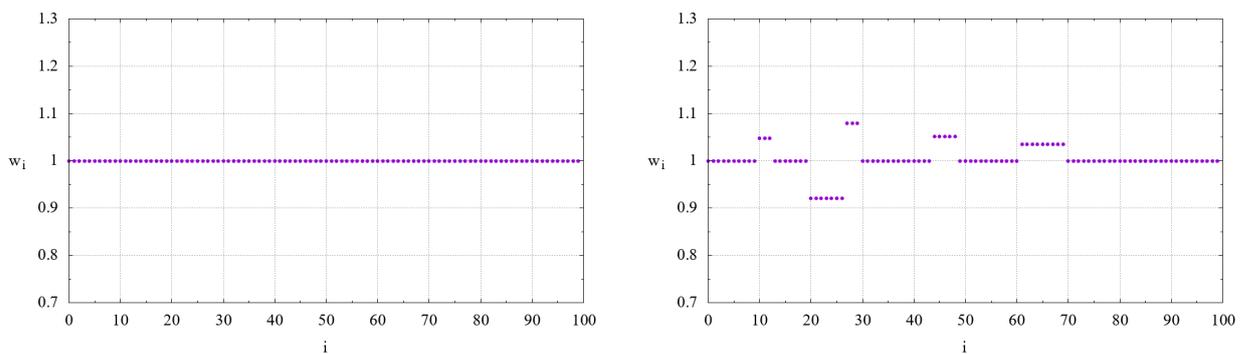


Рисунок 5 — Пространственные диаграммы основных частот генераторов при локальной (а) и нелокальной (б) связи, при  $\sigma = 0.95$ ,  $A_p = 0.1$

В случае нелокальной связи основные частоты всех генераторов приходят к единому значению с увеличением силы связи. При локальной связи частоты генераторов объединяются в несколько кластеров, на границах которых происходит частичное подавление колебаний.

## Заключение

В результате работы было показано влияние параметрического воздействия как на отдельный генератор ван дер Поля-Матье, так и на одномерный ансамбль состоящий из генераторов ван дер Поля-Матье. Выявлены основные режимы динамики исследуемой системы при локальной и нелокальной связи и различных начальных условиях. Для всех рассматриваемых случаев построены карты режимов на плоскости параметров амплитуда параметрического воздействия - сила связи. Показано, что благодаря перестроке фаз генераторов при добавлении параметрического воздействия можно добиться быстрой синхронизации генераторов при старте со случайных начальных условий путем попеременного включения параметрического воздействия и связи.

В случае большого разброса собственных частот колебаний генераторов параметрическое воздействие оказывает положительное влияние на динамику системы. Добавление параметрического воздействия приводит к частотной синхронизации при гораздо меньшем коэффициенте связи и уменьшает область подавления колебаний.

## Список литературы

1. Sosnovtseva O.V. Parametrically induced stochastic synchronization. / O.V. Sosnovtseva, V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov // 2003 IEEE International Workshop on Workload Characterization (IEEE Cat. No.03EX775). – 2003. – V. 2. – P. 577–581.
2. Warminski J. Regular and chaotic vibrations of van der pol and rayleigh oscillators driven by parametric excitation. // Procedia IUTAM. - 2012. - V. 5. - P. 78–87.
3. Changyao C. Self-Sustained Micromechanical Oscillator with Linear Feedback. / C. Changyao, H. Z. Damian, R. G. Jeffrey, A.C. David, L. Daniel // Physical review letters. – 2016. V. 117. – I. 1. – P. 017203.
4. Bena I. Coupled parametric oscillators. / I. Bena, C.V. Broeck // Europhysics Letters. –1999. – V. 48. – P. 498–504
5. Bena I. On the collective behavior of parametric oscillators. / I. Bena, R. Kawai, C. V. Broeck, M. Copelli, K.Lindenberg. // Phys. Rev. E. –2001. – V. 65. – P. 036611.
6. Yano S. Considerations on self- and parametrically excited vibrational systems. / S. Yano // Ingenieur-Archiv. –1989. – V. 59. – P. 285–295.
7. Warminski J. Synchronisation effects and chaos in the van der pol-mathieu oscillator. / J. Warminski // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2001. – V. 39. – P. 861–884.
8. Pikovsky A. Synchronization: A universal concept in nonlinear science. / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, R.C. Hilborn. // American Journal of Physics. – 2002. – V. 70. –P. 655–655.
9. Bora M. Oscillation death in a coupled van der pol–mathieu system. / M. Bora, D. Sarmah. // Pramana. – 2013. V. 81. – P. 677–690.
10. Рамазанов И.Р. Динамика связанных осцилляторов ван дер Поля–Матье.: автореф. ВКР. / И.Р. Рамазанов. – Саратов, 2016.

