

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ  
компьютерной безопасности и  
криптографии

### **Раскраска графа и погружение**

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Стрельцова Романа Сергеевича

Научный руководитель

доцент к. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

А. В. Жаркова

22.01.2022 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

М. Б. Абросимов

22.01.2022 г.

Саратов 2022

## ВВЕДЕНИЕ

Теория графов имеет широкое прикладное значение. Применение вычислений, производимых на графах, позволяет упрощать и решать различные практические задачи.

Разнообразные задачи, возникающие при планировании производства, составлении графиков осмотра, хранения и транспортировке товаров и т. д., могут быть представлены часто как задачи теории графов, тесно связанные с так называемой «задачей раскраски». По мере роста сложности инфраструктуры и оборудования оказалось, что имеется множество вполне серьезных задач, которые сводятся к нахождению хроматического числа графа.

Например, недалеко расположенные станции сотовой связи, чтобы не мешать друг другу, должны работать на разных радиочастотах. Если станции связи считать вершинами графа и соединить ребрами те пары станций, которые могут мешать работе друг друга, то хроматическое число графа будет равно минимально необходимому набору различных радиочастот для безотказной работы системы сотовой связи<sup>1</sup>.

Также в качестве примера применения раскраски графов можно привести статью, в которой подробно рассматривается проблема создания расписаний в образовательных учреждениях<sup>2</sup>.

Еще одной важнейшей областью применения раскраски является задача распределения регистров в микропроцессорах. Один из подходов решения этой задачи с применением раскраски графов представлен в статье<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> Frequency Assignment in Cellular Phone Networks [Электронный ресурс] / R. Borndörfer, A. Eisenblätter, M. Grötschel, A. Martin // ResearchGate [Электронный ресурс]. – 1997. – URL: [https://www.researchgate.net/publication/2293056\\_Frequency\\_Assignment\\_in\\_Cellular\\_Phone\\_Networks.html](https://www.researchgate.net/publication/2293056_Frequency_Assignment_in_Cellular_Phone_Networks.html) (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

<sup>2</sup> A Survey of Search Methodologies and Automated Approaches for Examination Timetabling [Электронный ресурс] / R. Qu, E. K. Burke, B. McCollum, L. T. G. Merlot, S. Y. Lee // ResearchGate [Электронный ресурс]. – 2006. – URL: [https://www.researchgate.net/publication/250421031\\_A\\_Survey\\_of\\_Search\\_Methodologies\\_and\\_Automated\\_Approaches\\_for\\_Examination\\_Timetabling.html](https://www.researchgate.net/publication/250421031_A_Survey_of_Search_Methodologies_and_Automated_Approaches_for_Examination_Timetabling.html) (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

<sup>3</sup> Chaitin, G. J. Register Allocation & Spilling via Graph Coloring [Электронный ресурс] / G. J. Chaitin // Department of Computer Science George Mason University [Электронный ресурс]. – 1982. – URL: <https://cs.gmu.edu/~white/CS640/p98-chaitin.pdf> (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

В статье<sup>4</sup> был предложен алгоритм для распределения часто используемых областей кода в кэше при помощи алгоритма раскраски.

Целью настоящей работы является изучение гипотезы о связи раскраски графа и погружении, в результате чего требуется разработать и реализовать программный продукт на базе данной гипотезы.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие задачи:

- 1) изучить необходимые определения теории графов;
- 2) рассмотреть необходимые теоремы;
- 3) разработать и реализовать программный продукт, производящий проверку гипотезы о связи раскраски графа и погружении на отдельно взятых примерах;
- 4) при помощи реализованного программного продукта получить статистические данные относительно рассматриваемой гипотезы.

Дипломная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объем работы – 56 страниц, из них 42 страницы – основное содержание, включая 26 рисунков и 1 таблицу, список использованных источников из 15 наименований.

---

<sup>4</sup> Hashemi, A. H. Efficient Procedure Mapping Using Cache Line Coloring [Электронный ресурс] / A. H. Hashemi, D. R. Kaeli, B. Calder // ResearchGate [Электронный ресурс]. – 1996. – URL: [https://www.researchgate.net/publication/2805766\\_Efficient\\_Procedure\\_Mapping\\_Using\\_Cache\\_Line\\_Coloring.html](https://www.researchgate.net/publication/2805766_Efficient_Procedure_Mapping_Using_Cache_Line_Coloring.html) (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В дипломной работе в разделе 1 «Необходимые определения» приводятся необходимые определения<sup>5, 6, 7, 8, 9, 10, 11</sup>, которые используются в данной работе.

