

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Исследование индуцированной шумом синхронизации в ансамбле
хаотических систем**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 4041 группы
направления 09.03.02. Информационные системы и
технологии

код и наименование направления (специальности)

института физики

наименование факультета, института, колледжа

Илларионовой Екатерины Дмитриевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор кафедры ФОС,

д.ф.-м.н., доцент
должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

О.И. Москаленко
инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

А.А. Короновский
инициалы, фамилия

Саратов 2022 год

Введение

Важное место в мире науки занимает исследование явления хаотической синхронизации динамических систем. Выделяют различные типы синхронизации, такие как обобщенная синхронизация, фазовая синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация. Каждый из них имеет свои особенности и может быть обнаружен определенными методами, которые различны для каждого синхронного режима [1].

Большое значение в изучении динамических систем имеет их численное моделирование. Именно благодаря ему можно с разных сторон рассмотреть динамику системы и выявить ее особенности. Помимо этого, существует большое количество задач, которые не решаются аналитически, а компьютерная реализация позволяет быстро и точно добиться желаемого решения. Примером одной из таких задач является изучение различных типов хаотической синхронизации в модели осцилляторов Лоренца, связанных однонаправленно или взаимно.

Целью данной бакалаврской работы является численное исследование индуцированной шумом синхронизации в ансамбле хаотических систем Лоренца, находящихся под воздействием белого гауссовского шума. Переход от асинхронного состояния к режиму индуцированной шумом синхронизации сопровождается режимом перемежаемости. Для определения статистических характеристик этого режима часто используется метод вспомогательной системы. При этом, данный подход может выявить наличие мультистабильности в этом режиме. Такое поведение связано с возможностью наблюдения для одних и тех же значений управляющих параметров в один и тот же момент времени различных типов поведения (т.е. синхронного и асинхронного) при различных значениях начальных условий ведомых систем [2]. Этот подход был реализован с помощью языка программирования C++ в среде разработки Qt creator. Для наглядной визуализации данных, был выбран язык программирования Python и Gnuplot.

Описание работы

Вся работа состоит из трех глав. В первой главе описываются объекты и методы их исследования.

В качестве объекта исследования был взят осциллятор Лоренца. Система Лоренца – динамическая система, была исследована Э. Лоренцем в 1963 г. Она создавалась с целью построения упрощенной модели атмосферной конвекции для решения вопроса о том, возможен ли долгосрочный прогноз погоды. Лоренц предложил систему из трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (1)$$

Здесь σ , β , r – некоторые положительные числа, называемые параметрами системы. Эта модель оказалась наглядным примером трёхмерной системы, при некоторых условиях (не всегда!) обладающей хаотическим аттрактором [3].

Для того чтобы добиться синхронного режима в осцилляторах Лоренца, их подвергали воздействию общего белого гауссовского шума.

Гауссовский шум – это статистический шум, имеющий плотность вероятности, равную плотности вероятности нормального распределения, также известного как гауссовское. Другими словами, значения, которые может принимать такой шум, имеют гауссовское распределение. Назван в честь Карла Гаусса.

Плотность вероятности p гауссовской случайной величины z равна

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2)$$

где μ – среднее значение и σ – стандартное отклонение.

Частным случаем является белый гауссовский шум, когда значения в любой момент времени являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами (а значит, вместе они не коррелируют) [4].

В основе описания биологических, физических и даже социальных систем часто применяются ансамбли осцилляторов. Немаловажную роль в поведении таких систем играет явление синхронизации: оно наблюдается в поведении людей и животных, в радиотехнике, нейронных структурах мозга и т.д.

