

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и  
автоматического управления

**ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИСТЕМ  
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ  
МАРШРУТИЗАЦИЕЙ ТРЕБОВАНИЙ**  
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 481 группы  
направления 27.03.03 — Системный анализ и управление  
факультета КНиИТ  
Канер Регины Алексеевны

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

Е. С. Рогачко

Заведующий кафедрой

к. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

И. Е. Тананко

Саратов 2022

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** В любой системе обслуживания, состоящей из нескольких обслуживающих приборов, естественным образом возникает задача распределения поступающих требований, с целью эффективного использования имеющихся ресурсов. Существует ряд методов решения этой задачи, одним из которых является динамическая маршрутизация. Алгоритмы динамической маршрутизации распределяют поступающие в систему требования, опираясь на текущие характеристики загруженности обслуживающих приборов, в соответствии со способом маршрутизации.

**Цель бакалаврской работы** — исследовать сеть параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. Рассмотреть сеть параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований и описать ее функционирование марковским процессом принятия решений;
2. Изучить методы поиска оптимальных стратегий управления для марковских процессов принятия решений;
3. Разработать алгоритм метода анализа сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований;
4. Выполнить программную реализацию алгоритма;
5. С помощью разработанной программы провести исследование зависимости средней длительности пребывания требований в сети и стратегий маршрутизации требований от параметров сети.

**Методологические основы** исследования сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований и применения марковских процессов принятия решений представлены в работах S.A.E. Sassen, H.C. Tijms, R.D. Nobel [1], W.B. Powell [2], E.V. Denardo [3], S.M. Ross [4], J.M. Norman [5].

**Практическая значимость бакалаврской работы.** Разработанная программа может использоваться для поиска оптимального управления и анализа сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований. Программа может применяться при анализе реальных систем, состоящих из нескольких обслуживающих приборов, например, моделирующих обработку запросов телекоммуникационных сетей или

представляющих процессы гибкого производства.

**Структура и объем работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы — 51 страница, из них 40 страниц — основное содержание, включая 12 рисунков и 1 таблицу, список использованных источников информации — 20 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Первый раздел «Марковский процесс принятия решений при критерии средней стоимости»** посвящен описанию основных понятий теории марковских процессов принятия решений при критерии средней стоимости и рассмотрению методов поиска оптимальных стратегий управления [6].

В подразделе «*Относительные веса*» приведены теоремы, описывающие вычисление средней стоимости  $g(R)$  при стационарной стратегии  $R$  с помощью функции относительных весов, которая является основой для улучшения стратегии  $R$ .

Подраздел «*Улучшение стратегии*» посвящен способу улучшения стационарной стратегии  $R$  для получения стационарной стратегии с меньшей средней стоимостью за единицу времени. Приводится доказательство, что улучшение стратегии действительно ведет к лучшей стратегии.

В подразделе «*Ограничения Одони для метода итераций по значениям*» приводится метод итераций по значениям, который позволяет рекуррентно вычислять последовательность функций значений, аппроксимирующих минимальную среднюю стоимость за единицу времени. Метод итераций по значениям с использованием нижних и верхних границ является лучшим вычислительным методом решения задач поиска оптимальных стратегий управления для марковских процессов принятия решений.

Подраздел «*Индивидуальный метод итераций по стратегиям*» содержит описание метода, с помощью которого можно значительно уменьшить вычислительную работу по решению уравнений для вычисления относительных весов.

**Второй раздел «Анализ сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований»** посвящен методу анализа сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований.

Подраздел «*Описание сети*» включает в себя описание сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований, состоящей из  $n$  систем массового обслуживания типа  $M/M/s_k$ , где  $k = 1, \dots, n$ , а также полученные формулы для вычисления среднего числа требований в системе.

Рассматриваемая система массового обслуживания включает  $n$  групп обслуживающих приборов, работающих параллельно, где каждая группа приборов имеет свою очередь, то есть, иначе, данная система массового обслуживания может рассматриваться как сеть массового обслуживания, включающая  $n$  параллельных многоприборных систем массового обслуживания. Группа  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) включает  $s_k$  обслуживающих приборов. Требования поступают в сеть в соответствии с пуассоновским процессом с интенсивностью  $\lambda$ .

Стратегия управления маршрутизацией требований состоит в том, что каждое поступающее требование должно быть назначено в одну из  $n$  систем массового обслуживания. Требование находится в назначенной очереди, пока станет доступным обслуживающий прибор. Каждый обслуживающий прибор может одновременно обслуживать только одно требование. Длительности обслуживания в каждой системе распределены экспоненциально с параметром  $\mu_k$ . Среднее время обслуживания требований, назначенных в очередь  $k$ , составляет  $1/\mu_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Предполагается, что  $\lambda < \sum_{k=1}^n s_k \mu_k$ .

