МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Финансовая математика, характеристики продолжительности жизни и пожизненные ренты.

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 451 группы

направления **38.03.05 – Бизнес-информатика**

механико-математического факультета

Агапова Климентия Александровича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________ В. С. Рыхлов

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________ С. И. Дудов

Саратов 2022

Введение. Интерес к теории страхования жизни развивается в России вместе с развитием страхового рынка – важной части свободной рыночной экономики. Актуарный анализ, в частности, становится неотъемлемым аспектом деятельности серьезных страховых компаний и банков. Страхование как систем защиты имущественных интересов граждан, организаций и государства является необходимым элементом современного общества. Оно обеспечивает непрерывность всех видов общественно полезной деятельности, а также поддержание уровня жизни, доходов людей при наступлении определенных событий – страховых случаев.

В данной работе будут рассмотрена приведенная ценность – это сумма дисконтированных значений потока платежей, приведённых к сегодняшнему дню, для полного понимая при рассмотрении приведенной ценности будут проанализированы понятия коэффициента дисконтирования, эффективной учетной ставки. После этого будут рассмотрены оценивания серии платжей и детерминированные ренты для того, чтобы определить современную стоимость потоков платежей. Следующей темой для анализа станут характеристики продолжительности жизни, такие как функция выживания, которая показывает вероятность того, что человек доживет до определенного возраста, кривая смерти, которая рассматривает среднее число представителей исходной группы в какое-то количество новорожденных, умерших в определенном возрасте, интенсивность смерти, показывающая вероятность смерти в определенном интервале и остаточное время жизни. После этого будут описаны основые виды пожизненной ренты: полная пожизненная рента, которая может быть описана как ежегодное получение определенной суммы с некоторого момента, которые производятся только во время жизни человека, временная пожизненная рента, которая является подобие полной пожизненной ренты с одним условием – сумма выплачивается не более, чем определенное количество лет, отсроченная пожизненная рента, которая начинает выплачиваться через определенный промежуток времени, при условии, что человек жив, пожизненные ренты выплачиваемые с частотой p, где ежегодные платежи разбиваются на несколько и непрерывные ренты, которые можно представить как непрерывный денежный поток.

После этого будет рассмотрен язык программирования Python, проанализированы его достоинства и недостатки. Заключающим этапом работы будет решение задач финансовой математики с использованием Python и подведение итогов.

Финансовая математика. Финансовая математика – это применение математических методов к финансовым проблемам. Она основана на инструментах вероятности, статистики, случайных процессов и экономической теории. Традиционно инвестиционные банки, коммерческие банки, хедж-фонды, страховые компании, корпоративные казначейства и регулирующие органы применяют методы финансовой математики для решения таких задач, как оценка производных ценных бумаг, структурирование портфеля, управление рисками и моделирование сценариев. Отрасли, которые зависят от сырьевых товаров (например, энергетика, производство), также используют финансовую математику. Актуарная математика – область сравнительно новая для финансовоэкономического образования в России. Подготовка квалифицированных специалистов в области актуарной математики, потребность в которых диктуется экономическими сдвигами последних лет, такими, например, как развитие рынка страхования и негосударственного пенсионного обеспечения, является актуальной задачей экономического и финансового образования.

Приведенная ценность. Ценность денежных средств изменяется со временем. Текущая стоимость – это сумма денег, которая при вложении сейчас по заданной ставке сложного процента накопится в точности до заданной суммы на заданную дату в будущем. Приведенная стоимость важна, поскольку позволяет инвесторам сравнивать стоимость во времени. Текущая стоимость может помочь инвесторам оценить будущие финансовые выгоды от текущих активов или обязательств.

Допустим, необходимо в определенный момент времени $t > 0$, выплатить заданную сумму денег C. Для того, чтобы в момент времени t обладать конкретно этим числом денег C, то в данный момент нужно иметь количество денег, равное $P = C \cdot (1+i)^{-t}$, так как после инвестирования этих финансов на время t, они превратятся в сумму $P(1+i)^t = C$. Величина P называется приведенной ценностью суммы C в момент t. Иногда употребляется термин современная стоимость, приведенная стоимость и т.д.

Оценивание серии платежей. Детерминированные ренты. Некоторая сумма денег, которая имеется сегодня, представляет собой большую ценность, чем та же сумма, полученная через год. Это объясняется тем, что можно было бы инвестировать деньги и через год получить эту сумму с процентами.

То есть, если необходимо оценить серии выплат, то они должны соответствовать некоторому фиксированному моменту $t_0 = 0$, после чего эти выплаты можно складывать, сравнивать и т. д.

