

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра физики открытых систем

**Исследование различных типов хаотической синхронизации в системах  
со сложной топологией аттрактора**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента                      4 курса                      4041 группы  
направления 09.09.02. Информационные системы и технологии  
института физики

Передереева Александра Павловича

Научный руководитель  
профессор кафедры ФОС,  
д.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_  
должность, уч. ст., уч. зв.

\_\_\_\_\_  
личная подпись, дата

О.И. Москаленко

\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_  
уч. ст., уч. зв.

\_\_\_\_\_  
личная подпись, дата

А.А. Короновский

\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

Саратов 2022 г.

## Введение

Синхронизация взаимодействующих хаотических осцилляторов является одним из фундаментальных явлений нелинейной динамики [1]. В настоящее время известно несколько типов хаотической синхронизации в связанных нелинейных осцилляторах [2]. Это фазовая синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация и обобщенная синхронизация. Каждый из вышеназванных типов хаотической синхронизации характеризуется своими особенностями, при этом в последнее время в научной литературе активно обсуждается вопрос о взаимосвязи различных типов синхронного поведения друг с другом.

Одним из наиболее эффективных методов анализа различных типов хаотической синхронизации является численное моделирование [3].

Численное моделирование динамических систем давно стало неотъемлемой частью науки. Компьютерные методы моделирования позволяют получить важные выводы для практики о том, какие особенности и признаки математических моделей можно получить. Причиной большой популярности численного моделирования является высокая скорость получения результатов, а также сравнительно небольшая погрешность, которую также можно регулировать при помощи изменения шага нахождения решения.

Целью данной бакалаврской работы является исследование различных типов хаотической синхронизации (обобщенной синхронизации, полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием) в однонаправленно связанных динамических системах при помощи численного моделирования. В качестве объектов исследования выбраны системы с относительно сложной топологией аттрактора – однонаправленно связанные хаотические генераторы Чуа и осцилляторы Лоренца, а для осуществления численного моделирования этих систем использовался язык программирования Python. В ходе выполнения работы изучен вопрос о переходе от одного типа синхронного поведения к другому в таких системах.

## Описание работы

Основная часть работы состоит из трех глав.

В первой главе рассматриваются различные типы хаотической синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах, исследованию которых посвящена настоящая бакалаврская работа.

Обобщенная синхронизация обычно рассматривается для однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, ведущего  $\mathbf{u}(t)$  и ведомого  $\mathbf{v}(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{G}(\mathbf{u}), \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{H}(\mathbf{v}) + \varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  – операторы эволюции,  $\mathbf{A}$  – матрица связи,  $\varepsilon$  – параметр связи [4]. Такой тип поведения подразумевается наличие некой функциональной зависимости  $\mathbf{F}[\cdot]$  между состояниями этих систем такой, что после завершения переходного процесса  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{u}(t)]$ . Для диагностирования обобщенной синхронизации традиционно используют следующие методы и подходы:

1 Метод вспомогательной системы [5] состоит в введении в рассмотрение вспомогательной системы  $\mathbf{v}_a(t)$ , идентичной ведомой системе по управляющим параметрам с отличием в задании начальных условий. При отсутствии обобщенной синхронизации векторы состояний обеих систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, однако, при этом остаются различными. Но при появлении обобщенной синхронизации за счет установления функциональных зависимостей  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{u}(t)]$  и  $\mathbf{v}_a(t) = \mathbf{F}[\mathbf{u}(t)]$ , векторы состояний обеих систем станут идентичными  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_a(t)$  после завершения переходного процесса. По сути, можно утверждать, что в однонаправленно связанных хаотических динамических системах присутствует обобщенная синхронизация, если наблюдается эквивалентность между состояниями ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса.

