

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики  
наименование кафедры

**Оптимизация отношения доходности к риску при формировании  
портфеля ценных рисков бумаг**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента (ки) 4 курса 441 группы

направления 09.03.03 «Прикладная информатика»  
код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Уразаевой Алсу Альбертовны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель:

зав. кафедрой, д.ф.-м.н.,  
профессор

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

С.И. Дудов

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой:

зав. кафедрой, д.ф.-м.н.,  
профессор

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

С.И. Дудов

инициалы, фамилия

Саратов 2022

## ВВЕДЕНИЕ

Данная выпускная квалификационная работа посвящена исследованию портфельного инвестирования в прогнозировании экономики.

В выпускной квалификационной работе будут рассмотрены различные источники, в том числе книга А. М. Дуброва, а так же В.И. Малыгина, С.И. Дудова и др. Особенно значительное внимание будет отдано изучению оптимального портфельного инвестирования, постановке и решению задачи оптимизации структуры портфеля и отысканию экспериментальным способом отношения доходности к риску и применение полученных данных при сборе портфеля ценных бумаг на реальных данных. Решение задачи и экспериментальные примеры осуществлялись с помощью информационных технологий. Были использованы вычислительные системы MathCad, Excel, а также язык программирования Python.

**Актуальность** данной темы выявлена Гитманом Л., инвестиции в ценные бумаги в условиях неопределённости связаны с риском того, что фактическая доходность вложений может заметно отличаться от ожидаемой доходности. Данное обстоятельство даёт основание считать доходность ценной бумаги случайной величиной и выбор инвестиционной стратегии осуществлять, опираясь на анализ её числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, ковариации с доходностью других ценных бумаг.

При таком подходе математическое ожидание доходности актива равно ожидаемой доходности, а дисперсия или среднеквадратичное отклонение доходности вполне могут использоваться в качестве меры риска вложений в актив.

Инвестиции играют важнейшую роль в экономике. Они определяют развитие любого государства. Для осуществления инвестиционной деятельности необходимо анализировать принятие решений при разработке и реализации инвестиционных проектов, управлять процессом формирования портфельных инвестиций.

Портфельное инвестирование позволяет планировать, оценивать, контролировать конечные результаты всей инвестиционной деятельности в различных секторах фондового рынка.

Основная задача портфельного инвестирования с точки зрения авторов А. Г. Сухарева, А. В. Тимохова и В.В. Федорова — улучшить условия инвестирования, придав совокупности ценных бумаг такие инвестиционные характеристики, которые недостижимы с позиции отдельно взятой ценной бумаги, и возможны только при их комбинации.

По мнению Первозванского А.А., самой лучшей для инвестора стратегией инвестирования в рамках подхода, который мы рассматриваем, была бы стратегия, которая обеспечивает достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений, но одновременное достижение этих целей невозможно.

Согласно теории Марковица, для принятия решения о вложении средств инвестору не нужно проводить оценку всех портфелей, а достаточно рассмотреть лишь так называемое эффективное множество портфелей и выбрать оптимальный. Выбор портфеля ценных бумаг на основе учёта его ожидаемой доходности и риска известен как подход «доходность – риск». Портфельная теория Марковица была обнародована в 1952 году. Позже автор получил за неё Нобелевскую премию <sup>1</sup>.

Доходность по определению Буренина А. Н., это показатель эффективности вложений в те или иные активы, финансовые инструменты, проекты или бизнес в целом. Риск — это вероятность или угроза потери лицом или организацией части своих ресурсов, части своих доходов, или появления дополнительных расходов.

По модели доходность представляет собой математическое ожидание доходностей, а риск определяется как разброс доходностей возле математического ожидания и рассчитывается через стандартное отклонение. Эта модель позволила снизить систематические (рыночные) риски за счёт группировки активов с отрицательной корреляцией доходностей.

Целью оптимизации портфеля ценных бумаг является формирование такого портфеля ценных бумаг, который бы соответствовал требованиям предприятия, как по доходности, так и по рискованности.

---

<sup>1</sup>Нобелевская премия (швед. Nobelpriset, англ. Nobel Prize) — одна из наиболее престижных международных премий, ежегодно присуждаемая за выдающиеся научные исследования, революционные изобретения или крупный вклад в культуру, или развитие общества.

**Целью** выпускной квалификационной работы является изучение основ теории портфельного инвестирования и применение полученных знаний при проведении вычислительных действий на реальных данных. Для достижения этих целей в работе решались следующие задачи:

1. Изучение основ портфельного инвестирования;
2. Постановка задачи Марковица и изучение ее решения;
3. Рассмотреть математическое представление задачи отношения доходности к риску;
4. Решить задачу аналитически и с помощью программного кода;
5. Формирование оптимального портфеля ценных бумаг на основании полученных данных.

