МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Анализ структуры графа с помощью группы его автоморфизмов

АВТОРЕФЕРАТ
дипломной работы

студентки 6 курса 631 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Финогеевой Екатерины Алексеевны

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов
22.01.2022 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов
22.01.2022 г.

Саратов 2022

ВВЕДЕНИЕ

Началом теории графов считают 1736 г., когда была выпущена первая работа в этой области известным швейцарским математиком Л. Эйлером. Для современных исследований изучение графов является одним из приоритетных направлений. Графы являются удобным языком для формулировки и эффективным инструментом для решения широкого круга математических задач. По мере развития информатики, все более и более сложные методы анализа оказывают влияние на научные и практические проблемы.

Одной из наиболее важных практических проблем можно назвать обеспечение надежности использования вычислительной системы в критических областях. Выход из строя хотя бы одного элемента системы может привести к фатальным последствиям. И исследования в области теории графов существенно помогают справиться с этой проблемой.

Различные свойства графов оказывают влияние на характеристики системы. Отказоустойчивость имеет большое значение при оценке работоспособности системы, но является сложной задачей. Высказывались различные идеи, которые связывали отказоустойчивость с богатыми свойствами автоморфизмов. В частности, М.Ф. Каравай в своей статье [1] пишет, что «…нахождение отказоустойчивых конфигураций системы и поиск всех автоморфизмов графа системы, или, что то же, его симметрии, оказываются эквивалентными задачами.» В следствие этого стало интересно проверить его утверждение, что отказоустойчивые системы обладают высокой степенью симметрии.

На языке теории графов отказоустойчивость представляется достаточно естественным подходом. В данной работе будет исследоваться конструкция минимального вершинного расширения графов, основанная на понятии полной отказоустойчивости технических систем, предложенных в 1976 г. Хейзом [2].

Целью данной работы является исследование группы автоморфизмов графа, её связь с числом ориентаций и минимальным вершинным 1-расширением.

Дипломная работа состоит из введения, 5 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объем работы – 56 страниц, из них 41 страница – основное содержание, включая 6 рисунков и 11 таблиц, список использованных источников из 18 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первом разделе приводятся данные и исследования, полученные в результате изучения группы автоморфизмов неориентированного графа. В результате вычислений были получены распределения, совпавшие с хорошо известными графами. Графы с *(n-1)!* автоморфизмов и с числом вершин больше 4 – это: $K_{n-1} \cup O_1$ и $K_{1,n}$. Заметим, что у графа и его дополнения одинаковое число автоморфизмов. Любой граф, являющийся циклом C_n всегда имеет *2n* автоморфизмов, а являющийся цепью P_n – 2 автоморфизма. Помимо цепей ниже будут представлены графы, которые также имеют только 2 автоморфизма. Так как количество графов очень большое, для графов, имеющих больше 6 вершин, представим только их количество:

1) 4 вершинные: CE, CV;

2) 5 вершинные: DCo, DCw, DCs, DEw, DEk, DE{, DQw, DUw, DU{, DTw;

3) 6 вершинные: E?b_, E?r_, E?qo, E?qg, E?rg, E?qw, ECR?, ECR_, ECRO, ECRo, ECr_, ECrO, ECpo, ECrG, ECrW, ECrw, ECZ_, ECZO, ECZg, ECZW, ECzo, ECzw, ECvo, ECvw, EEro, EEio, EEho, EEhw, EEjw, EEzo, EEzw, EEvo, EEuw, EEnw, EQj_, EQzo, EQzW, EQzw, EUZ_, EUZo, EUzo, EUzW, EUzw, ETzo, ETzw;

4) 7 вершинных – 354;

5) 8 вершинных – 4431;

6) 9 вершинных – 89004.

Эти данные согласуются с результатами сайта graphworld.ru [7].

Тождественных графов из 2, 3, 4, 5 вершин не существует, тождественных графов из 6 вершин – 8, 7 – 152, 8 – 3696, 9 – 135004, что соответствует последовательности A003400 в OEIS [8].

Во втором разделе приводятся данные и исследования, полученные в результате изучения количества ориентаций неориентированного графа. Приведем некоторые результаты этого раздела.

Графы с количеством ориентаций равным 15 и с числом вершин больше 4 одной из компонент имеют:

1) граф-звезду
2) граф-цепь
3) граф-цикл.

Остальные компоненты представляют собой необходимое количество изолированных вершин.

Граф с 4 вершинами и количеством ориентаций 15 имеют:

1) граф-цепь
2) граф-цикл.

Также в ходе работы было получено количество *n*-вершинных орграфов и максимальное количество ориентаций среди них. В работе представлены таблица с этими данными, а также изображения графов, обладающих максимальным количеством ориентаций.

Третий раздел описывает связь между количеством автоморфизмов и количеством ориентаций графа. В ходе работы было замечено, что тождественные графы с 6 и больше вершинами разбиваются на группы, которые представлены в таблице ниже. Просуммировав количества графов внутри группы с одинаковым количеством вершин, получим, что тождественных графов с 6 вершинами 8, с 7 вершинами – 152, а с 8 вершинами – 3696, что соответствует последовательности A003400 в OEIS [8].

Таблица 4 – Значения ориентаций для тождественных графов

Количество вершин	Количество ориентаций	Количество графов
6	729	1
	2187	3
	6561	3
	19683	1
7	729	2
	2187	6
	6561	14
	19683	24
	59049	30
	177147	30

	531441	24
	1594323	14
	4782969	6
	14348907	2
8	729	1
	2187	4
	6561	21
	19683	70
	59049	160
	177147	287
	531441	397
	1594323	581
	4782969	654
	14348907	581
	43046721	397
	129140163	287
	387420489	160
	1162261467	70
	3486784401	21
	10460353203	4
	31381059609	1

В четвертом разделе описана задача и алгоритм построения МВ-1Р графа. Данный раздел содержит четыре подраздела.