Цель управления маршрутизацией требований заключается в уменьшении среднего времени пребывания требований в сети. С учетом формулы Литтла минимизация среднего времени пребывания требований в сети эквивалентна минимизации среднего числа требований в сети.

Задача назначения поступающих требований в одну из групп обслуживающих приборов - это задача принятия решений, описываемая полумарковским процессом принятия решений с многомерным пространством состояний. Моменты принятия решений - это моменты поступления новых требований. Состояние системы в момент принятия решения представляет собой  $n$ -мерный вектор  $x = (i_1, \dots, i_n)$ , где  $i_j$  обозначает число требований, находящихся в очереди  $j$  и на обслуживании в  $j$ -ой группе приборов. Действие  $a = k$  в состоянии  $x$  означает, что новое поступающее требование назначается в очередь  $k$ . Для решения задачи, связанной с критерием оптимальности среднего

числа требований в сети, описывается следующая структура затрат. Затраты  $j$  возникают при наличии  $j$  требований в системе. Тогда средняя стоимость за единицу времени есть общее среднее число требований в системе.

Существуют различные стратегии управления маршрутизацией требований - правила назначения требований в системы обслуживания. При стратегии Бернулли (правило разделения Бернулли, Bernoulli-splitting rule) каждое поступающее требование назначается с заданной вероятностью  $p_k$  в очередь  $k$  для  $k = 1, \dots, n$ , независимо от длины очереди. Это правило назначения создает независимые пуассоновские потоки в очереди, где в очередь  $k$  поступает пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda p_k$ . Вероятности  $p_k$  должны удовлетворять условиям  $\sum_k p_k = 1$  и  $\lambda p_k < s_k \mu_k$  при  $k = 1, \dots, n$ .

Для системы  $M/M/s$  с интенсивностью поступления  $\alpha$  и  $s$  экспоненциальными обслуживающими приборами, каждый с интенсивностью обслуживания  $\mu$ , среднее число требований в системе равно

$$L(s, \alpha, \mu) = \frac{\rho (s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2} \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right\}^{-1} + s\rho,$$

где  $\rho = \alpha/(s\mu)$ . По правилу разделения Бернулли общее среднее число требований в сети равно

$$\sum_{k=1}^n L(s_k, \lambda p_k, \mu_k).$$

Оптимальное правило разделения Бернулли может быть найдено путём минимизации этого выражения относительно  $p_1, \dots, p_n$  удовлетворяющих условиям  $\sum_k p_k = 1$  и  $0 \leq \lambda p_k < s_k \mu_k$  при  $k = 1, \dots, n$ . Эта задача минимизации должна быть численно решена с помощью некоторого метода оптимизации.

Подраздел «*Одношаговое улучшение стратегии*» посвящен описанию получения улучшенной стратегии для правила разделения Бернулли  $R^{(0)}$ . Идея улучшения стратегии состоит в том, чтобы минимизировать для каждого состояния  $x$  разность  $\Delta(x, a, R^{(0)})$  определяемую как разность общих ожидаемых затрат за бесконечно длительный период времени при осуществлении первого действия  $a$  и следующего использования стратегии  $R^{(0)}$ , а не использования стратегии  $R^{(0)}$  с нулевого момента времени, когда начальное состояние равно  $x$ .

В соответствии с правилом разделения Бернулли  $n$  систем функционируют как независимые системы массового обслуживания типа  $M/M/s$ .

Рассмотрим изолированную систему массового обслуживания  $M/M/s$ . Для нее средняя стоимость за единицу времени определяется как

$$g = L(s, \alpha, \mu).$$

Процесс функционирования системы  $M/M/s$  можно рассматривать как полумарковский процесс принятия решений с одним решением в каждом состоянии. Решение - оставить систему в простое. В этой формулировке марковского процесса принятия решений удобно рассматривать состояние системы как в моменты поступления требований, так и в моменты завершения обслуживания требований. В системе  $M/M/s$  ситуация  $i$  требований, присутствующих сразу после завершения обслуживания, в вероятностном смысле, такая же, как ситуация  $i$  требований, присутствующих сразу после поступления требования. Определим функцию относительной стоимости  $w(i)$  следующим образом:

$$w(0) = 0, w(i) = K_i - gT_i, i = 1, 2, \dots,$$

где  $T_i$  - ожидаемое время до первого возврата к пустой системе, начиная с  $i$  находящихся в системе требований, и  $K_i$  - общая ожидаемая стоимость до первого возврата к пустой системе, начиная с  $i$  находящихся в системе требований для  $i \geq 1$ .