2 Метод ближайших соседей [4] основан на подтверждении факта наличия функционального соотношения между взаимодействующими системами. Наличие данного соотношения означает, что есть соответствие между всеми близкими состояниями в фазовом пространстве первой системы  $u_n$  и состояниями второй системы  $v_n$ . И наоборот, все близкие состояния в фазовом

пространстве второй системы  $v_n$  соответствуют всем близким состояниям в фазовом пространстве первой системы  $u_n$ . Наличие обобщенной синхронизации определяется путем расчета количественной характеристики

$$d = \frac{1}{N\delta} \|v^k - v^{kn}\|, \quad (2)$$

где  $v^k$  и  $v^{kn}$  – образы ближайших соседей в фазовом пространстве ведомой системы,  $\delta$  – среднее расстояние между случайно выбранными точками в фазовом пространстве ведущей системы,  $N$  – число ближайших соседей [6]. Если значения  $d \rightarrow 0$  режим обобщенной синхронизации наблюдается, а при отсутствии функционального соотношения между системами  $d \approx 1$ .

3 Метод расчета показателей Ляпунова [7] также используется для анализа режима обобщенной синхронизации. Проводится расчет условных показателей Ляпунова для ведомой системы. Предположим, что размерности фазовых пространств для ведущей и ведомой системы равны  $N_u$  и  $N_v$ . Тогда поведение хаотических осцилляторов можно охарактеризовать с помощью спектра показателей Ляпунова ведущей системы  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_{N_u}$ , которые не зависят от параметра связи, и условных показателей Ляпунова – ляпуновских показателей ведомой системы  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_{N_v}$ . О наличии обобщенной синхронизации в динамических системах можно говорить в том случае, если старший условный показатель Ляпунова отрицателен.

Полная синхронизация [8] проявляется для тех же однонаправленно связанных систем  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$ , если векторы их состояний полностью совпадают. Необходимым условием возникновения полной синхронизации является идентичность значений управляющих параметров систем. Если значения управляющих параметров различны, то временная реализация одной из динамических систем сдвигается на некоторый временной промежуток  $\tau$ , что характерно для другого типа поведения – синхронизации с запаздыванием [9]. Однако, при достаточно большом значении параметра связи, временной сдвиг  $\tau$  будет стремиться к нулю, и в системе будет наблюдаться синхронизация, очень близкая к полной.

Для диагностики синхронизации с запаздыванием в однонаправленно

связанных системах обычно используют функцию подобия

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [x_2(t+\tau_0) - x_1(t)]^2 \rangle}{[\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle]^{1/2}}, \quad (3)$$

представляющую собой усредненную разность между сдвинутыми во времени состояниями взаимодействующих систем, нормированную на их средние значения [9], а для диагностики полной синхронизации производят непосредственное сравнение векторов состояний взаимодействующих систем или рассчитывают ошибку синхронизации:

$$s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \|u(t) - v(t)\| dt \quad (4)$$

где  $T_0$  – время переходного процесса,  $T$  – время вычислений [2].

Во второй главе рассматриваются объекты и методы исследования. В качестве объектов исследования различных типов хаотической синхронизации выбраны системы с так называемой сложной (двулистной) топологией аттрактора: две однонаправленно связанные цепи Чуа с кусочно-линейными характеристиками и два однонаправленно связанных осциллятора Лоренца. При этом, под системами со сложной топологией подразумеваются такие системы, фазовое пространство которых состоит из двух различных подпространств, имеющих малую общую область, внутри которой фазовые траектории могут переходить из одного подпространства в другое и наоборот [10].

Поведение однонаправленно связанных цепей Чуа описывается следующими системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{\alpha_x}{\gamma} f(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\gamma} (f(x_2 - x_1) + x_3), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \gamma x_2, \\ \dot{u}_1 &= -\frac{\alpha_u}{\gamma} f(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= -\frac{1}{\gamma} (f(u_2 - u_1) + u_3) + \frac{\varepsilon}{\gamma} (x_2 - u_2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{u}_3 = \gamma u_2,$$

где  $\alpha_x = 10, \alpha_u = 7, \gamma = 3$  – управляющие параметры,  $f(\zeta) = -\frac{m_0}{m_1} \zeta +$

$\frac{1}{2} \left( \frac{m_0 + m_1}{m_1} \right) (|\zeta + 1| - |\zeta - 1|)$ . Функция является безразмерной кусочно-линейной характеристикой по напряжению и току нелинейного элемента  $N$ , где  $m_0$  и  $m_1$  – это проводимости соответствующих ветвей характеристики по напряжению и току. Соотношение  $m_0/m_1$  выбрано как 1/2. Параметр связи  $\epsilon$  определяет влияние одной цепи Чуа на другую цепь. Связь однонаправленная.