Для иллюстрации поведения ансамбля хаотических осцилляторов, рассмотрим следующий набор из N хаотических осцилляторов Лоренца под общим шумом:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \sigma(y_i - x_i) + \xi\varepsilon \\ \frac{dy_i}{dt} = x_i(r - z_i) - y_i + \xi\varepsilon \\ \frac{dz_i}{dt} = x_i y_i - \beta z_i + \xi\varepsilon, \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\sigma = 10$, $r = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ – некоторые положительные числа, называемые параметрами систем, которые в детерминированном случае приводят к хаотическому поведению, ξ – белый гауссовский шум с нулевым средним значением, а ε – управляющий параметр, с помощью которого изменяется интенсивность шумового воздействия [5]. Меняя интенсивность шума (воздействие случайного сигнала) на ансамбль идентичных по управляющим параметрам несвязанных друг с другом хаотических систем, можно добиться идентичности их колебаний, то есть по истечении определенного периода времени, названного переходным процессом, эти системы начинают вести себя идентично. Такой режим носит название режима индуцированной шумом синхронизации.

Во второй главе рассматривается классический вид синхронизации, индуцированной шумом, на примере двух несвязанных осцилляторов Лоренца.

Проведено наблюдение эволюции состояний систем во времени. Для этого использовались две идентичные по управляющим параметрам системы Лоренца, находящиеся под воздействием общего белого гауссовского шума, стартующие из разных начальных точек (уравнения (3) при $N=2$).

Данные системы моделировались с помощью численного метода Эйлера, реализованного на языке программирования C++. Увеличивая значение

параметра ε и опуская переходный процесс, можно добиться синхронизации осцилляторов Лоренца. Чтобы наглядно показать наличие синхронизации, в системе (3), была построена временная эволюция разности двух траекторий z_1 и z_2 [5], соответствующих двум системам Лоренца (Рисунок 1). Видно, что после завершения переходного процесса, состояния взаимодействующих систем становятся идентичными, а разность между ними оказывается равной 0.

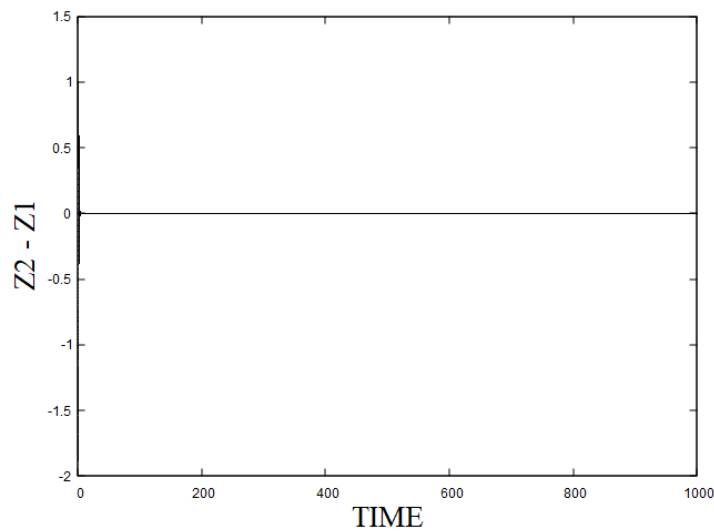


Рисунок 1 – Временная эволюция разности двух траекторий z_1 и z_2 , соответствующих двум системам Лоренца, при значении шума $\varepsilon = 670$

