МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Оптимизация структуры портфеля ценных рисковых бумаг с ограничениями на короткую продажу методом проекции градиента

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 247 группы

направление 09.04.03 – Прикладная информатика

механико-математического факультета

Луковой Анны Андреевны

Научный руководитель:
профессор, д.ф-м.н, профессор ____________________ С.И.Дудов

Заведующий кафедрой :
зав. кафедрой, д.ф-м.н., профессор ____________________ С.И.Дудов

Саратов 2022

Введение. Проблема риска — одна из ключевых проблем в экономической деятельности. Учет данного фактора напрямую отражается на конечном финансовом результате принятого решения. Риск — это вероятность потери лицом или организацией части своих ресурсов, доходов, или появления дополнительных расходов. Толкование этого понятия неоднозначно и зависит от конкретной ситуации.

В работе будут рассматриваться именно инвестиционный риск, который возникает за счет обесценивания инвестиционно-финансового портфеля, состоящего из собственных и приобретенных ценных бумаг, и основная задача, связанная с данным видом риска — формирование портфеля ценных бумаг через распределение инвестиционного капитала среди различных ценных бумаг.

Под портфельным инвестированием понимается инвестирование с заранее зафиксированными условиями, которые позволяют подобрать наиболее подходящие активы и ценные бумаги в портфель. Кроме того, портфельное инвестирование дает возможность не только планировать и оценивать, но также и контролировать конечные результаты всей инвестиционной деятельности в различных секторах фондового рынка.

Инвестор формирует инвестиционный портфель путем вложения денег в активы. Теоретически, портфель может состоять из одного вида ценных бумаг, но он также может менять свою структуру путем замещения одних бумаг другими. В зависимости от выбранной инвестиционной стратегии портфель будет являться эффективным лишь тогда, когда он обеспечивает самую высокую ожидаемую доходность при заданном уровне риска или самый низкий риск при заданной ожидаемой доходности.

Наиболее актуальная проблема стратегии инвестирования связана с тем, что идеальной для инвестора является стратегия, обеспечивающая достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений. Однако единовременная максимизация доходности и минимизация рисков невозможна, потому что, как показывает практика, данные критерии имеют прямо пропорциональную связь: чем выше риск, тем выше значение ожидаемой доходности.

Целью исследования является программная реализация метода проекции градиента для решения задачи формирования портфеля ценных рисковых бумаг при ограничениях на операцию «короткая продажа».

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие **задачи**:

- рассмотрение основ портфельного инвестирования;
- определение принципов построения портфеля рисковых ценных бумаг;
- описание схемы метода проекции градиента для решения задач оптимизации структура портфеля и его модификация для решения задачи с ограничениями на операцию «короткая продажа»;
- решение модельной задачи нахождения оптимальной структуры портфеля ценных рисковых бумаг рассматриваемым методом;
- проведение вычислительных экспериментов на реальных данных по решению задачи Марковица, а именно: подбор ценных рисковых бумаг, расчет их ожидаемых доходностей, построение матрицы ковариаций, решение задачи нахождения оптимальной структуры портфеля методом проекции градиента с ограничением и без ограничений «короткой продажи» на разные периоды владения, с различным составом ценных бумаг.

Объект исследования – задача формирования портфеля ценных рисковых бумаг при наличии ограничений на операцию «короткая продажа».

Предмет исследования – применение численного метода оптимизации, а именно метода проекции градиента, для приближенного решения задачи Марковица при ограничениях на операцию «короткая продажа».

Основное содержание работы. Работа состоит из пяти разделов:

1. Портфельное инвестирование
2. Задача оптимизации структуры портфеля ценных бумаг
3. Решение задачи Марковица методом проекции градиента
4. Вычислительные эксперименты на модельном примере

5. Вычислительные эксперименты на реальных данных

В первом разделе «Портфельное инвестирование» рассматриваются понятие портфельного инвестирования, подход к формированию портфеля на основании показателей доходности и риска, а также приводятся формулы доходности и риска портфеля ценных бумаг.