Если рассмотреть серии платажей применительно к пенсионныи схемам и страхованию, то самой значимой является задача определения современной стоимости a серии из n выплат величиной $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответственно, которые будут сделаны в некоторые моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в будущем. Величина a может рассматриваться, например, как сумма, которую человек должен внести в пенсионный фонд в момент заключения договора (этот момент обычно принимают за начальный) с тем, чтобы в будущем, в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$, получать пенсию величиной $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Как следует из вышесказанного,

$$a = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + \ldots + b_n v^{t_n}.$$

Если плата за пенсии производится в виде нескольких платежей величиной $c_1, \ldots, c_k$, сделанных в моменты $\tau_1, \ldots, \tau_k$, то справедливое соотношение между взносами c_i и пенсионными выплатами b_i находится из принципа эквивалентности обязательств:

$$c_1 v^{\tau_1} + \ldots + c_k v^{\tau_k} = b_1 v^{t_1} + \ldots + b_n v^{t_n}.$$

Приведенная стоимость всех взносов в пенсионный фонд или страховую компанию – это левая часть формулы, соответсвтенно современная стоимость всех пенсионных выплат – правая часть формулы.

Иногда употребляются термины современная стоимость, приведенная стоимость и используется обозначение PV.

Если платежи производятся через равные промежутки времени определенное количество раз, то такие серии платежей называют постоянными рентами.

Постоянные ренты могут быть запаздывающими, это ренты, в который выплаты производятся в конце временного промежутка. Могут быть упреждающими, то есть выплаты производятся в начале временных промежутков. Упреждающие и запаздывающие ренты могут быть отсроченными. Это значит, что выплаты производятся через какое-то количество периодов.

Характеристики продолжительности жизни. Систематический анализ непредвиденных обстоятельств человеческой жизни составляет основу работы актуария. При решении проблем, связанных с этими непредвиденными обстоятельствами, ему требуется определенный тип количественного измерения их последствий. В первую очередь актуария волнуют такие непредвиденные обстоятельства, как смерть и выживание. В этом разделе будет рассмотрена проблема количественного выражения наблюдаемых моделей смертности, а также определены и рассмотрены различные функции, которые использовались для этой цели. **Функция выживания.** Для получения численной меры смерти и выживания необходимо определить фундаментальную функцию вероятности. Пусть x представляет собой возраст в годах человеческой жизни. Тогда x может иметь любое значение от 0 до верхнего предела продолжительности жизни. Рассмотрим теперь вероятность того, что новая жизнь в возрасте 0 лет доживет до возраста x.

Функция $s(x) = 1 - F(x)$ называется функцией выживания:

$$s(x) = P(T \geq x).$$

Кривая смерти. В актуарной математике график плотности продолжительности жизни $f(x) = -s'(x)$ (или, что практически тоже, график функции $l_0 f(x)$) называют кривой смертей.

Величина $l_0 f(x)$ имеет простой статистический смысл. Рассмотрим среднее число представителей исходной группы в l_0 новорожденных, умерших в возрасте x лет. Эта величина обозначается d_x и равна $d_x = l_x - l_{x+1}$. Тогда

$d_x \approx l_0 f(x)$. **Интенсивность смерти.** Величина

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)}$$

называется интенсивностью смертности. Для человека, дожившего до x лет, при малых t величина $\mu_x t$ приближенно выражает вероятность смерти в интервале $(x, x+t)$. **Остаточное время жизни.** Страховая компания имеет дело с конкретными людьми, дожившими до определенного возраста. Статистические свойства времени жизни таких людей существенно отличаются от свойств времени жизни новорожденных. Если человек в возрасте x лет обратился в страховую компанию (в актуарнойматематике такого человека обозначают (x)), то заведомо известно, что он дожил до x лет, и поэтому все случайные события, связанные с этим человеком, должны рассматриваться при условии, что $T > x$.

Для человека в возрасте x лет обычно рассматривают не продолжительность жизни T, а остаточное время жизни $T_x = T - x$.

Этой случайной величине T_x соответствуют видоизмененные характеристики продолжительности жизни.

Пожизненная рента.

Пожизненный аннуитет гарантирует получение дохода в течение всей жизни. В таких аннуитетах размер выплат будет определяться в зависимости от состояния вашего здоровья и возраста, поскольку выплаты, скорее всего, будут продолжаться дольше для более молодых и здоровых людей. **Основные виды рент.** В данном разделе будут рассмотрены основные виды пожизненных рент: полная пожизненная рента, временная пожизненная рента, отсроченная пожизненная рента, пожизненные ренты выплачиваемые с частотой p и непрерывные ренты. **Полная пожизненная рента.** Простейшая пожизненная рента может быть описана следующим образом. Начиная с некоторого момента $t_0 = 0$ человек раз в год начинает получать определенную сумму (которую обычно принимают в качестве условной денежной единицы). Выплаты производятся только во время жизни человека. **Временная пожизненная рента.** Пусть, как и ранее, $t_0 = 0$ - настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента - x лет. N-летняя временная пожизненная рента определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год пожизненно, начиная с момента $t_0 = 0$, но не более, чем n лет. **Отсроченная пожизненная рента.** Пусть, как и ранее, $t_0 = 0$ - настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента - x лет. Отсроченная на m лет пожизненная рента определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год, начиная с момента $t_0 + m = m$, до тех пор, пока человек жив. Однако если человек умрет до момента m, то ни одной выплаты не производится. **Пожизненные ренты выплачиваемые с частотой *p*.** В рассмотренных выше примерах предполагалась, что выплаты производятся один раз в год (в начале года). Для приложений к пенсионным схемам гораздо интереснее случай, когда выплаты производятся раз в месяц ($p = 12$), раз в квартал ($p = 4$), раз в неделю ($p = 52$). В стандартных рентах такого рода в качестве условной денежной единицы рассматривается алгебраическая сумма всех выплат в течение года. Иначе говоря, каждая отдельная выплата имеет величину $1/p$. **Непрерывные ренты.** Непрерывные ренты можно рассматривать как предельный случай рент, выплачиваемых с частотой p при $p \to +\infty$. Их можно представлять как непрерывный денежный поток (скажем, непрерывную тонкую струю золота), текущий со скоростью 1.