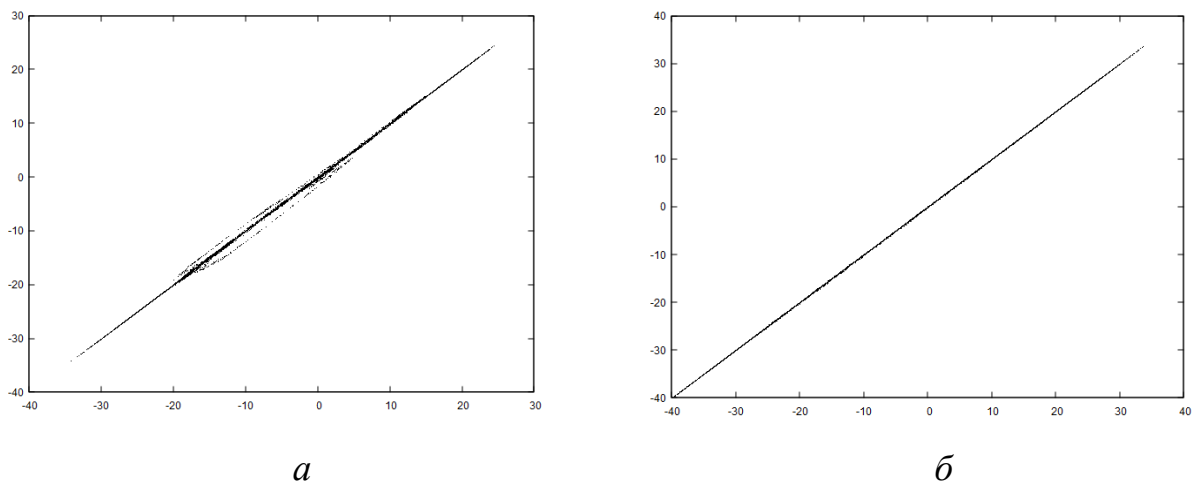


Рисунок 2 – Плоскости состояний $(x_1; x_2)$ двух систем Лоренца, находящихся под действием общего источника шума, при различных значениях интенсивности шумового воздействия: (а) $\varepsilon = 610$, (б) $\varepsilon = 700$

Также были построены зависимости координаты x_1 первой системы Лоренца от координаты x_2 второй системы Лоренца при различных значениях интенсивности шума (Рисунки 2а-б).

Синхронизация происходит тогда, когда на зависимости $(x_1; x_2)$ образуется прямая линия, то есть каждому значению x_1 соответствует такое же по величине значение x_2 . Так, мы можем сделать вывод, что синхронизация идентичных систем Лоренца происходит при величине шума $\varepsilon = 700$, при этом при $\varepsilon > 600$ наблюдается режим, близкий к синхронному.

В данной работе рассмотрен еще один метод диагностики синхронизации, индуцированной шумом, – расчет старшего условного показателя Ляпунова. Для того чтобы численно сравнить эти методы друг с другом, рассчитана средняя разность между состояниями систем, находящихся под действием шума, и построена ее зависимость от интенсивности шума (Рисунок 3).

Расчет средней разности производился по формуле:

$$S = \frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} dt, \quad (4)$$

где T_0 – время переходного процесса, T – время расчета, $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ – координаты первой и второй систем Лоренца, соответственно. Из рисунка видно, что при $\varepsilon > 600$ S становится близкой к нулю в четком соответствии с результатами, приведенными на рисунке 2, а при $\varepsilon = 620$ уже в точности обращается в 0, что отвечает наступлению режима индуцированной шумом синхронизации.

Еще одним способом диагностики синхронизации, индуцированной шумом, является вычисление условного показателя Ляпунова [6].

Расчет для уже известной нам системы Лоренца (уравнения (3) при $N=1$) производится с помощью уравнений в вариациях (5) и алгоритма Бенеттина, представленного в книге [6].

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \sigma(y_2 - x_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = x_2(r - z_1) - y_2 - x_1 z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = x_2 y_1 - \beta z_2 + x_1 y_2 \end{cases} \quad (5)$$