В разделе «Задача оптимизации структуры портфеля ценных бумаг» приведены исходные предположения, постановка задачи и аналитическое решение задачи оптимизации структуры портфеля.

Третий раздел «Решение задачи Марковица методом проекции градиента» содержит схему метода проекции градиента, описание алгоритмов поиска проекции точки на допустимое множество в задаче Марковица и поиска проекции точки на допустимое множество при ограничениях на операцию «короткая продажа».

В разделах «Вычислительные эксперименты на модельном примере» и «Вычислительные эксперименты на реальных данных» подробно описаны проведенные в работе вычислительные эксперименты по формированию портфеля ценных рисковых бумаг при возможности и запрещении совершения операции «короткая продажа», построены фронты эффективных портфелей, проведен сравнительный анализ полученных решений.

В рамках практической части четвертого и пятого разделов исследования были написаны программные коды на языке C++, реализующие вычисление ожидаемых доходностей и рисков активов, построение ковариационной матрицы, а также отыскание структуры портфеля ценных рисковых бумаг методом проекции градиента при ограничениях на операцию «короткая продажа».

Задача оптимизации структуры портфеля ценных бумаг, при условии выпуклости функции дисперсии случайной величины доходности портфеля, сводится к задаче выпуклого программирования. То есть она имеет вид

$$F(x) \to \min_{x \in D}, \qquad (1)$$

где $D \subset \mathbb{R}^n$— некоторое выпуклое множество;

а $F(x)$ — выпуклая на этом множестве функция.

Для решения задач вида (1) в выпуклом программировании имеется ряд численных методов приближенного решения. Среди них выделим метод проекции градиента.

Будем считать, что функция $F(x)$ в задаче (1) является дифференцируемой на $\mathbb{R}^n$. Проекцию точки x на множестве D обозначим $pr(x, D)$. Известно, что если множество D является выпуклым, то $pr(x, D)$ состоит из единственной точки.

Метод проекции градиента, как численный метод приближенного решения задачи (1), состоит в построении последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ или $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots}$, которая строится по формуле

$$x_{k+1} = pr(x_k - \alpha_k \cdot F'(x_k)), k = 0,1,\ldots , \tag{2}$$

где α_k — положительная величина.

Если в (2) на некотором шаге оказалось, что $x_{k+1} = x_k$, то, как известно, при условии выпуклости множества D и выпуклости функции $F(x)$, это означает, что решение получено и $\tilde{x} = x_k$, где $\tilde{x} \in \underset{x \in D}{Argmin} f(x)$.

Существуют различные способы выбора коэффициента α_k в (2). Приведем некоторые наиболее часто используемые варианты.

1) Рассмотрим функцию одной переменной

$$f_k(\alpha) = F(pr(x_k - \alpha \cdot F'(x_k)))$$

и возьмем величину $\alpha_k > 0$ так, чтобы

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha \geq 0} f_k(\alpha) = \tilde{f}_k . \tag{3}$$

Поскольку функция $F(x)$ является выпуклой, то и функция $f_k(\alpha)$ будет выпуклой на $\mathbb{R}_+$. Поэтому значение α_k, как результат решения вспомогательной задачи (3), можно получить, например, методом деления отрезка пополам или методом золотого сечения.

2) Более простой способ заключается в выборе какого-либо значения α_k, обеспечивающего условие монотонности:

$$F(x_{k+1})<F(x_k) \quad .$$

Для этого можно взять некоторую постоянную величину $\alpha>0$ и сначала положить $\alpha_k=\alpha$. Но если условие монотонности при этом не выполняется, то берем $\alpha_k=\frac{\alpha}{2}$ и снова проверяем условие монотонности и так далее.

Имеет место утверждение 1.

