МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и
автоматического управления

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕПОЛНОДОСТУПНОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Сербина Владислава Андреевича

Научный руководитель
старший преподаватель ______________ М. В. Белоконь

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент ______________ И. Е. Тананко

Саратов 2022

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В повседневной жизни постоянно приходится сталкиваться с обслуживанием, т. е. удовлетворением некоторых потребностей, и очень часто с очередями, когда обслуживание является массовым. Примерами процессов массового обслуживания могут служить продажа билетов в железнодорожных, театральных и других кассах, обслуживание бригадой рабочих группы станков, осуществление телефонной связи и т. д. Естественно, что во всех случаях большое значение имеет степень удовлетворения потребности в обслуживании, или качество обслуживания. Так, при осуществлении телефонной связи важно знать, как долго придется ожидать соединения с требуемым абонентом после заказа междугородного разговора при ручном способе установления соединений или сколько в среднем попыток необходимо сделать для установления соединения при автоматическом способе. Количественная сторона процессов массового обслуживания является предметом раздела прикладной математики, которую советский математик А. Я. Хинчин (1894 – 1959 гг.) назвал *теорией массового обслуживания.* Родилась теория массового обслуживания в первой четверти XX века вследствие возникновения потребностей разработки математических методов для оценки качества функционирования телефонных систем. Основоположником теории телетрафика, из которой «выросла» теория массового обслуживания, является датский ученый А. К. Эрланг (1878 – 1929 гг.) – сотрудник Копенгагенской телефонной компании. В теории массового обслуживания все рассматриваемые объекты объединяются под общим названием «системы массового обслуживания». Одним из классов систем массового обслуживания являются *системы распределения информации* (системы телетрафика). Системой распределения информации могут быть совокупность коммутационных приборов, часть или весь коммутационный узел либо сеть связи, которые обслуживают по определенному алгоритму телефонные, телеграфные и другие сообщения. В настоящее время методы теории массового обслуживания используются для решения самого широкого круга задач – от бытового обслуживания до космических исследований, однако определяющую роль в развитии теории массового обслуживания продолжает играть одна из ее ветвей – теория телетрафика [1]. *Предметом* теории телетрафика является количественная, сторона процессов обслуживания потоков сообщений в системах распределения информации.

Таким образом, актуальной является задача, связанная с построением математических моделей неполнодоступных систем и разработкой методов анализа и оптимизации данных систем обслуживания.

Цель бакалаврской работы – исследование неполнодоступной сети массового обслуживания с управлением процессом обслуживания поступающих требований.

Поставленная цель определила **следующие задачи:**

1. Описать задачу оптимизации рассматриваемой сети;
2. Выполнить программную реализацию метода анализа неполнодоступной сети массового обслуживания с оптимальным управлением потоком;
3. С помощью разработанной программы провести исследование зависимости характеристик сети обслуживания от различных стоимостных параметров сети.

Методологические основы исследования неполнодоступной сети массового обслуживания с управлением представлены в работах Пономаренко Л. А., Меликов А. З., Митрофанов Ю. И., Лившец Б. С.

Практическая значимость бакалаврской работы. Представленные в выпускной квалификационной работе результаты могут быть применены для математического моделирования неполнодостпных сетей массового обслужеивания, для решения задач анализа, оптимизации и управления.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объем работы – 47 страниц, из них 41 страница – основное содержание, включая 11 рисунков и 3 таблицы, приложение, список использованных источников информации – 20 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел "Основы теории массового обслуживания" посвящен обзору основных положений теории массовогого обслуживания.

В подразделе 1.1 рассмотрено понятие случайно процесса.

В подразделе 1.2 описаны цепи Маркова с дискретным и непрерывном временем [2].

В подразделе 1.3 подробно рассмотрены основные параметры, характеристики и обозначения систем массового обслуживания [3].

Второй раздел "Системы массового обслуживания с потерями" посвящен описанию систем массового обслуживания типа $M/M/1$ и $M/M/k$, используемых для построения неполнодоступной сети массового обслуживания.