Две однонаправленные связанные системы Лоренца, задаются следующими системами уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1 y_1, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) - \epsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -bz_2 + x_2 y_2. \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\sigma = 10$ ,  $b = 83$ ,  $r_1 = 40$ ,  $r_2 = 40$  – управляющие параметры;  $\epsilon$  – параметр связи.

При выбранных значениях управляющих параметров обе системы характеризуются аттракторами типа двойной спирали, то есть являются системами со сложной топологией аттрактора.

Решение систем уравнений (5)-(6) и (7)-(8) осуществлялось численно при помощи метода Рунге-Кутты 4 порядка с шагом  $h = 0.01$  [3]. Для этого была написана программа на языке программирования Python [11].

Python – это высокоуровневый язык программирования общего назначения. Синтаксис ядра Python минималистичен, а его стандартная библиотека включает большой набор полезных функций, которые полностью могут быть использованы для реализации поставленных задач. Это очень практичный язык, код на котором легко дополнять и модернизировать. Python является идеальным кандидатом для написания частей более высокого уровня широкомасштабных научных приложений и управления моделированием в параллельных архитектурах, таких как ПК кластеры или SMP. Библиотеки Python быстро развиваются, легко сохраняются и могут достигать высокой степени интеграции с другими библиотеками,

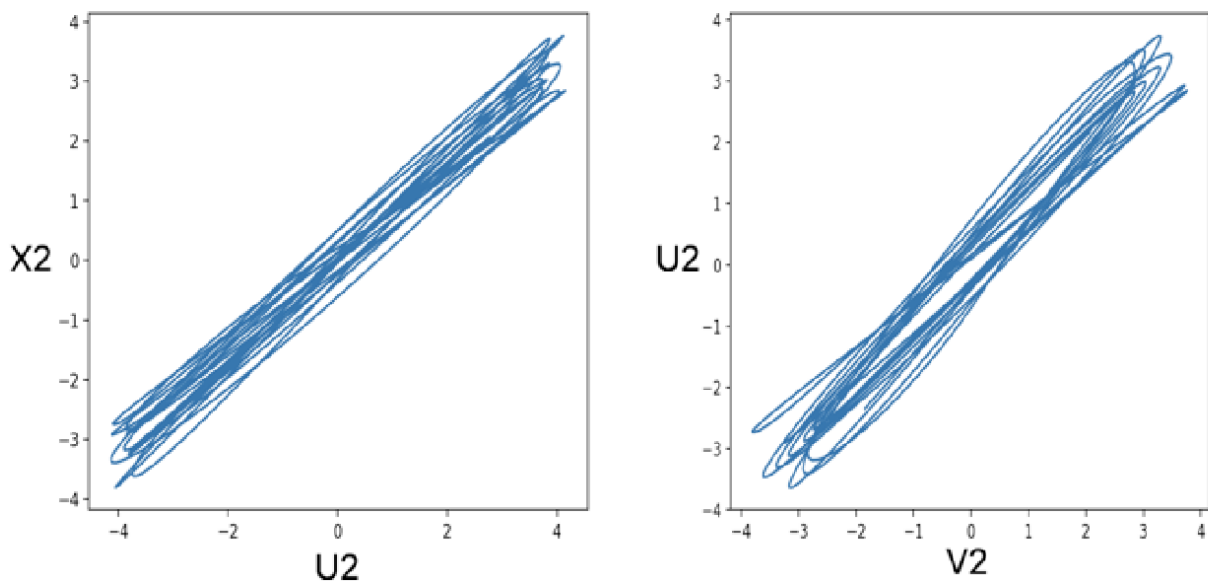
написанными на компилируемых языках.

В третьей главе изложены результаты исследования. Изучена динамика однонаправленно связанных генераторов Чуа (5)-(6) и систем Лоренца (7)-(8) при изменении параметра связи  $\varepsilon$ . По аналогии с системами с относительно простой топологией аттрактора, для которых при увеличении параметра связи происходит последовательный переход от асинхронного состояния к различным типам хаотической синхронизации, проанализирован последовательный переход от асинхронного состояния к режимам обобщенной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации в исследуемых системах.