Теорема 1. Пусть D — выпуклое замкнутое множество, а $F(x)$ — выпуклая на множестве D и дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. Если последовательность, которая строится в соответствии с (2) является бесконечной, то есть $x_{k+1}\neq x_k, k=0,1,\ldots$, и коэффициент α_k выбирается одним из указанных способов, то

$$\lim_{k\to\infty} F(x_k)=\widetilde{F}=\min_{x\in D} F(x) \quad .$$

Целевая функция $F(x)$ и допустимое множество аргументов D в задаче Марковица при ограничениях на операцию «короткая продажа» имеют вид:

$$F(x)=x^T V x,$$
$$D=\left\{x=\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n : I^T x=1, m^T x=m_p, x^{(i)}\geq -a_i, i=\overline{1,n}\right\},$$

где $x=\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n$ — структура портфеля;

$V=\left(V_{ij}\right)_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n}$ — положительно определенная ковариационная матрица;

$I=(1,1,\dots,1)^T$ — единичный вектор-столбец;

$\mathrm{m}=\left(m^{(1)},\mathrm{m}^{(2)},\dots,\mathrm{m}^{(n)}\right)^T$ — вектор ожидаемых доходностей ценных бумаг;

m_p – ожидаемая доходность портфеля;

$a=(a_i\geq 0, i=1,2,\dots,n)$ — ограничения на операцию «короткая продажа» для всех видов бумаг.

Наличие ограничений на «короткую продажу» в виде $x^{(i)}\geq -a_i\geq 0, i=\overline{1,n}$ является естественным и может объясняться, например, уровнем доверия кредитора инвестору (или его кредитной историей).

Примем обозначения:

$$y_k=x_k-\alpha_k F'(x_k),$$

$$e_i=(0,\dots,0,1_i,0,\dots 0)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\pi_{n+1}:\{x\in\mathbb{R}^n: I^T x=1\},\ \ \pi_{n+2}:\{x\in\mathbb{R}^n: m^T x=m_p\},\ \pi_i:\left\{x\in\mathbb{R}^n: x^{(i)}=-a_i, i=\overline{1,n}\right\}.$$

Здесь e_i — единичный вектор (орт), i-ая компонента которого равна единице, а остальные равны нулю.

Каждое из этих множеств является гиперплоскостью. Причем, орт e_i является нормалью к гиперплоскости π_i для индексов $i\in[1:n]$. Нормалью к π_{n+1} является вектор I, а к π_{n+2} — вектор m.

Если $y_k\notin D$, то алгоритм отыскания проекции точки $z_k=pr(y_k,D)$ заключается в следующем.

Сначала ищем множество индексов

$$J(x_k)=\{i\in[1:n]: x_k^{(i)}=-a_i, e_i^T\cdot F'(x_k)>0\}.$$

Заметим, что выполнение неравенства $e_i^T\cdot F'(x_k)>0$ эквивалентно положительности i-ой компоненты градиента $F'(x_k)$.

Далее проекция точки y_k на допустимое множество D ищется в виде:

$$\begin{aligned} z_k &= pr(y_k, D) \\ z_k &= y_k + \hat{\beta} I + \hat{\gamma} m + \sum_{i \in J(x_k)} t_i \cdot e_i \end{aligned} \tag{4}$$

при условии

$$z_k \in \pi_{n+1} \cap \pi_{n+2} \cap \underset{i \in J(x_k)}{\pi}{}_i.$$

То есть коэффициенты $\hat{\beta}, \hat{\gamma}, t_i (i \in J(x_k))$ должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\begin{cases} I^T \cdot z_k = 1, \\ m^T \cdot z_k = m_p, \\ z_k^{(i)} = -a_i, i \in J(x_k). \end{cases} \tag{5}$$