В подразделе 2.1 описана система типа $M/M/1$. Принцп работы системы заключается в том, что если в момент поступления требования единственный прибор занят обслуживанием другой заявки, то требования теряется (возвращается в источник)[4].

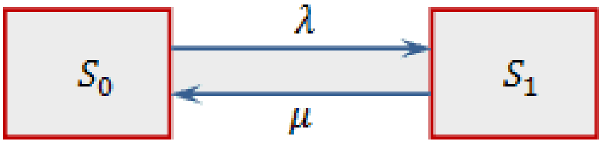

Рисунок 1 – Граф состояний СМО типа $M/M/1$

В подразделе 2.2 описана система типа $M/M/k$. Все имеющиеся в системе k приборов – одинаковые, работают параллельно. Каждое вновь поступившее требование подается на свой отдельный обслуживающий прибор, однако если требование поступает в момммент, когда все приборы заняты, то оно теряется (возвращается в источник).

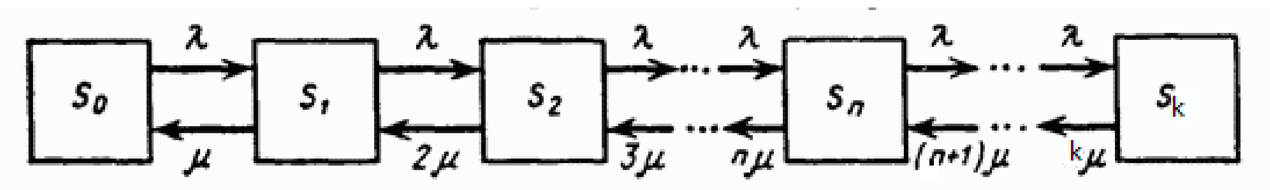

Рисунок 2 – Граф состояний СМО типа $M/M/k$

Третий раздел "Сети массового обслуживания" посвящен основным понятиям и обозначениям из теории сетей массвого обслуживания.

Четвертный раздел "Неполнодоступная сеть массового обслуживания с управлением" посвящен описанию модели неоднородной неполнодоступной сети массового обслуживания и определению понятия "управляющий параметр". Также приводится математическое описание рассматриваемой модели в виде системы линейных уравнений, которая представляет собой ограничения для задачи оптимизации [5]. Далее представлен пример работы программы, реализующей метод линейного программирования для определения оптимальной стратегии управления и в рамках исследования сети рассматриваются полученные результаты.

В подразделе 4.1 описывается модель неполнодоступной сети массового обслуживания с управлением процессом обслуживания поступающих требований. Исследуемая сеть состоит из двух СМО. Одна из них, условно назовем ее первая, содержит $s_1 > 1$ каналов, вторая – $s_2 \geq 1$ каналов. На вход i-й СМО поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ_i; заявку из i-го потока назовем заявкой i-го типа, или просто i-заявкой, $i = 1, 2$.

В подразделе также описана задача оптимизации, еобходимо найти такую стратегию управления сетью в стационарном режиме, чтобы минимизировать суммарные потери в ней в единицу времени, при этом под стратегией управления понимается последовательность управляющих решений, которые на основе информации о конкретной ситуации в сети определяют, назначить ли поступившую 1-заявку на обслуживание или отказать ей в этом.

В общем виде описано пространство состояний на котором функционирует рассматриваемая сеть.

$$E = \{n = (n_0, n_1, n_2) : n_0, n_1 = \overline{0, s_1}, 0 \leq n_0 + n_1 \leq s_1, n_2 = 0, 1\},$$

где $n_0(n_1)$ – число заявок в СМО$_1$, поступивших во время пребывания среды в состоянии $0(1)$; n_2 – состояние среды.

Также определяются управляющие решения. Рассматривая моменты поступления заявок в систему при наличии свободных каналов, выделяется два случая: а) $n_2 = 0$; б) $n_2 = 1$. В случае а) возможны два решения: а$_1$) поступившая заявка выбирается на обслуживание; а$_2$) ей отказывается в обслуживании.

