## МИНОБРНАУКИ РОССИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

# Особенности устройства фазового пространства слабодиссипативных систем автоколебательного типа, демонстрирующих в консервативном случае наличие стохастической паутины

## АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 2241 группы направления 09.04.02 «Информационные системы и технологии» код и наименование направления <u>Института физики</u> наименование факультета, института, колледжа \_\_\_\_\_\_Чекмаревой Лии Анверовны \_\_\_\_\_\_фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

<u>доцент кафедры ФОС, к.ф.-м.н.</u> должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

<u>Савин Д.В.</u> инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой физики открытых систем полное наименование кафедры

<u>д.ф.-м. н, профессор</u> должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

<u>А.А.Короновский</u> инициалы, фамилия

Саратов 2022 год

#### введение

Понятие динамической системы широко используется в разных областях науки. Известно, что нелинейные динамические системы бывают двух видов – консервативными и диссипативными [1]. Их динамика принципиально различается: в диссипативных начальный объем в фазовом пространстве со временем уменьшается, и все траектории сходятся к одному или нескольким аттракторам, а в консервативных — объём сохраняется, и аттракторов не существует — каждому начальному условию соответствует своя траектория.

Кроме того, в последнее время особенный интерес вызывают системы со слабой диссипацией. Получить такую систему, можно добавив в консервативную систему диссипативные возмущения. К изучению таких систем можно подойти с разных точек зрения (см, например, [2-5]) – радиофизики, математики, теории колебаний и не только. Одним из важнейших свойств диссипативных систем является мультистабильность – сосуществование различных аттракторов. Это значит, что система может принимать то или другое устойчивое состояние при одних и тех же значениях параметров. Если же в нелинейной системе уровень диссипации мал, число аттракторов резко увеличивается, а структура фазового пространства усложняется ([6-8]).

В данной работе была рассмотрена слабо диссипативная система, сконструированная на основе модельной автоколебательной системы осциллятора Ван дер Поля — под импульсным воздействием, специально подобранной переменной амплитуды. При этом подбор функции, определяющей амплитуду внешнего воздействия, был произведен с учетом того, чтобы в консервативном случае система переходила в систему генератор т.н. «стохастической паутины». Такие консервативные системы являются в определённом смысле вырожденными: им присущ тип организации фазового пространства, при котором существует бесконечное количество положений равновесия. При этом окрестности этих положений соединены каналами, по которым точка, описывающая состояние системы, может перемещаться на сколь угодно большое расстояние при сколь угодно малой амплитуде внешнего воздействия [9]. Вызывает интерес вопрос о том, каким образом трансформируется эта специфическая структура при введении в систему диссипации.

Цель работы. Целью данной работы является изучение структуры фазовой плоскости диссипативной версии системы генератора стохастической паутины при малых значениях диссипации, в частности, изучение структуры бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов, а также создание комплекса программ проведения ДЛЯ численного моделирования и исследования поведения таких систем. В рамках работы решались следующие задачи: создание и отладка в среде разработки Lazarus программ для построения фазовых портретов и бассейнов притяжения аттракторов двумерных отображений; изучение структуры аттракторов отображения в областях мультистабильности для системы — генератора «стохастической диссипативными паутины» возмущениями С автоколебательного типа; исследование устройства бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов и изменений их структуры при изменении диссипации; определение характера зависимости количества аттракторов от уровня линейной и нелинейной диссипации; построение распределения относительных площадей бассейнов притяжения аттракторов и изучение их зависимости от параметров диссипации.

Ранее был опубликован ряд работ в этом направлении: исследовалась динамика такой системы при введении линейной [10] и автоколебательной ([11-12]) диссипации, однако вопрос о структуре бассейнов притяжении, количестве и взаимном расположении аттракторов при приближении диссипации к 0 в последнем случае ранее не исследовался – что определяет **новизну** данной работы.

Выпускная квалификационная работа содержит введение, 3 главы (1. Исследуемая система: осциллятор Ван дер Поля под импульсным внешним воздействием; 2. Характер зависимости количества аттракторов от уровня нелинейной и линейной диссипации; 3. Распределение относительных площадей бассейнов притяжения для разных значений параметров диссипации), заключение и список использованных источников. Общий объем работы 46 стр.

### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе рассмотрена слабо диссипативная система, сконструированная на основе модельной автоколебательной системы осциллятора Ван дер Поля — под импульсным воздействием, специально подобранной переменной амплитуды:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - \mu x^2)\dot{x} + x = \sum_m F(x)\delta(t - m\tau)$$
(1.1)

Правая сторона выражения (1.1) соответствует внешнему воздействию: импульсы следуют с периодом т, при этом зависимость амплитуды импульсов от переменной определяется функцией F(x). Параметры є и µ отвечают за линейную и нелинейную диссипацию соответственно. Для данной системы можно получить дискретное отображение вида:

$$x_{n+1} = B \frac{F(x_n) + y_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (F(x_n) + y_n)^2]}},$$
  
$$y_{n+1} = -B \frac{x_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (F(x_n) + y_n)^2]}}$$
(1.2)

В формулах (1.2) введены новые обозначения параметров –  $B = e^{0,5\varepsilon t}$  и  $C = \frac{\mu T (e^{\varepsilon T} - 1)}{4\varepsilon T}$ . Представление периода в виде  $T = \frac{\pi}{2} (4k + 1), k = 0,1,2,...,$  позволяет получить этот вид дискретного отображения. В консервативном случае  $\varepsilon = \mu = 0$  (B=C=0), и система (1.1) переходит при  $F(x) = \lambda cos(x)$  в систему — генератор стохастической паутины [13]. Будем далее рассматривать случаи положительных  $\varepsilon$  и  $\mu$ , много меньших 1 (значения *B* и

C близки к единице и нулю соответственно), при сохранении функции F(x) = $\lambda cos(x)$ . При B < 1 в автономной системе устойчивая неподвижная точка, при B>1 система переходит в предельный цикл. При значениях параметров B=1и C=0 существуют область периодических режимов и область «разбегания» траекторий», в которой динамика является неустойчивой по Лагранжу. При небольшом увеличении параметра С область разбегания траекторий исчезает. При этом появляется область квазипериодических режимов, а также языки синхронизации. При малых значениях параметра Cнаблюдается мультистабильность – сосуществование низкопериодических аттракторов, характерное для слабодиссипативных систем.

Во втором разделе был изучен характер зависимости количества аттракторов от уровня нелинейной и линейной диссипации. В рамках данной работы была создана и отлажена программа для подсчета количества аттракторов и построения их бассейнов притяжения. Т.к. при определенных значениях параметров диссипации в системе присутствует большое количество аттракторов одного периода (для данной системы – периода 4, это объясняется тем, что частота внешнего воздействия системы в 4 раза превосходит собственную частоту автономной системы), потребовалось решить задачу идентификации каждого аттрактора по отдельности

С этой целью для каждого начального условия после переходного процесса запоминалась одна выбранная определённым образом (например, по наибольшему значению одной из координат) точка найденного аттрактора. Выбранные таким же образом точки, полученные далее для следующих начальных условий аттракторов, сравнивались с ней – если совпадения не было, идентифицировался новый аттрактор. Процесс повторялся, пока не была пройдена вся сетка начальных условий (НУ).



Рисунок 2 - Бассейны притяжения системы (1.2) при различных значениях параметров: *C*=0.00005, *B*=1.05 (а), *C*=0.00001, *B*=1.06 б), *C*=0.00005, *B*=1.15 (в), *C*=0.00001, *B*=1.15 (г).

На Рисунке 2 изображены построенные совместно бассейны притяжения и аттракторы при различных значениях параметра *C*. Все обнаруженные аттракторы имеют период 4, бассейны притяжения разных аттракторов обозначены на рисунках точками разного цвета. Цветовое кодирование при этом не обязательно сохраняется для различных рисунков.

На картинках хорошо видно, что область на фазовой плоскости, в которой располагаются аттракторы, имеет форму тонкого кольца. Бассейны притяжения имеют радиальную структуру, они представляют собой четырёхлучевые области неправильной формы. Далее было исследовано, как расположение аттракторов на плоскости зависит от параметров системы.



Рисунок 3 - Графики зависимости количества аттракторов N от параметра нелинейной и линейной диссипации диссипации *C* в двойном логарифмическом масштабе при *B*=1.05 (а), и C=0.000001. Фиолетовым цветом обозначена зависимость количества аттракторов «внутри» кольца, зеленым –общего числа аттракторов.

На картинках хорошо видно на картинках, что обе зависимости в двойном логарифмическом масштабе хорошо аппроксимируются прямыми. На графике же 3 в определенном интервале параметра на графике происходит "флуктуация" – зависимость перестает быть монотонной.