*Неориентированным графом* (или, для краткости, *графом*) называется пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $\alpha$  – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин  $V$ . Дуги неориентированного графа обычно называют *ребрами*. Ребро, образованное вершинами  $u, v$ , иногда обозначают через  $\{u, v\}$ , а вершины  $u$  и  $v$  называют *смежными*<sup>5</sup>.

Граф называется *конечным*, если множество его вершин  $V$  конечно<sup>6</sup>.

*Петлей* называется такое ребро, у которого обе концевые вершины совпадают:  $\{u, u\} \in \alpha$ <sup>8</sup>.

*Простым* называется граф, в котором нет кратных ребер и петель.

*Подграф* графа  $G = (V, \alpha)$  – это такая его часть  $G^* = (V^*, \alpha^*)$ , которая содержит все ребра графа  $G$ , соединяющие попавшие в данную часть вершины, т. е.  $\alpha^* = (V^* \times V^*) \cap \alpha$ . Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа.

Граф  $G = (V, \alpha)$  называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром, т. е. если  $\alpha = (V^* \times V^*) - \Delta$ . Полный граф с  $n$  вершинами обозначается символом  $K_n$ . Каждая его вершина имеет степень  $n - 1$ <sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. – М. : Наука. Физматлит, 1997. – 368 с.

<sup>6</sup> Лекции по теории графов [Электронный ресурс] / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 384 с. – Загл. с экрана. – Яз. рус.

<sup>7</sup> Новиков, Ф. А. Дискретная математика для программистов [Электронный ресурс] / Ф. А. Новиков. – СПб. : Питер, 2000. – 304 с. – Загл. с экрана. – Яз. рус.

<sup>8</sup> Ore, O. Теория графов [Электронный ресурс] / О. Оре – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 336 с. – Загл. с экрана. – Яз. рус.

<sup>9</sup> Abu-Khzam, F. N. Graph Coloring and the Immersion Order [Электронный ресурс] / F. N. Abu-Khzam, M. A. Langston // ResearchGate [Электронный ресурс]. – 2003. – URL: [https://www.researchgate.net/publication/261070407\\_Graph\\_Coloring\\_and\\_the\\_Immersion\\_Order.html](https://www.researchgate.net/publication/261070407_Graph_Coloring_and_the_Immersion_Order.html) (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

<sup>10</sup> Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход [Электронный ресурс] / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 432 с. – Загл. с экрана. – Яз. рус.

<sup>11</sup> Харари, Ф. Теория графов [Электронный ресурс] / Ф. Харари. – М. : Мир, 1973. – 300 с. – Загл. с экрана. – Яз. рус.

Граф  $G$  называют  $t$ -хроматическим, если его вершины могут быть раскрашены с использованием  $t$  цветов (красок) так, что не найдется двух смежных вершин одного цвета. Наименьшее число  $t$ , такое что граф  $G$  является  $t$ -хроматическим, называется *хроматическим числом* графа  $G$  и обозначается  $\chi(G)$ . Задача нахождения хроматического числа графа называется *задачей о раскраске* (или *задачей раскраски*) графа. Соответствующая этому числу раскраска вершин разбивает множество вершин графа на  $t$  подмножеств, каждое из которых содержит вершины одного цвета. Эти множества являются независимыми, поскольку в пределах одного множества нет двух смежных вершин<sup>10</sup>.

Пара смежных ребер  $\{u, v\}$  и  $\{v, w\}$  с  $u \neq v \neq w$  *поднимается* путем удаления ребер  $\{u, v\}$  и  $\{v, w\}$  и добавления ребра  $\{u, w\}$ .

Говорят, что граф  $H$  *погружен* в граф  $G$  тогда и только тогда, когда граф, изоморфный  $H$ , можно получить из  $G$ , подняв пары ребер и взяв подграф.

Говорят, что  $G$  *необходимо  $t$ -погружаемый*, если  $\chi(G) = t$  и  $\chi(H) < t$  всякий раз, когда  $H$  погружается в  $G$ <sup>9</sup>.

*Клика* графа – это любой его максимальный полный подграф<sup>11</sup>.

В разделе 2 работы «О задаче раскраски и погружения» приводятся определения  $t$ -раскрашиваемого,  $t$ -хроматического, необходимо  $t$ -раскрашиваемого графов,  $t$ -раскраски и цепей Кемпе. Далее приводится ряд рассматриваемых наблюдений, теорем, лемм, следствий, а также непосредственно гипотеза, проверка которой реализована в программном продукте. Многие из них сопровождаются наглядными примерами и пояснениями.