Вероятности принятия этих решений обозначим через $\alpha^+(n)$ и $\alpha^-(n)$. Очевидно, что одно из этих решений обязательно будет приниматься, т.е.

$$\alpha^+(n) + \alpha^-(n) = 1.$$

Аналогичные решения можно принять в случае б). Обозначим их через б$_1$ и б$_2$, а вероятности принятия этих решений – через $\beta^+(n)$ и $\beta^-(n)$. Тогда имеем:

$$\beta^+(n) + \beta^-(n) = 1.$$

Стационарные вероятности состояний $p(n)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$-[\lambda\alpha^+(n)\delta_{n_2,0}u(s-n_0-n_1) + \lambda\beta^+(n)\delta_{n_2,1}u(s-n_0-n_1) + n_0\mu + n_1\gamma +$$

$$+\theta_{01}\delta_{n_2,0} + \theta_{10}\delta_{n_2,1}]p(n) + \lambda p(n-e_1)\alpha^+(n-e_1)\delta_{n_2,0}u(n_0) + \lambda p(n-e_2)\cdot$$

$$\cdot\beta^+(n-e_2)\delta_{n_2,1}u(n_1) + (n_0+1)\mu p(n+e_1)u(s-n_0-n_1) + (n_1+1)\cdot$$

$$\cdot\gamma p(n+e_2)u(s-n_0-n_1) + \theta_{0,1}p(n-e_3)\delta_{n_2,1} + \theta_{10}p(n+e_3)\delta_{n_2,0} +$$

$$+\lambda p(n)\alpha^-(n)\delta_{n_2,0}u(s-n_0-n_1) + \lambda p(n)\beta^-(n)\delta_{n_2,1}u(s-n_0-n_1) = 0,$$

$$\sum_{n\in E} p(n) = 1.$$

Задача ЛП выглядит следующим образвом:

$$L(p(n), \sigma^-(n), \varphi^-(n)) \to min,$$

$$C(p(n), \sigma^+(n), \sigma^-(n), \varphi^+(n), \varphi^-(n)) = 0,$$

$$\sigma^+(n) + \sigma^-(n) = \lambda p(n),$$

$$\varphi^+(n) + \varphi^-(n) = \lambda p(n),$$

$$\sum_{n\in E} p(n) = 1,$$

В подразделе 4.2 анализируем сеть, состоящую из двух систем, для которой количество приборов в первой и второй системах соответсвтенно равны $s1 = 2$, $s2 = 1$. Множество состояний сети $E = \{(0,0,0); (0,1,0); (1,0,0); (1,1,0); (0,2,0); (2,0,0); (0,0,1); (0,1,1); (1,0,1); (1,1,1,); (0,2,1); (2,0,1)\}$

Стоимостная функция для данной сети определятся следующим образом:

$$L = \frac{c_1}{\mu}p(1,0,0) + (\frac{2c_1}{\mu} + \lambda h)p(2,0,0) + (\frac{c_1}{\mu} + \frac{c_2}{\gamma} + \lambda h)p(1,1,0) + \frac{c_1}{\mu}p(1,0,1) +$$

$$+(\frac{c_1}{\mu} + \frac{c_2}{\gamma} + \lambda h)p(1,1,1) + (\frac{2c_1}{\mu} + \lambda h)p(2,0,1) + \frac{c_2}{\gamma}p(0,1,0) + (\frac{2c_2}{\gamma} + \lambda h)p(0,2,0) +$$

$$+\frac{c_2}{\gamma}p(0,1,1) + (\frac{2c_2}{\gamma} + \lambda h)p(0,2,1) + h\Big(\sigma^-(0,0,0) + \sigma^-(0,1,0) + \sigma^-(1,0,0) +$$

$$+\varphi^-(0,0,1) + \varphi^-(0,1,1) + \varphi^-(1,0,1)\Big) \to min$$

В подразделе 4.3 описывается разработанная программа, которая реализует метод линейного программирования и предназначена для определения оптимальной стратегии управления рассматриваемой модели неполнодоступной сети массового обслуживания, путем минимизации L, значения полных потерь сети. В данной работе используется симплекс-методом — метод решения оптимизационных задач линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве. Программная реализация выполнена на языке программирования $Python$ с помощью интегрированной среды разработки $JupyterNotebook$.