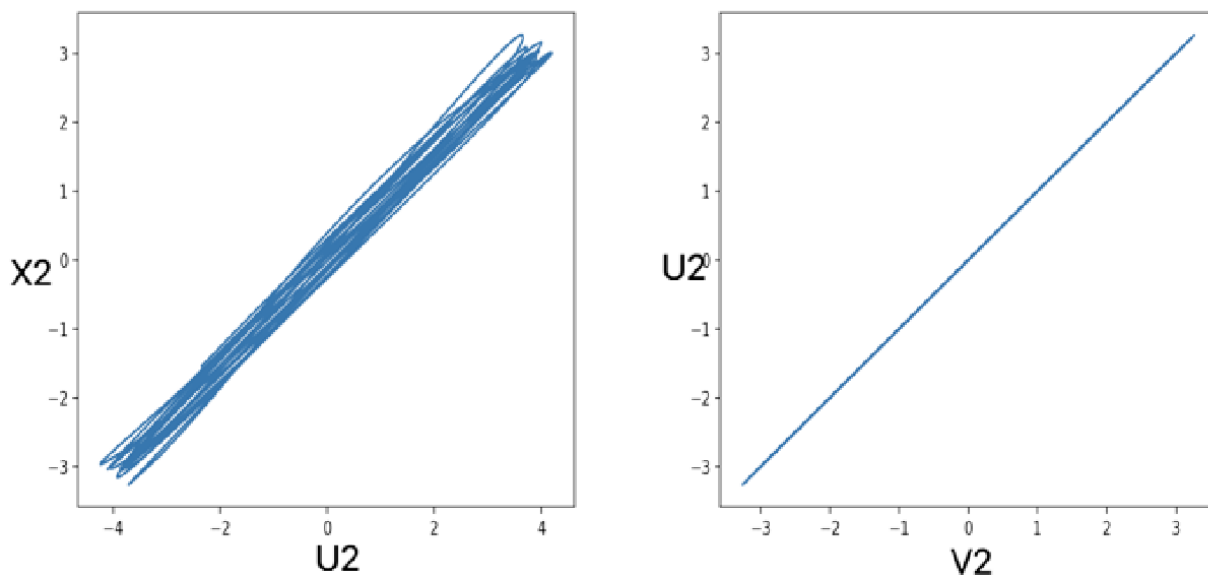
Для диагностики обобщенной синхронизации использовался метод вспомогательной системы, согласно которому достаточно рассмотреть одну из плоскостей состояний ведомой и вспомогательной систем и найти такое значение параметра связи, при котором точки на этой плоскости будут выстраиваться вдоль главной диагонали. На рисунках 1-2 представлены такие плоскости для обеих исследуемых систем. Рисунки *a* соответствуют асинхронному состоянию, *б* – режиму обобщенной синхронизации. Из рисунков видно, что по мере увеличения параметра связи точки на плоскостях  $(u_2, v_2)$ ,  $(y_2, y_3)$  постепенно выстраиваются вдоль главной диагонали, иллюстрируя переход от асинхронного состояния к режиму обобщенной синхронизации. Важно отметить, что при наступлении обобщенной синхронизации на плоскостях  $(x_2, u_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  наблюдается облако точек, что свидетельствует об отсутствии режима полной синхронизации.

При дальнейшем увеличении параметра связи наступает сначала режим синхронизации с запаздыванием, а затем – режим, близкий к полной синхронизации. На рисунках 3-4 представлены плоскости сдвинутых во времени состояний взаимодействующих систем  $(y_1(t); y_2(t + \tau))$ . Как видно из рисунков, по мере увеличения параметра связи область на плоскости состояний сужается, а при значениях  $\varepsilon = 80.01$  для системы Лоренца и  $\varepsilon = 15$  для системы Чуа становится совсем узкой (точки выстраиваются вдоль главной диагонали), что является критерием наличия синхронизации с запаздыванием в исследуемой системе. Значение временного сдвига  $\tau$  при увеличении  $\varepsilon$  для систем Лоренца также

уменьшается, причем эта закономерность подчиняется степенному закону  $\tau = k\varepsilon^{-b}$ , где  $b = 1.4$ . Для генераторов Чуа при достижении синхронизации с запаздыванием временной сдвиг сразу оказывается разным нулю, что говорит о том, что в данном случае режим синхронизации с запаздыванием совпадает с режимом полной синхронизации.