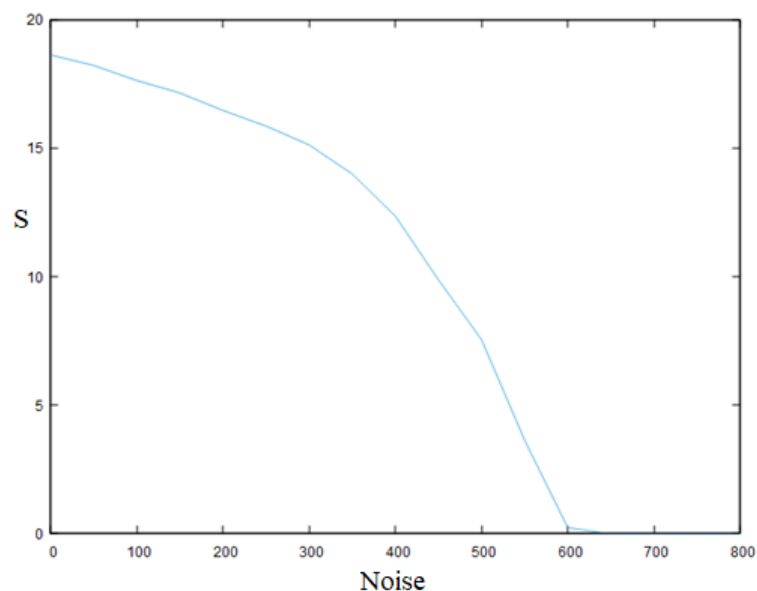


Рисунок 3 – Зависимость средней разности между состояниями систем Лоренца от интенсивности шума ε

Когда системы синхронизированы, старший условный показатель Ляпунова становится отрицательным.

Для выявления данного феномена была построена зависимость получившегося показателя Ляпунова от интенсивности шума. Она приведена на Рисунке 4.

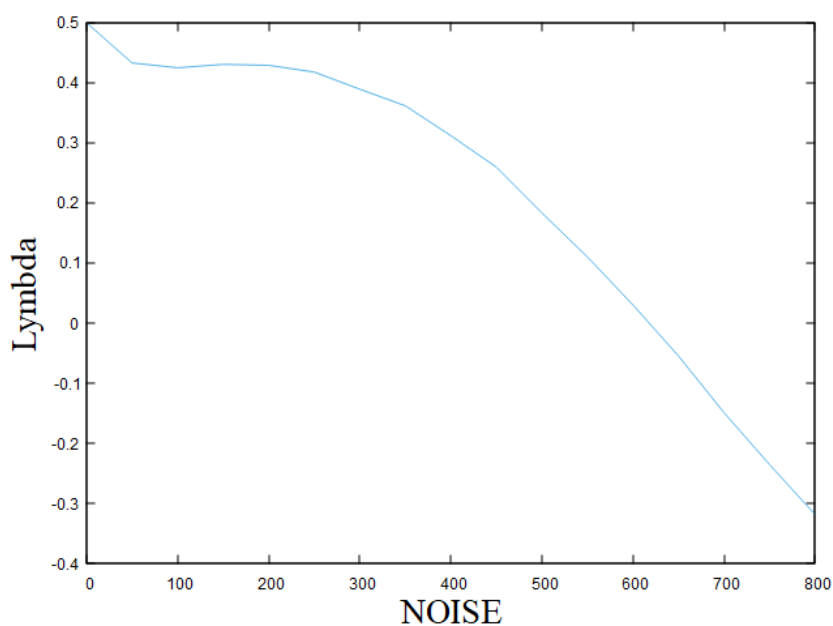


Рисунок 4 – Зависимость старшего условного показателя Ляпунова от интенсивности шума

Как видно из рисунка, старший условный показатель Ляпунова становится отрицательным при интенсивности шума порядка $\varepsilon = 620$, что находится в хорошем соответствии с результатами, полученными при помощи непосредственного сравнения состояний систем, находящихся под действием шума.

В третьей главе рассмотрен ансамбль из $N = 1000$ идентичных систем (формула (3)) Лоренца, подвергающихся одному и тому же источнику шума и стартующих из разных начальных точек.

Сначала рассмотрена динамика каждой системы во времени. Для этого были построены плоскости состояний системы, где по одной оси отложено время после завершения переходного процесса, а по другой – номер системы. Цвет изображающей точки отвечает состоянию системы, то есть характеризует значение одной из координат системы.