В подразделе 4.4 приведены примеры использования программы.

В подразделе 4.5 описаны результаты исследования неполнодоступной сети массового обслуживания. Ниже приведены результаты работы программы:

Анализируя полученные данные видно как алгоритм с помощью управляющих параметров подбирает оптимальное решение для каждого состояния сети в зависимости от стоимости работы каналов системы в каждом из состояний среды, за счет чего оптимизирует потери сети. И соответственно, при стоимости потери каждого требования больше стоимости обслуживания, оптимальным вариатом будет принимать на обслуживание требования, пришедшие в момент, когда в СМО$_1$ есть хотя бы один свободный канал, о чем нам и говорят результаты работы программы, выводя оптимальную стратегию, состоящую из всех единиц.

Также для полноты анализа на рисунках 5-6 рассмотрены графики за-

```
Значение целевой функции L =  2.0
*************************************************
Стационарные вероятности:
p[0, 0, 0] = 0.12464
p[1, 0, 0] = 0.12174
p[0, 1, 0] = 0.0
p[1, 1, 0] = 0.0
p[2, 0, 0] = 0.08696
p[0, 2, 0] = 0.0
p[0, 0, 1] = 0.50435
p[1, 0, 1] = 0.12754
p[0, 1, 1] = 0.0
p[1, 1, 1] = 0.0
p[2, 0, 1] = 0.03478
p[0, 2, 1] = 0.0
*************************************************
Оптимальная стратегия управления:
alpha_+[0, 0, 0] = 1.0
alpha_+[1, 0, 0] = 1.0
alpha_+[0, 1, 0] = 0.0
beta_+[0, 0, 1] = 0.0
beta_+[1, 0, 1] = 0.0
beta_+[0, 1, 1] = 0.0
*************************************************
М. о. числа требований в СМО1:
0.49276
*************************************************
```

Рисунок 3 – Вывод результатов при значении стоимостых коэффициентах: $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $h = 1$

```
Значение целевой функции L =  5.92348825201636
*************************************************
Стационарные вероятности:
p[0, 0, 0] = 0.03865
p[1, 0, 0] = 0.04922
p[0, 1, 0] = 0.0677
p[1, 1, 0] = 0.06715
p[2, 0, 0] = 0.03515
p[0, 2, 0] = 0.07547
p[0, 0, 1] = 0.06574
p[1, 0, 1] = 0.03138
p[0, 1, 1] = 0.18867
p[1, 1, 1] = 0.06495
p[2, 0, 1] = 0.01406
p[0, 2, 1] = 0.30187
*************************************************
Оптимальная стратегия управления:
alpha_+[0, 0, 0] = 1.0
alpha_+[1, 0, 0] = 1.0
alpha_+[0, 1, 0] = 1.0
beta_+[0, 0, 1] = 1.0
beta_+[1, 0, 1] = 1.0
beta_+[0, 1, 1] = 1.0
*************************************************
М. о. числа требований в СМО1:
1.4542700000000002
*************************************************
```

Рисунок 4 – Вывод результатов при значении стоимостых коэффициентах: $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $h = 3$

висимости одной из основных характеристик систем массового обслуживания — математическкго ожидания числа требований в системе от значений стоимостных коэффициентом.