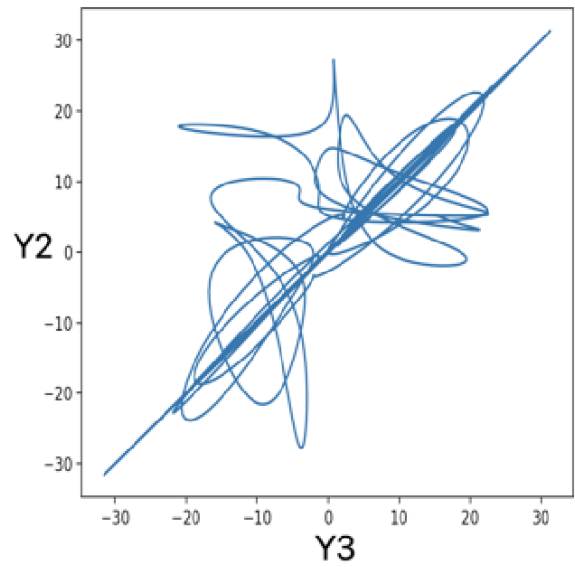
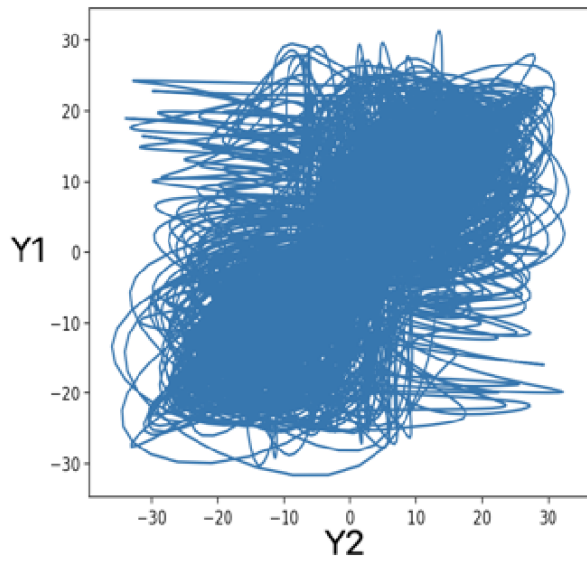
*a*



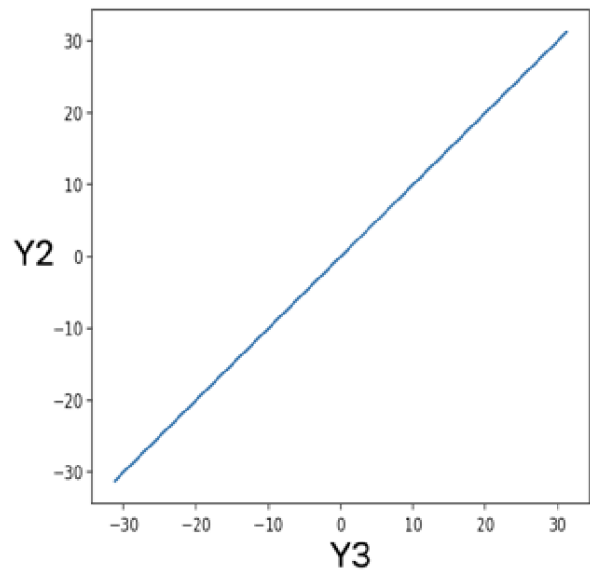
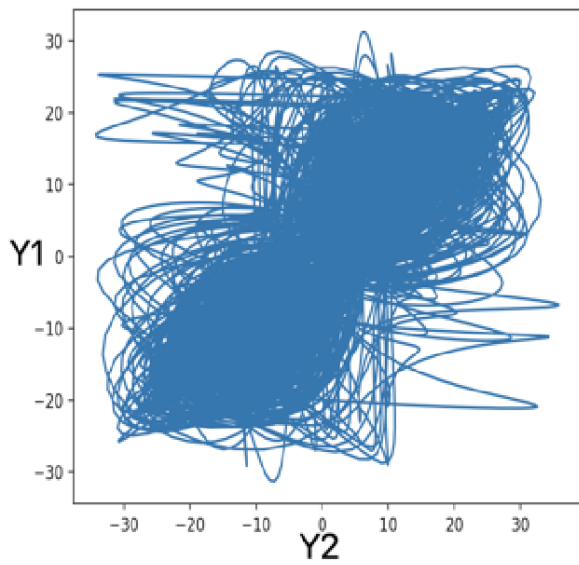
*б*