– 8 с.

11. Pandey M. Frequency locking in a forced mathieu–van der pol–duffing system. / M. Pandey, R.H. Rand, A.T. Zehnder. // *Nonlinear Dynamics*. – 2007. – V. 54. –P. 3–12.
12. Miller J.M. Phase control of self-excited parametric resonators. / J.M. Miller, D.D. Shin, Hyun-Keun Kwon, S.W. Shaw, T.W. Kenny. // *Physical Review Applied*. – 2019. – V. 12. – P. 044053.
13. Kenig E. Homoclinic orbits and chaos in a pair of parametrically driven coupled nonlinear resonators. / E. Kenig, Y.A. Tsarin, R. Lifshitz. // *Physical Review E*. – 2011. –V. 84. – P. 016212.
14. Kenig E. Pattern selection in parametrically driven arrays of nonlinear resonators. / E. Kenig, R. Lifshitz, M.C. Cross. // *Physical Review E*. – 2009. – V. 79. – P. 026203.
15. Lifshitz R. Response of parametrically driven nonlinear coupled oscillators with application to micromechanical and nanomechanical resonator arrays. / R. Lifshitz, M.C. Cross. // *Physical Review B*. –2003. – V. 67. – P. 134302.
16. Мынбаев Д.К. Взаимная фазовая синхронизация генераторов, соединенных по кольцевой схеме. / Д.К. Мынбаев, М.И. Шиленков // *Радиотехника и электроника*. – 1981. – № 2. – С. 361.
17. Vadivasova T.E. Phase-frequency synchronization in a chain of periodic oscillators in the presence of noise and harmonic forcings. / T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Phys. Rev. E*. –2001. – V. 63. – P. 036225.
18. Shabunin A.V. Running waves in a ring of Van-der-Pol oscillators: role of anharmonicity. / A.V. Shabunin, V.V. Astakhov, A.A. Akopov, T.E. Vadivasova // *Proceedings. 2005 International Conference Physics and Control*. – 2005. – P. 389–392.
19. Шабунин А.В. “Странные волны” в ансамбле генераторов Ван-дер-

- Поля // Известия вузов. ПНД. – 2020. – Т. 28, № 2. – С. 186–200.
20. Stankevich N.V. Exciting Chaotic and Quasi-Periodic Oscillations in a Multicircuit Oscillator with a Common Control Scheme. / N.V. Stankevich, O.V Astakhov, A.P. Kuznetsov, E.P. Seleznev // Technical Physics Letters. – 2018. – V. 44. – P. 428–431.
21. Ulonska S. Chimera states in networks of Van der Pol oscillators with hierarchical connectivities. / S. Ulonska, I. Omelchenko, A.S. Zakharova, E. Schöll // Chaos. – 2016. – V. 26, № 9. – P. 094825.
22. Свидетельство № 2022618888 Российская Федерация. Программа для численного моделирования динамики кольца нелокально связанных автогенераторов с параметрической накачкой : №2022618072 : заявл. 03.05.2022 : опубл. 18.05.2022 / Рамазанов И.Р., Слепнев А.В., Корнеев И.А. ; правообладатель СГУ им. Н.Г. Чернышевского.