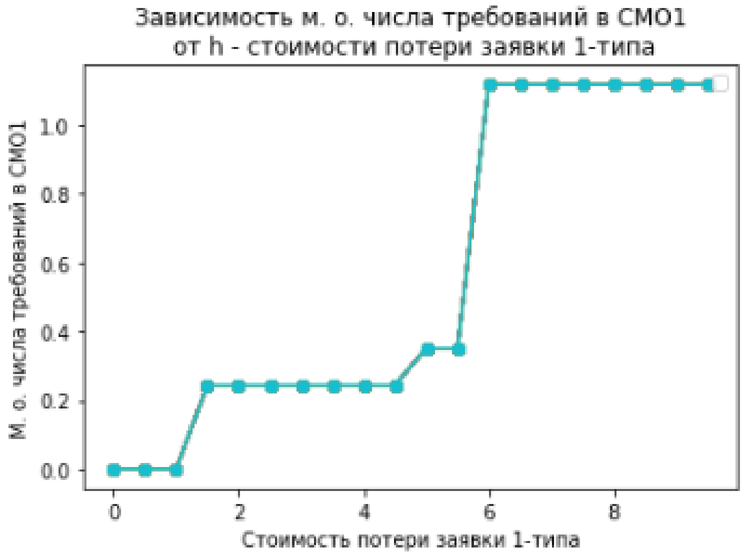

Рисунок 5 – Зависимость м. о. числа требований в $СМО_1$ от h - стоимости потери заявки 1-типа

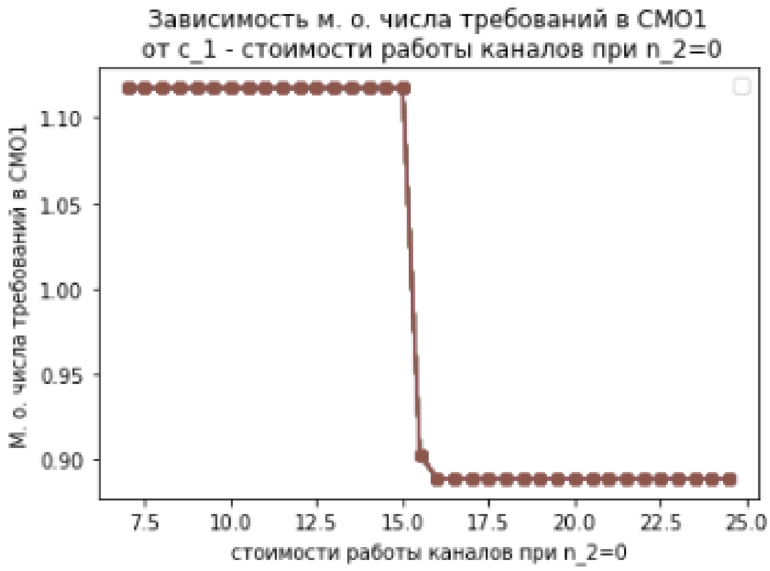

Рисунок 6 – Зависимость м. о. числа требований в $СМО_1$ от c_1 - стоимости работы каналов при $n_2 = 0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе была рассмотрена неполнодоступная сеть массового обслуживания с управлением процессом обслуживания поступивших заявок.

В программе реализован метод линейного программирования для опредления оптимальной стратегии управления поступающими требованиями в зависимости от состояния сети. Оптимальность управления определялась путем минимизации целевой функции, состоящей из стоимости потерь и стоимости единицы времени работы каждого канала СМО$_1$.

Программная реализация выполнена на языке программирования $Python$ с помощью интегрированной среды разработки $JupyterNotebook$. С помощью программы были исследованы особенности оптимизации неполнодоступной сети массового обслуживания и рассмотрены зависимости основных характеристик от стоимости функционирования компонентов сети.

Основные источники информации:

1. Лившец, Б. С. Теория телетрафика / А. П. Пшеничников, А. Д. Харкевич. – Москва: Издательство «Связь», 1979. – 224с.
2. Майн, Х. Марковские процесс принятия решений / Х. Майн, С. Осаки. – М.: Наука, 1977. – 176 с.
3. Митрофанов, Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания: Учеб.-метод. пособие / Ю. И. Митрофанов. – Саратов: Издательство «Научная книга», 2005. – 174 с.
4. Матвеев, В. Ф. Системы массового обслуживания / В. Ф. Матвеев, В. Г. Ушаков. – М. : Издателство МГУ, 1984. – 240 с.
5. Пономаренко, Л. А. Оптимизация марковских неполнодоступных сетей со сложными механизмами обслуживания / Л. М. Пономаренко, А. З. Меликов // Журнал автоматика и вычислительная техника. – 1989., № 3. – С. 33-37.
6. Назаров, А. А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов.– Томск : Издательство «НЛТ», 2010. – 228 с.
7. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.