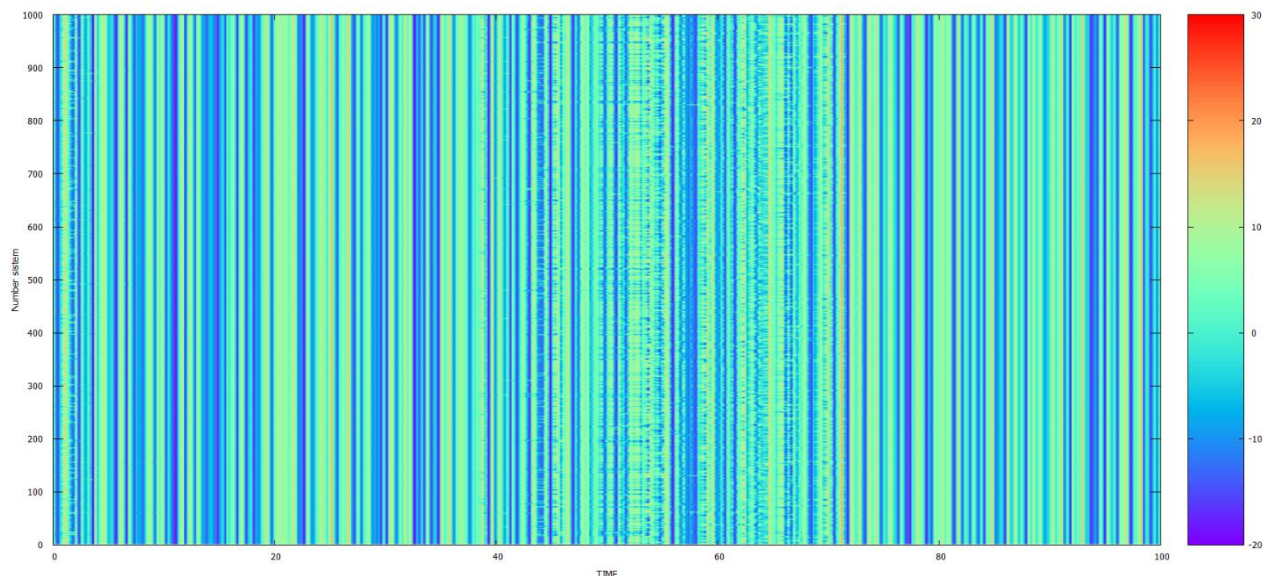


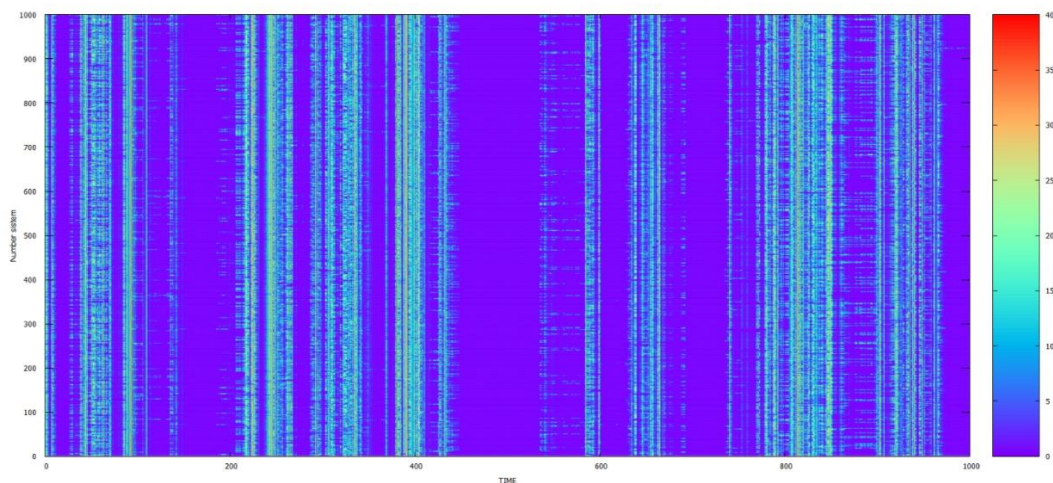
Рисунок 5 – Цветовая карты, характеризующие состояния осцилляторов Лоренца при величине интенсивности шума $\varepsilon = 600$ по координатам x

При данном значении интенсивности шума можно наблюдать, как системы Лоренца только выходят на режим, близкий к синхронному, но еще присутствуют моменты асинхронного поведения.