Величины  $K_i$  и  $T_i$  можно вычислить следующим образом:

$$T_i = \frac{1}{\alpha + i\mu} + \frac{i\mu}{\alpha + i\mu} T_{i-1} + \frac{\alpha}{\alpha + i\mu} T_{i+1},$$

где  $1 \leq i \leq s$ ,

$$K_i = \frac{i}{\alpha + i\mu} + \frac{i\mu}{\alpha + i\mu} K_{i-1} + \frac{\alpha}{\alpha + i\mu} K_{i+1},$$

где  $1 \leq i \leq s$ , при условии, что  $T_0 = K_0 = 0$ . Для  $i > s$  имеем

$$T_i = \frac{i - s}{s\mu - \alpha} + T_s,$$

$$K_i = \frac{i - s}{s\mu - \alpha} \left[ \frac{1}{2}(i - s)(i - s + 1) + \frac{\alpha}{s\mu - \alpha} \right] + \frac{s(i - s)}{s\mu - \alpha} + K_s.$$

Таким образом получаем следующий эвристический алгоритм поиска

разделяемой стратегии (разделяемого правила, separable rule), являющейся улучшением стратегии Бернулли [7].

### *Эвристический алгоритм*

*Шаг 1.* Вычислить значения  $p_k^{(0)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , вероятностей правила разделения Бернулли, минимизируя  $\sum_{k=1}^n L(s_k, \lambda p_k, \mu_k)$  при условии, что  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$  и  $0 \leq \lambda p_k < s_k \mu_k$  для  $k = 1, \dots, n$ .

*Шаг 2.* Для каждой системы  $k = 1, \dots, n$ , решить две системы линейных уравнений для  $T_i (= T_i(k))$  и  $K_i (= K_i(k))$  с  $\alpha = \lambda p_k^{(0)}$ ,  $s = s_k$  и  $\mu = \mu_k$ . Далее вычислить для каждой системы  $k$  среднюю стоимость  $g_k = L(s_k, \lambda p_k^{(0)}, \mu_k)$  и функцию  $w_k(i) = K_i(k) - g_k T_i(k)$ .

*Шаг 3.* Для каждого состояния  $x = (i_1, \dots, i_n)$  определить индекс  $k_0$ , при котором достигается минимум

$$\min_{1 \leq k \leq n} \{w_k(i_k + 1) - w_k(i_k)\}.$$

Разделяемое правило назначает новое поступающее требование в очередь  $k_0$  в состоянии  $x = (i_1, \dots, i_n)$ .

**Третий раздел «Описание алгоритма и программы для анализа сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований»** содержит описание разработанного алгоритма и программы для анализа сетей параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований.

Подраздел «*Описание алгоритма*» содержит алгоритм программы для анализа сетей параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований. Алгоритм программы детализирует эвристический алгоритм, приведенный в предыдущем разделе. В выпускной квалификационной работе алгоритм разработан для случая двух параллельных систем массового обслуживания, то есть  $n = 2$ . Алгоритм состоит из семи блоков, которые выполняются последовательно.

Блок 1. Ввод и проверка исходных данных.

Блок 2. Нахождение начальной стратегии маршрутизации требований (стратегии Бернулли).

Блок 3. Вычисление величин  $T_i(k)$  и  $K_i(k)$ .

Блок 4. Вычисление относительных стоимостей.

Блок 5. Формирование множества  $X$  состояний сети.

Блок 6. Улучшение решения.

Блок 7. Нахождение средней длительности пребывания требований в сети.

Среднюю длительность пребывания требований в сети  $\tau$  при использовании разделяемой стратегии можно найти по формуле:

$$\tau = \sum_{x \in X} \pi_x (i_1 + i_2) / \lambda,$$

где  $\pi_x$  - стационарная вероятность состояния  $x = (i_1, i_2) \in X$ .

В подразделах «*Интерфейс программы*» и «*Структура программы*» описываются интерфейс программы, используемые в программе идентификаторы и функции.

Разработанная программа предназначена для анализа рассматриваемой сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований. С ее применением осуществляется поиск оптимальной стратегии управления. Программный код написан на языке «Python» с помощью интегрированной среды разработки Spyder. Программа имеет консольный интерфейс пользователя. Программа функционирует в диалоговом режиме.

**Четвертый раздел «Результаты исследований сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований»** содержит описание проведенного исследования зависимости средней длительности пребывания требований в сети  $\tau$  от различных параметров сети двух параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований.