С учетом (4) систему (5) можно переписать в явном виде относительно искомых коэффициентов $\hat{\beta}, \hat{\gamma}, t_i (i \in J(x_k))$:

$$\begin{cases} \sum_{i \notin J(x_k)} (y_k^{(i)} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} m^{(i)} + t_i) - \sum_{i \in J(x_k)} a_i = 1, \\ \sum_{i \notin J(x_k)} m^{(i)} (y_k^{(i)} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} m^{(i)} + t_i) - \sum_{i \in J(x_k)} m^{(i)} a_i = m_p, \\ y_k^{(i)} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} m^{(i)} + t_i = -a_i, i \in J(x_k). \end{cases}$$

Замечание 1. Блок-схема реализации метода проекции градиента для решения задачи Марковица с ограничениями на операцию «короткая продажа» и при использовании второго способа выбора коэффициента α_k представлена на рисунке 1:

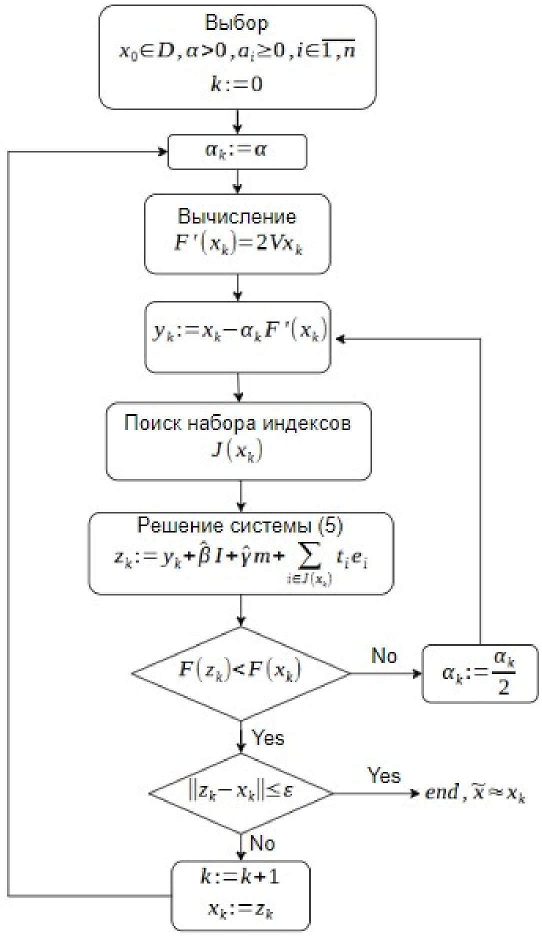

Рисунок 1 — Блок-схема реализации метода проекции градиента для решения задачи Марковица при ограничениях на «короткую продажу»

Здесь $\varepsilon > 0$ — заданная погрешность решения задачи.

Замечание 2. Для случая, когда портфель состоит из n видов ценных рисковых бумаг и исходя из равенств $I^T x=1, m^T x=m_p, i=1,2,\dots,n$, можно, например, взять начальную точку x_0 в виде:

$$x_0=\left(\frac{m_n-m_p}{m_n-m_1}, 0, 0, \dots, 0, \frac{m_p-m_1}{m_n-m_1}\right), \tag{6}$$

где $m_i, i=\overline{1,n}$ — ожидаемая доходность i-го вида бумаг, причем, выполняются неравенства $m_1<m_2<\dots<m_n$.

Для проведения вычислительных экспериментов рассмотрим несколько компаний из различных отраслей (информационные технологии, общественное питание, стриминг и DVD-by-mail), что увеличивает диверсификацию портфеля и снижает его рыночный риск. Выберем акции таких зарубежных компаний, как Netflix, Inc., McDonalds, Alphabet Inc. Возьмем период рассмотрения динамики изменения стоимости акций за 2021 год, будем брать цену закрытия каждого месяца, стоимость акций указана в долларах США (рисунок 2). Данные возьмем с сайта инвестиционной компании Финам.