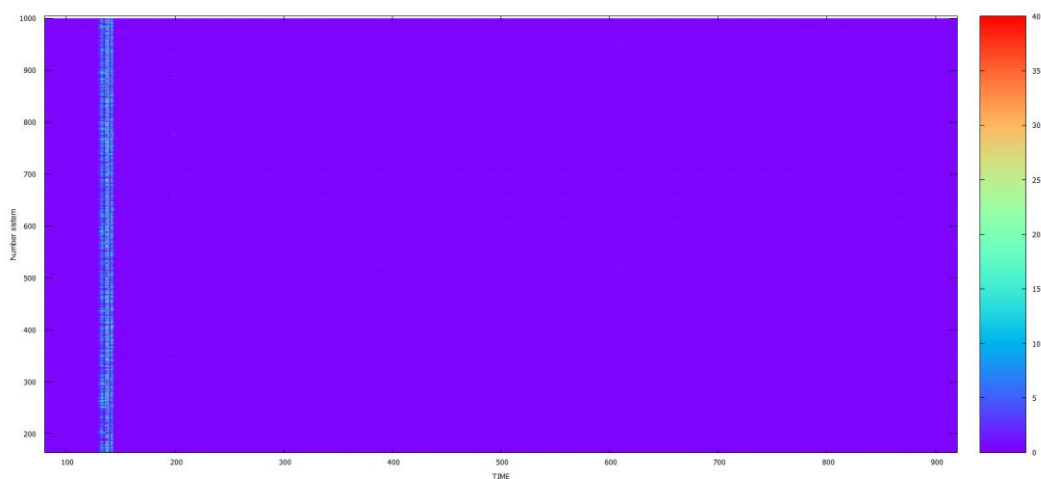
Далее производился расчет усредненной во времени характеристики – среднего расстояния между парами систем, находящихся под действием шума, при этом одна система всегда фиксируется, а остальные меняются:

$$Sr = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2}, i = 1, \dots, N \quad (6)$$

Также построены плоскости, иллюстрирующие временную динамику усредненной разности, для разных значений интенсивности шума, где, как и на рисунке 5, цвет изображающей точки отвечает величине этой разности. Полученные плоскости приведены на рисунке 6.



a



б

Рисунок 6 – Цветовые карты, характеризующие временную динамику усредненной разности (6) для системы (3), при различных значениях интенсивности шумового воздействия: (а) $\varepsilon = 550$, (б) $\varepsilon = 620$

Как можно заметить из приведенных выше рисунков, по мере увеличения величины интенсивности шума ансамбль хаотических несвязанных осцилляторов Лоренца переходят из полностью асинхронного состояния к режиму индуцированной шумом синхронизации (рисунок 6б). Кроме того, был найден режим перемежаемости (Рисунок 6а), при котором происходит чередование фаз регулярного и хаотического поведения. Отметим, что полученные результаты, то есть начало синхронного режима у ансамбля N хаотических осцилляторов, совпадают с результатами, полученными в разделе 2.

Кроме того, в данной бакалаврской работе исследована возможность существования мультистабильности вблизи границы синхронизации, индуцированной шумом. В контексте режима индуцированной шумом синхронизации под мультистабильностью понимается существование в один и тот же промежуток времени синхронного (ламинарного) поведения у одной пары систем, находящихся под действием шума, в то время как у другой пары наблюдается асинхронное (турбулентное) поведение. Такое явление обнаружено в работе [2] в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации.

Чтобы показать наличие/отсутствие мультистабильности вблизи границы индуцированной шумом синхронизации, отдельно построены зависимости разности состояний трех систем с первой от времени. Они приведены на рисунке 7.