Структура и содержание бакалаврской работы: работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников и приложения

## 1 Основное содержание работы

Во введении указаны некоторые из источников, которые были полезны в написании работы, также указаны информационные технологии, используемые для реализации задачи дипломной работы, обоснована актуальность темы дипломной работы, сформулированы цели и задачи, поставленные для её выполнения. Здесь также кратко описано содержание работы.

Первый раздел «Портфельное инвестирование» включает в себя два параграфа. В нём раскрывается теоретическое содержание темы. Под инвестиционным портфелем понимается некая совокупность ценных бумаг, принадлежащих физическому или юридическому лицу, либо юридическим или физическим лицам на правах долевого участия, выступающая как целостный объект управления. На развитом фондовом рынке портфель ценных бумаг - это самостоятельный продукт и именно его продажа целиком или долями удовлетворяет потребность инвесторов при осуществлении вложения средств на фондовом рынке. Обычно на рынке продаётся некое инвестиционное качество с заданным соотношением риск/доход, которое в процессе управления портфелем может быть улучшено.

Так же раскрыты основные принципы формирования портфеля: принцип консервативности, принцип диверсификации, принцип достаточной ликвидности. Выявлены этапы формирования портфеля: выбор инвестиционной политики, анализ рынка ценных бумаг, описание или моделирование и предсказание изменений курсов активов, определение структуры портфеля. Далее изложены основные проблемы портфельного инвестирования и введены базовые понятия риска и доходности, по которым в дальнейшем будут проводиться все вычисления.

Второй раздел «Задача Г. Марковица» состоит из четырёх параграфов и раскрывает теорию, выдвинутую Г. Марковицем, ее исходные предположения.

Подход Марковица начинается с предположения, что инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег для инвестирования. Эти деньги будут инвестированы на определённый промежуток времени — период владения. Если задать желаемый для инвестора уровень доходности

портфеля, то можно поставить задачу выбора такой структуры портфеля, которая при заданном уровне доходности приводила бы к минимальному риску.

Далее введены обозначения и формулы, а также математическая формализация задачи Г. Марковица:

$$D_p = x^T V x \rightarrow \min_x,$$

$$I^T x = 1, m^T x = m_p.$$

Далее описано её подробное аналитическое решение, с применением теории Лагранжа.

Третий раздел «Задача об эффективном портфеле с максимальным отношением доходности к риску» содержит в себе два параграфа, где описывается задача на поиск оптимального портфеля с максимальным отношением доходности к риску. Поставлена словесная формализация задачи: предположим, что инвестору необходимо выбрать структуру портфеля так, чтобы обеспечить максимально возможное отношение доходности  $m_p$  к риску, поэтому приходим к математической постановке задачи:

$$\frac{(m^T x)^2}{x^T V x} \rightarrow \max_x,$$

$$I^T x = 1; \quad m^T x > 0.$$

Далее получено её аналитическое решение. В ходе решения, получен оптимальный портфель с максимальным отношением доходности к риску со следующими характеристиками:

$$x^* = \frac{V^{-1}m}{a_{12}}, m_p = \frac{a_{22}}{a_{12}}, \sigma_p^2 = \frac{a_{22}}{a_{12}^2}.$$

Полученные формулы оптимального портфеля далее будут использованы для построения экспериментов на модельных и реальных данных.

Четвертый раздел «Вычислительные эксперименты на модельных данных» раскрывает суть эксперимента на модельных данных. На трёх примерах

проиллюстрирован теоретический материал, выведено графическое решение задачи и с помощью программного кода реализована задача Г. Марковица.

Для проведения экспериментов использованы положительно определённые матрицы. Для реализации формул использована программа Mathcad, для реализации программного кода язык программирования Python.

**Пример 1 — случай попарно независимых ценных бумаг**

$$V = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0.49 \end{pmatrix};$$

$$m_p^T = (0.1, 0.2, 0.5);$$

$$\sigma_1 = (V_{11})^{\frac{1}{2}} = 0.2$$

$$\sigma_2 = (V_{22})^{\frac{1}{2}} = 0.4$$

$$\sigma_3 = (V_{33})^{\frac{1}{2}} = 0.7$$

Структура, доходность и риск данного портфеля соответствует формулам, выведенным в главе 3, поэтому получаем характеристики портфеля для примера 1:

$$x^{*T} = (0.524, 0.262, 0.214), m_p = 0.21176, \sigma_p = 0.211$$

Это решение проиллюстрировано графически с помощью языка программирования Python, на графике отмечен портфель с полученными характеристиками на фронте Марковица, проведена прямая из начала координат через точку с координатами  $(m_p^*, \sigma_p^*)$ . В соответствии с рисунком 1.1, мы видим, что прямая является касательной к фронту Марковица.