Далее, с целью визуализации расположения аттракторов разных типов на фазовой плоскости, были выбраны два набора параметров диссипации, включающих в себя по одному фиксированному значению параметра линейной (нелинейной) диссипации и несколько значений параметра нелинейной (линейной) диссипации - и в соответствующих точках построены портреты аттракторов, на которых аттракторы с бассейнами только «вне» и «внутри» кольца были изображены точками разного цвета.



Рисунок 4 - Портреты аттракторов при значениях параметров B=1.08, C=0.0005 (a), B=1.08, C=0.0001 (б), B=1.08, C=0.00005 (в), B=1.08, C=0.00003 (г), B=1.08, C=0.00002 (д), B=1.08, C=0.00001 (е). Синим цветом изображены аттракторы с бассейнами «внутри» кольца, красным цветом – только «вне» кольца.

На рисунках 4 хорошо видно, что точки красного цвета, соответствующие аттракторам с бассейнами притяжения только «вне»

кольца, расположены с внешней стороны кольца аттракторов, практически по всей его окружности. С уменьшением диссипации их количество увеличивается, и они плотно заполняют кольцо.

В разделе 3 изучалось распределение относительных площадей бассейнов притяжения для разных значений параметров диссипации. Чтобы получить распределение относительных площадей бассейнов притяжения, программа для бассейнов притяжения была дополнена: нужно было идентифицировать бассейн каждого аттрактора отдельно и посчитать, какое количество начальных условий соответствует именно ему. При этом для каждого нового НУ проводилось сравнение получаемого аттрактора с теми, координаты точек которых уже записаны к данному моменту в массиве, и в случае совпадения координат счётчик, соответствующий данному аттрактору, увеличивался на 1. Важно отметить, что подсчёт производился для области внутри кольца аттракторов.



Рисунок 5 - Бассейны притяжения и их распределение площадей при значениях параметров B=1.05, C=0.001 (а, б). На графиках распределений по оси абсцисс отложены значения относительной площади бассейнов, по оси ординат — количество аттракторов с такой площадью бассейна. Бассейны притяжения построены на плоскости (x, y), масштаб подобран в каждом случае таким образом, чтобы на рисунке было видно кольцо аттракторов полностью.



Рисунок 5 (продолжение) - *B*=1.05, *C*=0.0005 (в, г), *B*=1.05, *C*=0.0001 (д, е), *B*=1.05, *C*=0.00005 (л, м).

На рисунке 5 видно, распределение, начиная с некоторого значения *С* становится характерным, и его форма не меняется: сначала следует несколько максимумов, затем монотонная зависимость. При этом радиус «кольца» при этом увеличивается, а толщина не изменяется. Аналогично

предыдущему случаю были построены такие же распределения для разных значений параметра *В* при фиксированном параметре *C*.



Рисунок 6 - Бассейны притяжения сосуществующих аттракторов (справа) и распределения их относительных площадей (слева) при значениях параметров *C*=0.00001, *B*=1.03 (a, б), *B*=1.04 (в, г), *C*=0.00001, *B*=1.07 (д, е). На графиках распределений по оси абсцисс отложены значения относительной площади бассейнов, по оси ординат – количество аттракторов с такой площадью бассейна. Бассейны

притяжения построены на плоскости (x, y), масштаб подобран в каждом случае таким образом, чтобы на рисунке было видно кольцо аттракторов полностью.

Распределение относительных площадей до момента потери монотонности становится более равномерным при уменьшении параметра *B*. На Рисунке 6 (к) видно, что «кольцо» аттракторов становится почти окружностью: аттракторы располагаются в один ряд.



Рисунок 7 - Бассейны притяжения сосуществующих аттракторов (справа) и распределения их относительных площадей (слева) при значениях параметров C=0.00001, B=1.08 (a, б), C=0.00001, B=1.083 (в, г). На графиках распределений по оси абсцисс отложены значения относительной площади бассейнов, по оси ординат – количество аттракторов с такой площадью бассейна. Бассейны притяжения построены на плоскости (x, y), масштаб подобран в каждом случае таким образом, чтобы на рисунке было видно кольцо аттракторов полностью.





Рисунок 7 (продолжение) С=0.00001, В=1.085 (д, е.).

На рисунках 7 видно, что структура бассейнов притяжения выглядит сложнее, а распределение более равномерное. При этом радиус «кольца» почти не меняется, как и его толщина.