Рисунок 1 – Плоскости состояний  $(X_2; V_2)$  и  $(U_2; V_2)$  в двух однонаправленно связанных генераторах Чуа при различных значениях параметра связи: (а)  $\varepsilon = 0.3$  – асинхронный режим, (б)  $\varepsilon = 0.534$  – режим обобщенной синхронизации



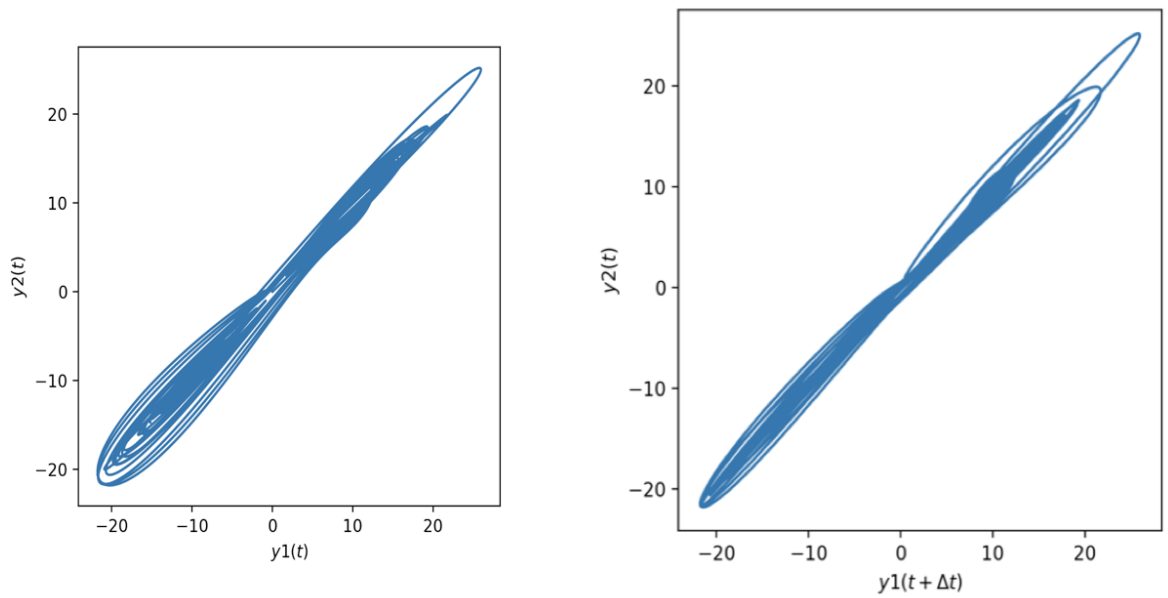


*a*

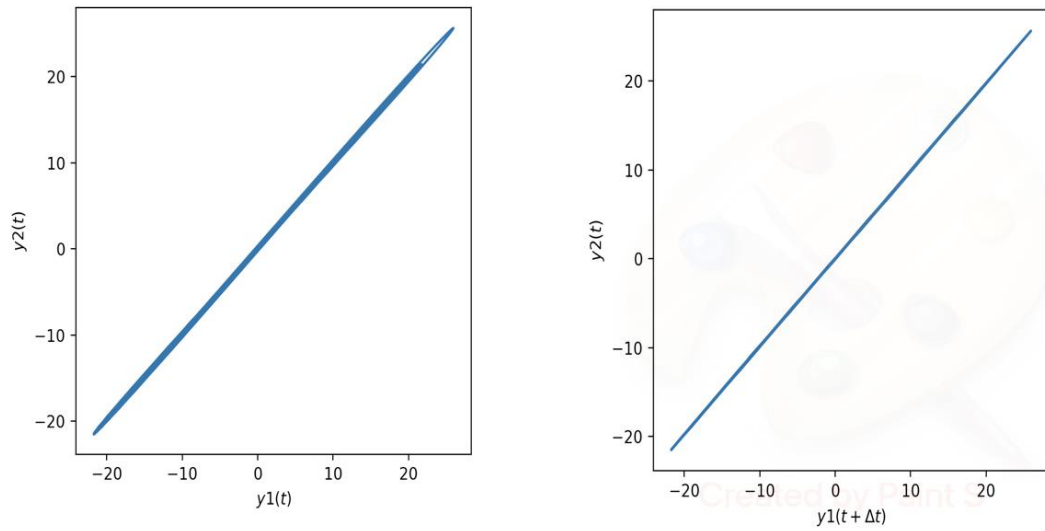


*б*

Рисунок 2 – Плоскость состояний  $(Y_1; Y_2)$  и  $(Y_2; Y_3)$  в двух однонаправленно связанных системах Лоренца при различных значениях параметра связи: (а)  $\varepsilon = 10.6$  – асинхронный режим, (б)  $\varepsilon = 10.61$  – режим обобщенной синхронизации