В первом подразделе описаны особенности подсчета МВ-1Р для неориентированных графов и представлены исследования по теме. Графы со степенным множеством {1, 0} и только они имеют МВ-1Р с одним дополнительным ребром; для каждого графа со степенным множеством {1, 0} такое расширение единственно с точностью до изоморфизма. Среди связных графов только цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными ребрами; для каждой цепи такое расширение единственно с точностью до изоморфизма. Среди несвязных графов без изолированных вершин только графы вида $P_n \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$ при $n > 1$ имеют МВ-1Р с двумя дополнительными ребрами, причем это расширение с точностью до изоморфизма совпадает с $C_{n+1} \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$. Связные графы, имеющие МВ-1Р с тремя дополнительными ребрами, могут иметь только следующий вид:

1) полный граф K_3;

2) графы с вектором степеней вида (3, …, 3, 2, 2, 2), имеющие точное вершинное 1-расширение;

3) графы с вектором степеней (3, 3, 3, …, 3, 2, …, 2, 1) особого вида.

Во втором подразделе описаны особенности подсчета МВ-1Р для орграфов и представлены исследования по теме. Ниже будут представлены леммы, использованные для оптимизации подсчета МВ-1Р, сформулированные в терминах степени исхода и степени захода вершины.

Лемма 4. Пусть наибольшая из степеней исхода (захода) вершин графа $\vec{G}$ есть s и в точности m вершин имеют такую степень исхода (захода), тогда МВ-kР графа $\vec{G}$ содержит, по крайней мере, $k + m$ вершин со степенью исхода (захода) не ниже s.

Лемма 5. Если максимальная степень исхода (захода) вершины графа $\vec{G}$ есть $d > 0$, то его МВ-kР G^* содержит не менее kd дополнительных ребер.

Лемма 6. Если минимальная степень исхода (захода) вершины графа $\vec{G}$ есть $d > 0$, то его МВ-kР $\vec{G}^*$ не содержит вершин со степенью исхода (захода) ниже $d + k$.

В третьем подразделе описывается связь между МВ-1Р графа и числом его ориентаций. Будем называть *хорошим случаем* ситуацию, когда у оргафа столько же дополнительных дуг, сколько дополнительных ребер у его симметризации. В таблице ниже приведены графы, для которых все ориентации являются хорошим случаем.

Таблица 5 – Графы, для которых все ориентации являются хорошим случаем

n	Название графа	*oq*	*ec*
4	C?	1	0
	CC	1	1
	CF	4	4
	CQ	1	3
5	D??	1	0
	D?o	3	2

	D?w	4	4
	D?{	5	5
	DCo	1	1
	DCW	3	3
	DCc	2	3
	DQg	2	2
	E???	1	0
	E?A?	1	1
6	E?B?	3	2
	E?Bw	6	6
	E?`?	1	1
	E?`_	3	3
	E?aG	2	3
	E?`o	4	5
	ECO_	1	4
	ECQO	2	2
	ECQo	8	4
	ECXg	10	6

В четвертом подразделе работы описывается связь между МВ-1Р графа и количеством его автоморфизмов. После рассмотрения расширений 5-вершинных графов было обнаружено, что среди них тождественных графов нет. Тождественных графов среди расширений 6-вершинных графов 12, среди 7-вершинных – 128, а среди 8-вершинных – 4062. В работе приведена таблица для 6-вершинных графов с расширениями, хотя бы одно из которых является тождественным графом. Также были рассмотрены графы, у которых больше одного расширения, и все они имеют одинаковое число автоморфизмов. В таком случае количество автоморфизмов в расширениях либо равно количеству автоморфизмов в исходном графе, либо в два раза больше. Продолжая описанный выше вычислительный эксперимент, для проверки были поставлены более строгие условия, а именно:

1. исходный граф не является тождественным, но все его МВ-1Р являются тождественными;
2. исходный граф является тождественным и все его МВ-1Р являются тождественными;
3. исходный граф является тождественным, но все его МВ-1Р не являются тождественными.

Среди графов, имеющих до 6 вершин включительно, не было найдено ни одного, относящегося к какой-либо категории. Среди 7-вершинных графов, относящихся к 1 категории обнаружено не было. Ко 2 категории относится 1 граф. К 3 категории относятся 4 графа. Графы из 8 вершин представлены явно в таблицах работы.

Пятый раздел представляет собой описание программных средств, разработанных в ходе выполнения работы. Все вычисления проводились на персональном компьютере с процессором Intel Core i3 с тактовой частотой 2.4 ГГц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были рассмотрены некоторые структурные свойства графов через изучение группы его автоморфизмов. Среди исследованных свойств были такие свойства графа, как число его ориентаций и их свойства, а также минимальные вершинные 1-расширения. При изучении свойств отказоустойчивости различных объектов возникает понятие автоморфизма этого объекта. Группа автоморфизмов является важной мерой симметрии. Рассмотрение в работе ориентированных и неориентированных графов позволило проанализировать как количество ориентаций и автоморфизмов графа в паре, так и все три свойства вместе. Для нахождения данных инвариантов были рассмотрены специальные алгоритмы.

В процессе работы был разработан программный комплекс на языке Python, представляющий собой отдельные программы для вычисления указанных ранее свойств графов, а также для представления их в удобном для анализа формате.

Был проведен ряд вычислительных экспериментов, и получены данные, описывающие взаимосвязь перечисленных свойств. Существенной зависимости между свойством быть расширением и большим количеством автоморфизмов найдено не было.