По результатам исследования были сделаны следующие выводы:

1. при увеличении интенсивности обслуживания в системах сети, увеличивается число состояний сети, в которых поступающее требование распределяется в систему, где была увеличена интенсивность обслуживания;
2. при увеличении интенсивности обслуживания в первой (второй) системе уменьшается среднее время пребывания требований в сети при обеих



- стратегиях маршрутизации требований (рисунок 1);
3. при любых значениях  $\mu_1$  ( $\mu_2$ ) средняя длительность пребывания требований в сети для стратегии разделяемого правила меньше, чем для стратегии Бернулли (рисунок 1).

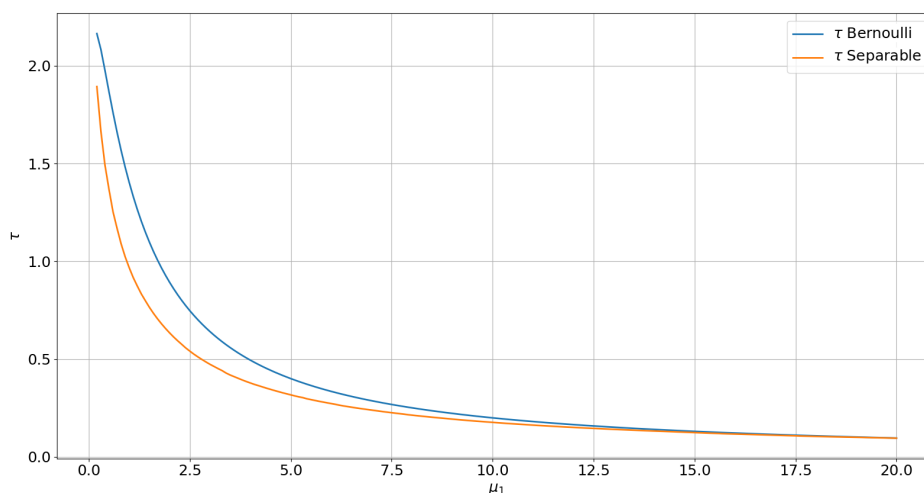


Рисунок 1 – График зависимости  $\tau$  от  $\mu_1$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе была рассмотрена сеть параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований и описан одношаговый метод улучшения стратегии, используемый для поиска оптимальной стратегии динамической маршрутизации требований.

Был разработан алгоритм метода анализа сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований. Данный алгоритм при заданных параметрах сети, состоящей из двух систем массового обслуживания, позволяет находить среднюю длительность пребывания требований в сети  $\tau$  при начальной стратегии маршрутизации (стратегии Бернулли) и оптимальной стратегии маршрутизации требований (разделяемой стратегии, определяемой управлениями  $k_0$ ).

По разработанному алгоритму была написана программа на языке *Python* с помощью интегрированной среды разработки *Spyder* для анализа сети параллельных систем массового обслуживания с управлением маршрутизацией требований. Данная программа позволяет задать параметры сети и получить оптимальную стратегию маршрутизации требований.

С помощью программы были исследованы особенности оптимальной стратегии маршрутизации требований при различных значениях интенсивностей обслуживания в системах сети. Было показано, что средняя длительность пребывания требований в сети при разделяемой стратегии меньше, чем при стратегии Бернулли.

### **Основные источники информации**

- 1 Sassen, S.A.E., H.C. Tijms, R.D. Nobel. A heuristic rule for routing customers to parallel servers/ S.A.E. Sassen, H.C. Tijms, R.D. Nobel// *Statistica Neerlandica*. 1997. Vol. 5, no. 1. P 107–121.
- 2 Powell, W.B. *Approximate Dynamic Programming: Solving the Curses of Dimensionality*/ W.B. Powell. New York: Wiley, 2007. 656 pp.
- 3 Denardo, E.V. *Dynamic Programming*/ E.V. Denardo. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1980. 277 pp.
- 4 Ross, S.M. *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*/ S.M. Ross. New York: Academic, 1983. 164 pp.
- 5 Norman, J.M. *Heuristic Procedures in Dynamic Programming*/ J.M. Norman. Manchester: Manchester University Press, 1972. 95 pp.
- 6 Boucherie, R.J. *Markov Decision Processes in Practice* / R.J. Boucherie, N.M. Dijk. Berlin: Springer, 2017. 550 pp.
- 7 Bhulai, S., Koole, G. On the structure of value functions for threshold policies in queueing models/ S. Bhulai, G. Koole// *J. Appl. Probab.* 2003. Vol. 40, no. 3. P. 613–622.