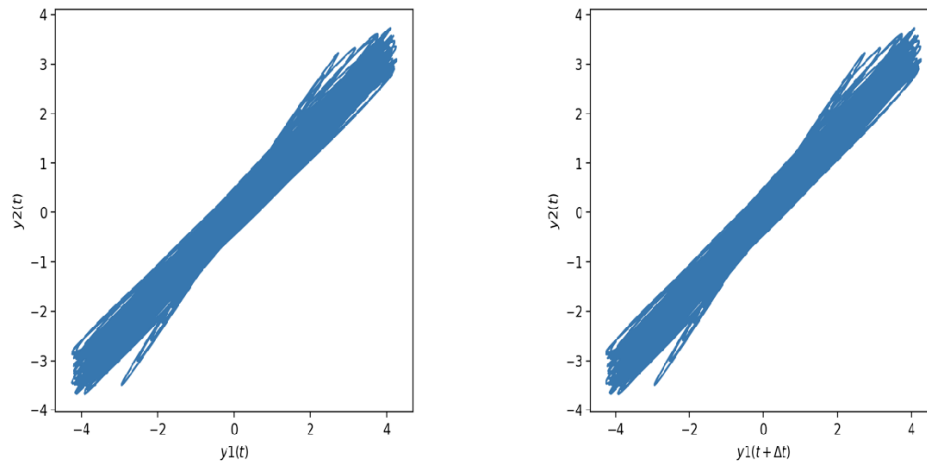


*a*

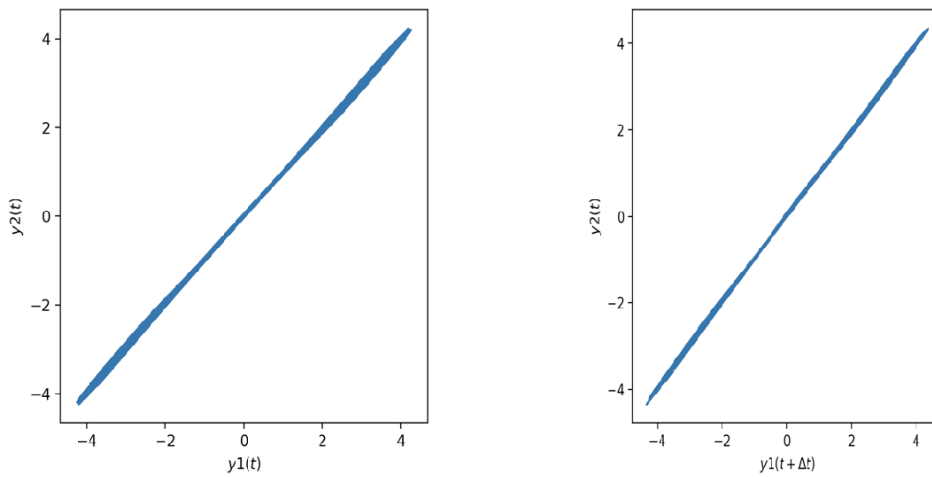


*б*

Рисунок 3 – Плоскости состояний  $(y_1(t); y_2(t))$  и  $(y_1(t + \tau); y_2(t))$  двух однонаправленно связанных систем Лоренца при различных значениях параметра связи: (*a*)  $\varepsilon = 20.01$  – асинхронный режим, (*б*)  $\varepsilon = 80.01$  – режим, близкий к синхронизации с запаздыванием



*a*



*б*

Рисунок 4 – Плоскости состояний  $(u_1(t); u_2(t))$  и  $(u_1(t + \tau); u_2(t))$  двух однонаправленно связанных систем Чуа при различных значениях параметра связи: (а)  $\varepsilon = 0.5$  – асинхронный режим, (б)  $\varepsilon = 15$  – режим, близкий к полной синхронизации

## Заключение

Таким образом, в рамках настоящей бакалаврской работы проведено исследование различных типов хаотической синхронизации в однонаправленно связанных динамических системах со сложной топологией аттрактора. В качестве объектов исследования выбраны системы Лоренца и генераторы Чуа, характеризующиеся аттракторами типа двойной спирали. В ходе работы был исследован вопрос о переходе из одного типа синхронизации к другому в таких системах. Для исследуемых систем построены плоскости, иллюстрирующие состояния взаимодействующих систем, при различных значениях параметрах связи, а также произведен расчет количественных характеристик, характеризующих степень различных типов хаотической синхронизации.

Исследование поведения взаимодействующих систем проводилось при помощи численного моделирования. Проанализировав полученные в ходе него данные, можно сделать вывод о том, что в однонаправленно связанных системах Лоренца возможно возникновение всех типов хаотической синхронизации, рассматриваемых в данной работе: синхронизации с запаздыванием, полной синхронизации и обобщенной синхронизации. Переход от одного типа синхронного поведения к другому в данной системе происходит