---

<sup>9</sup> Abu-Khzam, F. N. Graph Coloring and the Immersion Order [Электронный ресурс] / F. N. Abu-Khzam, M. A. Langston // ResearchGate [Электронный ресурс]. – 2003. – URL: [https://www.researchgate.net/publication/261070407\\_Graph\\_Coloring\\_and\\_the\\_Immersion\\_Order.html](https://www.researchgate.net/publication/261070407_Graph_Coloring_and_the_Immersion_Order.html) (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

<sup>10</sup> Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход [Электронный ресурс] / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 432 с. – Загл. с экрана. – Яз. рус.

<sup>11</sup> Харари, Ф. Теория графов [Электронный ресурс] / Ф. Харари. – М. : Мир, 1973. – 300 с. – Загл. с экрана. – Яз. рус.

В рамках данной работы рассматривались конечные простые неориентированные графы (кратные ребра и петли, которые могут возникать в процессе подъема ребер графа, не влияют на раскраску рассматриваемого графа).

Пусть  $G$  – конечный простой неориентированный граф. Если  $\chi(G) \leq t$ , то граф  $G$  называют  $t$ -раскрашиваемым. Если  $\chi(G) = t$ , то граф  $G$  называют  $t$ -хроматическим. Если  $\chi(G) = t$  и  $\chi(H) < t$  для каждого собственного подграфа  $H$  графа  $G$ , то  $G$  называют *необходимо  $t$ -раскрашиваемым*.  $t$ -раскраска графа  $G$  реализуется отображением  $c$  из вершин  $G$  в множество  $\{1, 2, \dots, t\}$  таким образом, что если  $G$  содержит ребро  $\{u, v\}$ , то  $c(u) \neq c(v)$ . Учитывая такое отображение,  $c_{ij}$  используется для обозначения подграфа, образованного множеством вершин  $\{u: c(u) \in \{i, j\}\}$ . Путь, содержащийся в  $c_{ij}$ , называется *цепью Кемпе*.  $c_{ij}$  не обязательно должен быть связным, поэтому для любого  $u \in c_{ij}$  через  $c_{ij}(u)$  обозначим множество вершин, которые находятся в той же компоненте связности  $c_{ij}$ , что и  $u$ . Такие множества обладают полезными свойствами<sup>9</sup>.

**Теорема 1<sup>12</sup>.** *Если  $G$  связный, но не является ни полным, ни циклом нечетной длины, то  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

С учетом зависимостей между раскраской графа, степенями вершин и связностью и, в свою очередь, зависимостью между связностью и порядком погружения, приводилось, как  $\chi(G)$  связано с погружением<sup>9</sup>.

**Гипотеза<sup>9</sup>.** *Если  $\chi(G) \geq t$ , то  $K_t$  погружается в  $G$ .*

Раздел 3 дипломной работы «Программная реализация» состоит из двух подразделов, первый из которых 3.1 «Описание программы» посвящен подробному описанию программного продукта на базе гипотезы о раскраске и погружении, разработанного и реализованного в результате проделанной работы на языке программирования Python. Данная программа позволяет произвести

---

<sup>9</sup> Abu-Khizam, F. N. Graph Coloring and the Immersion Order [Электронный ресурс] / F. N. Abu-Khizam, M. A. Langston // ResearchGate [Электронный ресурс]. – 2003. – URL: [https://www.researchgate.net/publication/261070407\\_Graph\\_Coloring\\_and\\_the\\_Immersion\\_Order.html](https://www.researchgate.net/publication/261070407_Graph_Coloring_and_the_Immersion_Order.html) (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

<sup>12</sup> Brooks, R. L. On Coloring the Nodes of a Network [Электронный ресурс] / R. L. Brooks – Proc. Cambridge Phil. Soc., 1941. – 4 с. – Загл. с экрана. – Яз. англ.

проверку данной гипотезы на отдельно взятых примерах, а также визуализирует данную информацию. Листинг представлен в приложении А.

В коде программы в качестве вспомогательного реализован алгоритм Брона – Кербоша<sup>13</sup>, который используется для нахождения максимального по включению полного подграфа в заданном графе.