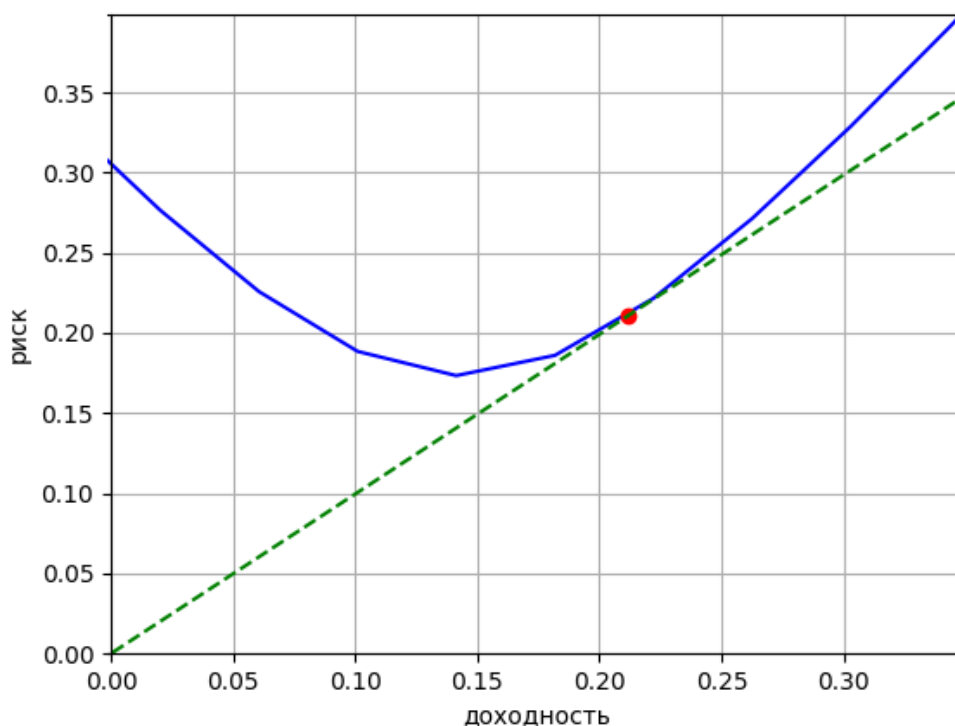


Рисунок 1.1 — Оптимальный портфель на фронте Марковица в примере 1

Далее, проведён дополнительный эксперимент для реализации задачи Г. Марковица с помощью программного кода на языке программирования Python. Подсчитаны риск и структура данного портфеля для различных значений ожидаемой доходности  $m_p$  в интервале  $[0.005; 0.15]$  с шагом 0.005. Мы получили 32 результата, оформленных в виде таблицы.

Аналогичным способом проведены эксперименты для примера 2 и 3, для исходных данных менялась ковариационная матрица.

Пятый раздел, «Вычислительные эксперименты на реальных данных» содержит в себе 4 параграфа. В нём раскрывается суть эксперимента на реальных данных. Перед тем как приступить к формированию портфеля, нам, как инвесторам необходимо определить свои инвестиционные цели, а также провести анализ ценных бумаг разных отраслей экономики, для того, чтобы выбрать самые доходные и менее рисковые. Для этого сначала изучены самые доходные отрасли экономики, а в них выбраны самые доходные компании. Далее, проведён анализ дивидендной политики этих компаний, а также



построен прогноз на будущее с помощью инструментов технического анализа на сайте брокерской компании Финам.

После того, как были выбраны акции, следующим этапом стала подготовка исходных данных. Был сформирован портфель из трёх акций «Сбербанк», «Газпром», «Норникель» на разные периоды владений: июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь.

Для того, чтобы подготовить исходные данные для каждого случая, мы брали цены котировок за предыдущие 6 месяцев для Сбербанка, Газпрома, Норникеля, с помощью встроенных функций Excel подсчитали их доходность и взяли их среднее арифметическое - в качестве прогнозируемого значения доходности на следующий месяц. В соответствии с рисунком 1.2, для составления портфеля на июль, мы взяли данные с 01.01.2021 по 30.06.2021 с месячным таймфреймом и получили исходный вектор ожидаемой доходности:

2021 год	Газпром	Сбербанк	Норникель	<i>m_p</i> Газпром	<i>m_p</i> Сбербанк	<i>m_p</i> Норникель
01.январь	212,83	258,11	24364			
01.февраль	217,56	270,17	23502	0,02222431	0,046724265	-0,035380069
01.март	227,24	291,02	23704	0,044493473	0,077173631	0,008595013
01.апрель	231,38	297,73	25732	0,018218623	0,023056835	0,085555181
01.май	261,03	310,79	26404	0,128144178	0,043865247	0,026115343
01.июнь	263,86	311,6	26750	0,010841666	0,002606261	0,013104075
30.июнь	281,8	306,45	24812	0,067990601	-0,016527599	-0,072448598
<b>ожидаемая доходность:</b>				0,048652142	0,029483107	0,004256824

Рисунок 1.2 — Ожидаемая доходность для портфеля на июль

Далее, построим матрицу ковариаций с помощью функции в Excel – ковариация.в().