Дата	Netflix, Inc.	McDonalds	Alphabet Inc.
01.01.21	532,14	207,90	1833,86
01.02.21	539,24	206,15	2036,99
01.03.21	521,84	224,02	2068,63
01.04.21	513,80	236,02	2408,69
01.05.21	502,93	233,87	2410,61
01.06.21	528,07	231,01	2505,95
01.07.21	517,74	242,78	2704,76
01.08.21	569,19	237,43	2908,62
01.09.21	610,47	241,10	2663,65
01.10.21	690,47	245,53	2965,39
01.11.21	642,22	244,48	2849,65
01.12.21	602,69	268,05	2893,55

Рисунок 2 – Стоимость акций за 2021 год

Для нахождения ожидаемой доходности активов за период, а также для построения матрицы ковариаций воспользуемся разработанной программой на языке C++. На рисунке 3 результат работы данного кода. Тайм-фрейм составляет 1 месяц. Предполагалось, что $a_i = 0, i = \overline{1,n}$, то есть, операция «короткая продажа» полностью запрещалась.

```
Ожидаемая ежемесячная доходность Netflix:
0.0133424 -0.0322676 -0.015407 -0.0211561 0.0499871 -0.0195618 0.0993742 0.0725241 0.131047 -0.0698799 -0.0615521
Ожидаемая ежемесячная доходность McDonalds:
-0.00841751 0.0866845 0.0535666 -0.0091094 -0.012229 0.0509502 -0.0220364 0.0154572 0.0183741 -0.00427646 0.0964087
Ожидаемая ежемесячная доходность Alphabet:
0.110766 0.0155327 0.164389 0.000797114 0.0395502 0.0793352 0.0753708 -0.0842221 0.113281 -0.0390303 0.0154054

Ожидаемая доходность Netflix:
0.0133136
Ожидаемая доходность McDonalds:
0.0241248
Ожидаемая доходность Alphabet:
0.0446523
Ковариационная матрица:
 0.00438159 -0.00129794  0.00103189
-0.00129794  0.00172558 0.000169236
 0.00103189 0.000169236  0.00528283
```

Рисунок 3 – Вычисление ожидаемых доходностей и ковариационной матрицы

Результаты решения задачи, полученные при помощи разработанной программы, для различных положительных α, вычисляемых по формуле $\alpha_k = \frac{\alpha}{2}$, а также для различных значений доходности портфеля представлены в таблице 1. В качестве α_0 положим 1. Погрешность решения $\varepsilon = 0.001$.

Таблица 1. Результат решения задачи на реальных данных

Доходность	Решение задачи без ограничений на «короткую продажу»				Решение задачи с запретом «короткой продажи»			
	Доля бумаги 1	Доля бумаги 2	Доля бумаги 3	Риск	Доля бумаги 1	Доля бумаги 2	Доля бумаги 3	Риск
0,014	0,612893	0,557546	-0,170439	0,043816	0,936970	0,062788	0,000242	0,060129
0,016	0,556132	0,546771	-0,102903	0,038987	0,752113	0,247573	0,000314	0,048628
0,018	0,500563	0,534176	-0,034739	0,034776	0,566916	0,432877	0,000207	0,037876
0,020	0,446677	0,519011	0,034312	0,031457	0,446677	0,519011	0,034312	0,031457
0,022	0,393908	0,502143	0,103950	0,029311	0,393908	0,502143	0,103950	0,029311
0,024	0,342736	0,482835	0,174429	0,028633	0,342736	0,482835	0,174429	0,028633
0,026	0,293112	0,461164	0,245724	0,029530	0,293112	0,461164	0,245724	0,029530
0,028	0,244979	0,437216	0,317805	0,031874	0,244979	0,437216	0,317805	0,031874
0,030	0,197746	0,411896	0,390359	0,035359	0,197746	0,411896	0,390359	0,035359
0,032	0,151862	0,384514	0,463624	0,039710	0,151862	0,384514	0,463624	0,039710
0,034	0,107765	0,354406	0,537829	0,044703	0,107765	0,354406	0,537829	0,044703
0,036	0,064819	0,322539	0,612641	0,050130	0,064819	0,322539	0,612641	0,050130
0,038	0,022890	0,289122	0,687989	0,055867	0,022890	0,289122	0,687989	0,055867
0,040	-0,017671	0,253613	0,764057	0,061846	0,000349	0,226104	0,773547	0,062533
0,042	-0,057091	0,216365	0,840726	0,068003	0,000200	0,128900	0,870899	0,070198
0,044	-0,095691	0,177864	0,917827	0,074288	0,000003	0,031771	0,968226	0,077968