Программа обладает удобным пользовательским интерфейсом и допускает три различных режима работы на выбор пользователя:

1) проверка гипотезы на всех конечных простых неориентированных графах с заданным количеством помеченных вершин  $n$ ;

2) проверка гипотезы на определенном количестве случайных конечных простых неориентированных графов  $k$  с заданным количеством помеченных вершин  $n$ ;

3) проверка гипотезы на графах в формате *graph6*<sup>14</sup>, загруженных из пользовательского файла, выбранного после нажатия кнопки «Обзор».

Также начальный экран интерфейса содержит три опциональных пункта выбора, которые разрешается выбирать в любой необходимой комбинации:

1) пункт «Сохранить результаты в файл» позволяет пользователю выбрать, необходимо ли сохранять результаты проверки гипотезы для каждого из проверяемых графов в текстовом файле.

Если данный пункт был выбран пользователем, то в ходе работы программы будет создан текстовый файл, содержащий в своем названии дату и время начала вычислений, например «20211026\_231323.txt»;

2) пункт «Сохранить рисунки в файлы» позволяет пользователю выбрать, необходимо ли сохранять проверяемые графы в виде изображений.

---

<sup>13</sup> Bron, C. Finding All Cliques of an Undirected Graph [H] [Электронный ресурс] / C. Bron, J. Kerboscht // Donald Bren School of Information and Computer Sciences [Электронный ресурс]. – 1971. – URL: <https://www.ics.uci.edu/~johnsong/papers/Bron%20and%20Kerboscht%20-%20Finding%20All%20Cliques%20of%20an%20Undirected%20Graph.pdf> (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

<sup>14</sup> McKay, B. D. Description of graph6, sparse6 and digraph6 Encodings [Электронный ресурс] / B. McKay // Brendan McKay [Электронный ресурс]. – 2015. – URL: <https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/formats.txt> (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

Если данный пункт был выбран пользователем, то в ходе работы программы будет создана папка, содержащая в своем названии дату и время начала вычислений, например «20211026\_231323». В папке каждый рисунок имеет название, соответствующее порядковому номеру проводимой проверки, например «Тест 1.png».

Если в ходе проверки гипотезы будут выполняться поднятия ребер графа, то каждый шаг поднятия ребер графа будет сохранен в виде отдельного изображения. В таком случае изображения будут иметь имена по примеру «Тест 1 – 0.png», «Тест 1 – 1.png» и т. д;

3) пункт «Выводить данные на экране» позволяет пользователю выбрать, необходимо ли в текстовом формате выводить промежуточные данные о проверяемых графах на экран пользователя.

На рисунке 9 представлен интерфейс, который увидит пользователь после запуска программного продукта.