Из рисунка видно, что разности состояний трех систем с первой на всем временном промежутке практически совпадают друг с другом, а ламинарные и турбулентные фазы всегда наблюдаются в одни и те же интервалы времени, что свидетельствует об отсутствии мультистабильности вблизи границы индуцированной шумом синхронизации, по крайней мере, при выбранных значениях управляющих параметров системы.

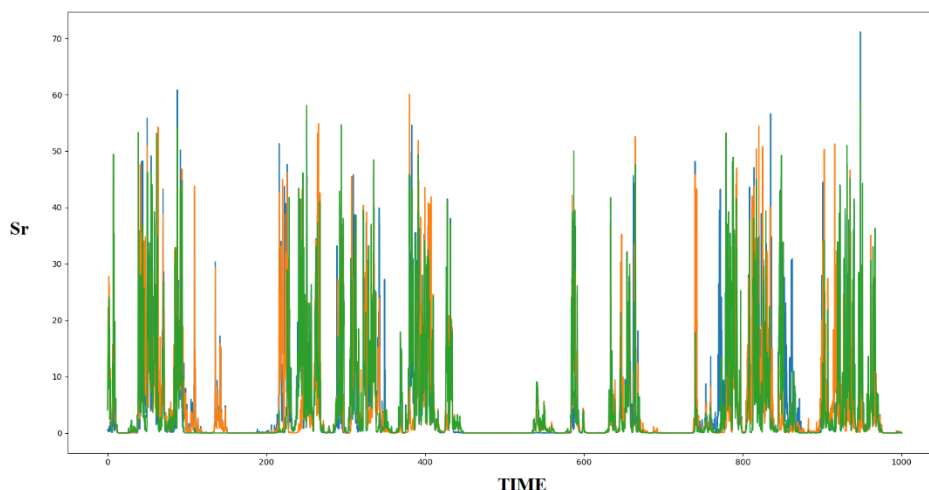


Рисунок 7 – Разности состояний трех систем, находящихся под действием шума, с первой системой для различных значений интенсивности шумового воздействия $\varepsilon = 550$

Заключение

В рамках данной бакалаврской работы рассмотрен режим индуцированной шумом синхронизации в двух несвязанных хаотических осцилляторах и ансамбле аналогичных несвязанных систем. В качестве объекта исследования выбраны системы Лоренца с классическими значениями управляющих параметров, отвечающими реализации в данной системе аттрактора с двулистной структурой. В работе изучены разные подходы: непосредственное сравнение состояний систем и расчет старших условных показателей Ляпунова для разных значений шума. Оба метода показали схожие результаты: режим индуцированной шумом синхронизации диагностировался при интенсивности шума порядка 620.

В работе изучены такие явления как перемежаемость и мультистабильность. Установлено, что независимо от начальных условий переход к индуцированной шумом синхронизации происходит через перемежаемость. При этом, наличие мультистабильности в режиме перемежаемости обнаружено не было.

Список литературы

- [1] Журавлев М.О. Перемежающееся поведение на границе синхронизации временных масштабов [текст] /Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 71, № 7. С. 7-12
- [2] Moskalenko O.I. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems. [текст] /Moskalenko, O. I., Koronovskii, A. A., Selskii, A. O., & Evstifeev, E. V. // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 31.8 (2021): 083106.
- [3] Хаотическое поведение динамических систем [Электронный ресурс], URL: https://mathit.petsu.ru/users/semenova/Nonlinear_Dynamics/Lectures/Lecture_5.pdf свободный доступ. — Загл. с экрана. — Яз. англ. (Дата обращения 25.05.2022)
- [4] Гауссовский шум [Электронный ресурс], URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гауссовский_шум свободный доступ. — Загл. с экрана. — Яз. англ. (Дата обращения 25.05.2022)
- [5] Hramov A.E. Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? [текст] /Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. // Phys.Let A 354. 2006. 423-427
- [6] Кузнецов С. П. Динамический хаос[текст]/Кузнецов С.П.//Издательство Физико-математической литературы. 2001.