В соответствии с рисунком 1.3, получаем исходную матрицу ковариаций для портфеля на июль.

	Газпром	Сбербанк	Норникель
Газпром	0,001952903	0,000162263	-0,000305005
Сбербанк	0,000162263	0,001131827	0,000521383
Норникель	-0,000305005	0,000521383	0,002927823

Рисунок 1.3 — Ковариационная матрица, подсчитанная в Excel

Аналогичным способом, подготавливаем исходные данные для последующих 5-ти случаев. На каждый месяц владения берутся котировки за предыдущие 6 месяцев.

Таким образом, в ходе проделанного эксперимента, мы сформировали оптимальные портфели с максимальным отношением доходности к риску на последовательные месячные периоды владения.

Так, в соответствии с рисунком 1.4, графически показан оптимальный портфель с максимальным отношением доходности к риску со своими характеристиками на июль:

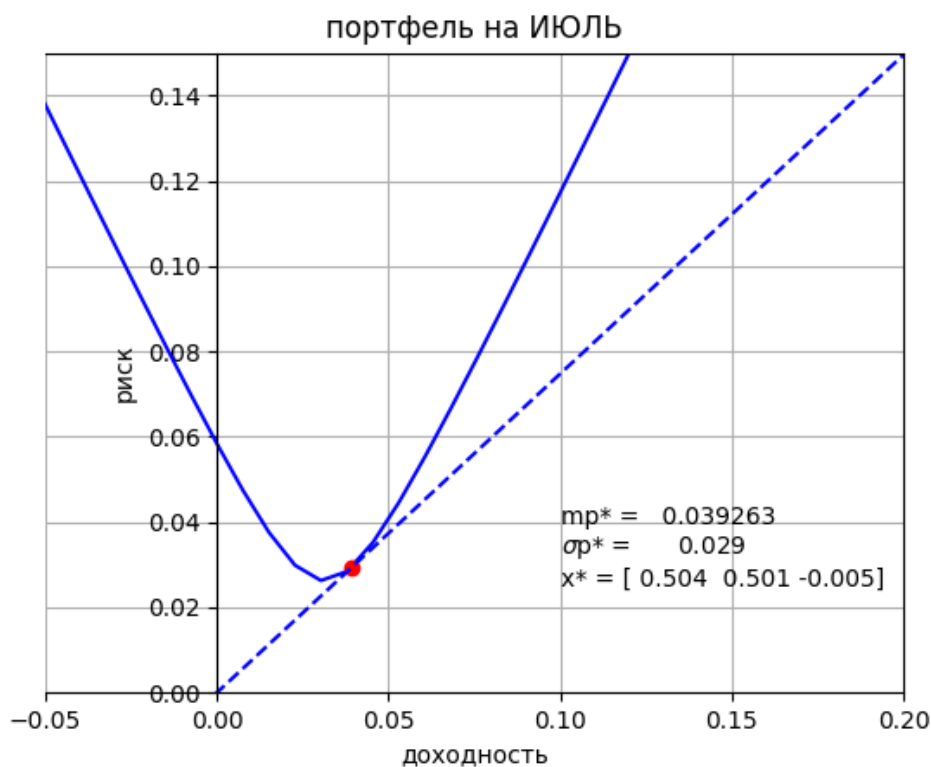


Рисунок 1.4 — График эффективных портфелей на июль с указанием портфеля с максимальным отношением доходности к риску

Аналогичным способом выведены на график оптимальные портфели на последующие периоды владений.

По завершению эксперимента на реальных данных проведён анализ и сравнение полученных результатов.

В заключении сделаны выводы о проделанной работе.

## 2 Основные результаты

1. Определены основные понятия связанные с портфельным инвестированием и задачей Г. Марковица, а так же рассмотрена математическая основа этих понятий.
2. Выбраны основные информационные технологии, с помощью которых была выполнена работа.
3. Применяя полученные знания, был разработан программный код, который автоматически разрабатывает структуру инвестиционного портфеля с максимальным отношением доходности к риску, а также реализовывает задачу Г. Марковица.
4. Изучен финансовый рынок, а также правила формирования портфеля, состоящего из ценных бумаг. С помощью проведения эксперимента на реальных данных, мы убедились, что риск и доходность прямо пропорциональны и зависят друг от друга, то есть чем выше доходность, тем выше риск и наоборот.

Все задачи поставленные вначале были выполнены, тем самым цель достигнута.