плавно при увеличении параметра связи. В однонаправленно связанных генераторах Чуа также возможно возникновение режимов обобщенной и полной синхронизации, причем переход от одного типа к другому происходит также при изменении параметра связи. Однако, режим синхронизации с запаздыванием в данном случае пронаблюдать не удалось, т.к. временной сдвиг между состояниями взаимодействующих систем резко падает до нуля, а режим синхронизации с запаздыванием совпадает с режимом полной синхронизации.

## Список литературы

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press (2001).
2. Короновский А.А., Москаленко О.И., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Храмов А.Е. Синхронизация хаоса: фундаментальные подходы и практические приложения. Изд-во Саратовского университета, Саратов (2015).
3. Белоглазкина М.В., Егоров Е.Н., Левин Ю.И. Численное решение уравнений. Учебно-методическое пособие. Саратов (2008).
4. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, Phys. Rev. E, 51 (2) (1995) 980-994.
5. Abarbanel H.D.I, Rulkov N.F, Sushchik M.M, Generalized synchronization of chaos: the auxiliary system approach, Phys Rev. E, 53 (1996) 4528-4535.
6. Parlitz U., Junge L., Lauterborn W., Kocarev L. Experimental observation of phase synchronization. Phys. Rev. E. 54 (2) (1996) 2115-2117.
7. Pyragas K. Conditional Lyapunov exponents from time series, Phys. Rev. E 56 (5) (1997) 5183-5188.
8. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems, Phys. Rev. Lett. 64 (8) (1990) 821-824.
9. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators, Phys. Rev. E 78 (1997) 4193-4196.
10. Ханадеев В.А., Москаленко О.И., Короновский А.А. Перемежаемость вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. Изв. РАН. Сер. физическая. 85, 2 (2021) 265-269.
11. Лутц М. Изучаем Python, том 1, 5-е изд.: Пер. с англ. – СПб.: ООО “Диалектика” (2019).