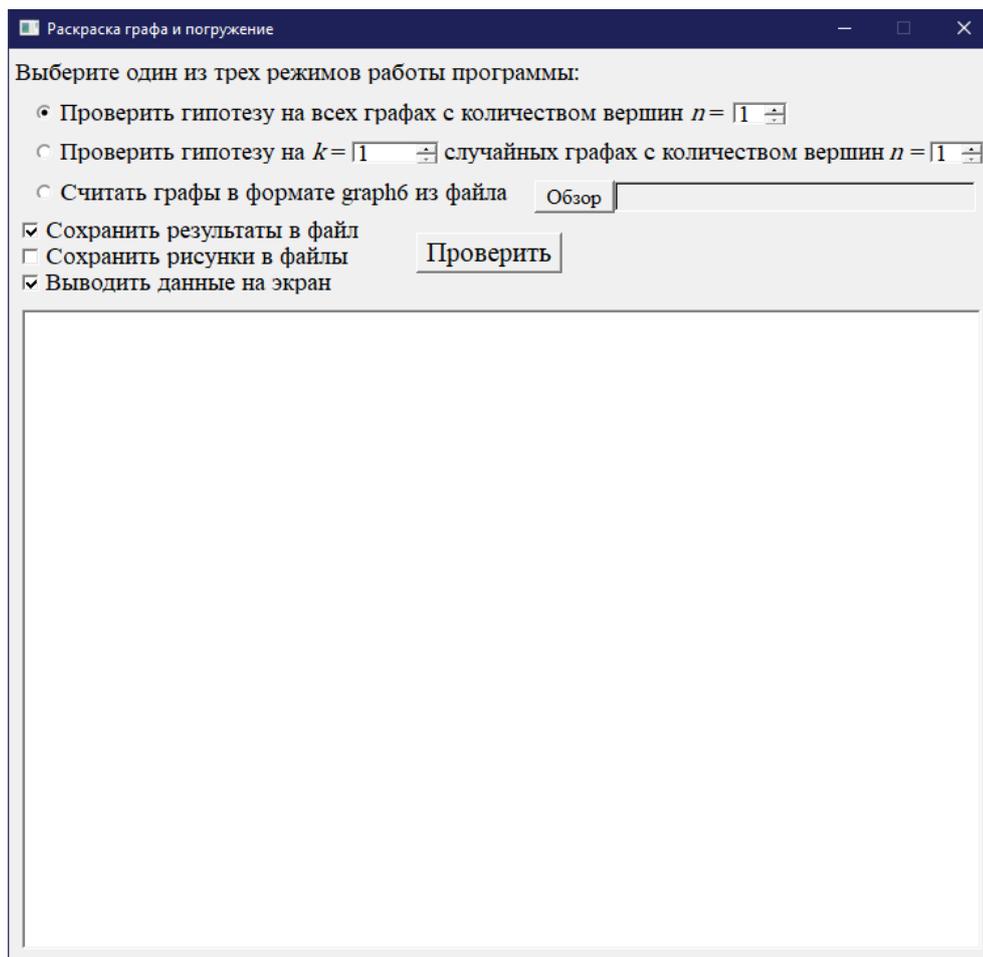


Рисунок 9 – Пользовательский интерфейс

Помимо этого на экран будет выведено соответствующее сообщение об ошибке, если она произойдет при выполнении программы. Возможные ошибки:

1) «Выбранный файл пуст.» – возникает, если выбран режим чтения из файла, но при этом выбранный файл пуст;

2) «Ошибка при работе с файлом.» – возникает, если выбран режим чтения из файла, но при этом в выбранном файле содержится запись, отличная от формата *graph6*;

3) «Выберите файл!» – возникает, если выбран режим чтения из файла, но при этом файл для чтения не выбран;

4) «Для  $n = 3$  введите  $k$  от 1 до 8.» – возникает, если значение количества проверяемых случайных графов  $k$  превышает количество существующих различных графов с указанным количеством вершин  $n$ .

В подразделе 3.2 работы «Полученные результаты» приводятся данные, которые были получены при помощи программного продукта. С помощью генератора графов *geng*<sup>15</sup>, из программного комплекса *nauty*, который был разработан Бренданом МакКеем, в текстовом виде в формате *graph6* были получены списки всех конечных простых неориентированных неизоморфных графов с количеством вершин  $n \leq 9$ . Программа была запущена для всех полученных списков графов.

В таблице 1 представлены результаты работы программы для графов с соответствующим количеством вершин и время работы программы для каждого вводимого количества вершин  $n$ . Из полученных данных можно отметить, что рассматриваемая гипотеза была подтверждена на всех произведенных тестах.

---

<sup>15</sup> McKay, B. D. Nauty and Traces User's Guide (Version 2.6) [Электронный ресурс] / B. D. McKay, A. Piperno // Brendan McKay [Электронный ресурс]. – 2017. – URL: <https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/nauty/nug26.pdf> (дата обращения: 30.11.2021). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

Таблица 1 – Полученные данные

<b>Количество вершин, <math>n</math></b>	<b>Количество графов</b>	<b>Полученный результат</b>	<b>Время работы программы, сек</b>
1	1	Гипотеза подтверждена	0,00
2	2	Гипотеза подтверждена	0,00
3	4	Гипотеза подтверждена	0,00
4	11	Гипотеза подтверждена	0,00
5	34	Гипотеза подтверждена	0,01
6	156	Гипотеза подтверждена	0,29
7	1044	Гипотеза подтверждена	10,70
8	12346	Гипотеза подтверждена	1536,61
9	274668	Гипотеза подтверждена	139782,31

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория графов имеет колоссальное значение и находит широкое прикладное применение.

Рассмотренная гипотеза о связи раскраски графа и погружении имеет преимущественно теоретическое значение и может служить основой для эффективной алгоритмической стратегии оценки хроматического числа произвольного входного графа.

В ходе выполнения работы были изучены необходимые определения, теоремы и положения теории графов.

В результате проделанной работы был разработан и реализован программный продукт, производящий проверку гипотезы о связи раскраски графа и погружении на отдельно взятых примерах. Также при помощи реализованного программного продукта были получены статистические данные относительно рассматриваемой гипотезы.

Таким образом, все поставленные задачи полностью выполнены, цель работы можно считать достигнутой.