Наконец, были построены распределения для значения параметра линейной диссипации, очень близкого к нулю. Т.к. количество аттракторов оказывается в этом случае очень большим, цветовое кодирование затруднено, и визуализация бассейнов притяжения не имеет смысла.



Рисунок 8 - Распределения бассейнов притяжения относительных площадей при значениях параметров *C*=0.000001, *B*=1.03 На графике распределений по оси абсцисс отложены значения относительной площади бассейнов, по оси ординат – количество аттракторов с такой площадью бассейна.

### Заключение

В данной работе было проведено исследование поведения системы осциллятора Ван дер Поля под импульсным внешним воздействием в случае, когда в фазовом пространстве системы сосуществует большое количество низкопериодических аттракторов. Выявлено, что сосуществующие аттракторы можно разделить на несколько типов в зависимости от расположения их бассейнов притяжения на фазовой плоскости.

Были построены зависимости количества аттракторов различных типов от линейной (нелинейной) диссипации при фиксированном параметре нелинейной (линейной) диссипации. Зависимости, построенные в двойном логарифмическом масштабе, хорошо аппроксимируются линейными функциями, для которых были определены угловые коэффициенты. Следовательно, при приближении параметра линейной диссипации к 1 - что соответствует приближению линейной диссипации к 0 - равно как и приближении нелинейной диссипации к 0 количество аттракторов растёт по степенному закону, причём тем показатель степени тем больше, чем ближе система к консервативной.

Также были построены распределения относительных площадей бассейнов притяжения для разных значений линейной (нелинейной) диссипации при фиксированном параметре нелинейной (линейной) диссипации. Распределения во всех случаях приобретали характерный вид – после достижения максимума распределение становилось монотонным. При этом к такому виду график приходил тем быстрее, чем меньше уровень нелинейной и линейной диссипации.

## Список использованных источников

1. Кузнецов, С.П. Динамический хаос: курс лекций. / С.П. Кузнецов – М. : Физматлит, 2001. – 355 с

2. Морозов, А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Серия современная математика. / А.Д. Морозов. - М.–Ижевск : РХД, 2005. - 424 с.

3. Feudel, U. Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors. /
U. Feudel, C. Grebogi, B.R. Hunt, J.A. Yorke. // Physical Review E. - 1996. –
V. 54, № 1. - P. 71–81.

4. Колесов, А.Ю. О природе явления буферности в слабо диссипативных системах. / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Теоретическая и математическая физика. - 2006. – Т. 146, № 3. С. 447–466.

5. Martins L.C. Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: a map with many coexisting attractors. / L.C. Martins, J.A.C. Gallas // International Journal of Bifurcation and Chaos. - 2008. - V. 18, No 6. - P. 1705–1717.

6. de Freitas, A.S.T. Multistability, basin boundary structure, and chaotic behavior in a suspension bridge model. / A.S.T. de Freitas, R.L. Viana, C. Grebogi. // International Journal of Bifurcation and Chaos. - 2004. –V. 14, № 3. P. 927–950.

7. Feudel, U. Why are chaotic attractors rare in multistable systems? / U. Feudel,
C. Grebogi. // Physical Review Letters. - 2003. – V. 91, № 13. – P. 134102.

8. Rech, P. Basin size evolution between dissipative and conservative limits. /
P. Rech, M. Beims, J. Gallas. // Physical Review E. - 2005. - V. 71, № 1. P. 017202.

9. Заславский, Г.М. Стохастичность динамических систем. / Г.М. Заславский
− М. : Наука, 1984. – 272 с.

 Савин, А.В. Структура бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов слабо-диссипативного "отображения - паутины". / А.В. Савин, Д.В. Савин // Нелинейный Мир. - 2010. Т. 8, №2. – С. 70-71.

11. Фельк, Е.В. Влияние слабой нелинейной диссипации на структуры типа «стохастическая паутина». / Е.В. Фельк. // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. - 2013. – Т. 21, № 3. – С. 72-79.

12. Felk, E.V. Multistability and transition to bhaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation. / E.V. Felk, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin. // Physica A. - 2014. –V. 410. - P. 561–572.

13. Kuznetsov, S.P. Multiparameter Critical Situations, Universality and Scaling in Two-Dimensional Period-Doubling Maps. / S.P. Kuznetsov, A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev // Journal of Statistical Physics. – 2005. - V. 121, № 5-6. – P. 697-748.