Фронты эффективных портфелей на основе полученных результатов представлен на рисунке 4.

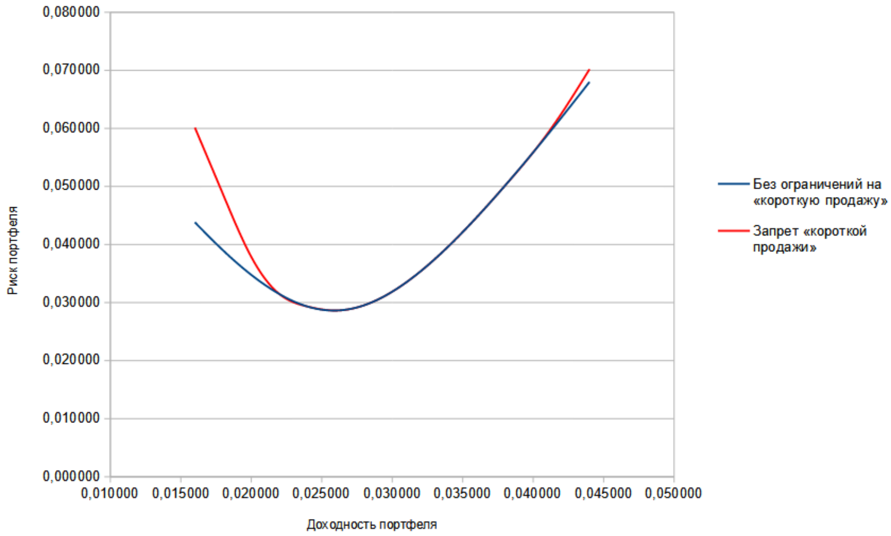

Рисунок 4 – Фронты эффективных портфелей при возможности и запрещении «короткой продажи»

Как видно, при значениях ожидаемой доходности портфеля, для достижения которых в решении задачи без ограничений появляется «короткая продажа», решение с запретом данной операции позволило избавиться от отрицательных долей ценных бумаг в портфеле, однако риск таких портфелей выше.

Отмечу, что при запрете «короткой продажи» максимальной доходностью будет обладать портфель, полностью состоящий из актива с наибольшей ожидаемой доходностью, а при возможности операции «короткая продажа» достижима сколь угодно высокая доходность при соответственно растущем риске.

Заключение. В результате проведенной работы была раскрыта тема «Оптимизация портфеля ценных рисковых бумаг с ограничениями на «короткую продажу» методом проекции градиента», поставленная цель достигнута в полном объеме, решены все поставленные задачи.

Результатом работы является программная реализация метода проекции градиента для решения задач формирования портфеля ценных рисковых бумаг с ограничениями на «короткую продажу».

Хотелось бы отметить, что результаты проведенного исследования докладывались на научной конференции механико-математического факультета СГУ им. Н.Г. Чернышевского «Математика. Механика» в секции «Математическая экономика и негладкий анализ». Также по результатам исследования написана статья «Применение метода проекции градиента к формированию портфеля ценных рисковых бумаг при ограничениях на операцию «короткая продажа», опубликованная в сборнике по итогам XVIII международной научно-практической конференции «Проблемы управления в социально-экономических и технических системах», проведенной на базе кафедры «Информационно-коммуникационные системы и программная инженерия» СГТУ им. Ю.А. Гагарина.