Оценивание рент. Метод суммарной выплаты. Стоимость ренты в начальный момент времени $t_0 = 0$ обозначают символом Y с соответсвующими индексами. Ее можно подсчитать двумя основными способами. При использовании метода суммарной выплаты пожизненная рента рассматривается как обычная рента, но со случайным числом выплат. Это позволяет получить явную формулу для современной стоимости ренты с помощью формул для детерминированных рент и связать ее с современной стоимостью соответствующего вида страхования. Например, для пожизненной ренты

$$\ddot{Y} = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}} = \frac{1 - v^{K_x+1}}{d} = \frac{1 - Z_x}{d}.$$

Метод текущего платежа. В отличие от метода суммарной выплаты, который рассматривает пожизненную ренту как сумму случайного числа детерминированных слагаемых, метод текущей выплаты рассматривает пожизненную ренту как сумму детерминированного (возможно, бесконечного) числа случайных слагаемых. Например, для пожизненной ренты это означает следующее. В принципе выплаты возможны в любой момент времени $k = 0, 1, \ldots$ Выплата в момент к производится, если человек еще жив, т. е. если $T_x > k$. Поэтому величина выплаты в момент k — это индикатор события $\{T_x > k\}$. Соответственно приведенная ценность этой выплаты в момент $t_0 = 0$ – это случайная величина $v^k I\{T_x > k\}$ и, значит,

$$\ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k \cdot I\{T_x > k\}.$$

Актуарное накопление. Рассмотрим пенсионный фонд, в который N человек в возрасте x лет каждый внесли по единичной сумме в момент $t_0 = 0$. К моменту t эта сумма вырастет до $N \cdot (1 + i)^t$. Одновременно сократится и число участников фонда – в живых останется в среднем $N \cdot P(T_x > t) = N \times l_{x+t}/l_x$ человек. Если на средства фонда могут претендовать только живые участники фонда, то на каждого из них будет приходиться сумма

$$A(x; t) = \frac{l_x}{l_{x+t}} \cdot (1 + i)^t.$$

Это актуарное накопление больше, чем обычное накопление $(1 + i)^t$ в теории сложных процентов, так как пенсионный счет участника растет не только за счет доходов от процентов, но и за счет средств умерших участников фонда.

Задачи и решения. Для разработки программного кода был выбран язык программирования Python.

С помощью Python можно сделать больше дел, написав при этом меньше кода. Его простота и обширная библиотека делают разработчиков более продуктивными по сравнению с теми, кто пишет код на другом языке. При разработке программного кода были использованы такие библиотеки как NumPy, math, streamlit.

Язык поддерживает объектно-ориентированное и структурированное программирование, а также функциональное и аспектно-ориентированное программирование. Это означает, что кодовую базу Python легче поддерживать, требуется меньше времени на рефакторинг и поддержание в форме долгосрочных проектов.

В данном разделе описываются задачи, представляется их решение и реализация на языке программирования Python.

Например, известно, что

$$l_{30} = 96307, l_{31} = 96117, l_{32} = 95918.$$

Подсчитайте актуарную современную стоимость 3-х летней временной пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год в начале года в размере 10000 рублей. Возраст человека на момент заключения договора – 30 лет. Эффективная годовая процентная ставка $i = 25\%$.

Решение. Искомая величина равна 10000 $\cdot\ddot{a}_{30:\overline{3}|}$, где, в свою очередь,

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{30}} \cdot (l_{30} + \upsilon l_{31} + \upsilon^2 l_{32}) =$$

$$= \frac{96307 + 0,8 \cdot 96117 + 0,64 \cdot 95918}{96307} \approx 2,4358,$$

так что актуарная современная стоимость рассматриваемой ренты равна 24 358 руб.

Реализация данной задачи на языке программирования Python представляет собой функцию, которой необходимо задать количество лет временной пожизненной ренты, количество известных l_x, процентную ставку i, возраст x и сумму ренты выплачиваемой раз в год, после этого вас попросят ввести l_x и на экране появится ответ. Кроме этого была описана функция, которая вычисляет значение коэффициента дисконтирования υ.

```
def Mu(i, n):
    mu = (1+i)**(-n)
    return mu

def A1(n, g, summa, x):
    a1 = 0.0
    a_1 = 0.0
    fr = ls[0]
```

```
    for z in range(0, n):
        a1 += Mu(g, z) * ls[z]
    a_1 = summa * (a1 / (fr * Mu(g, 0)))
    return a_1
```

Результатом работы программы является:

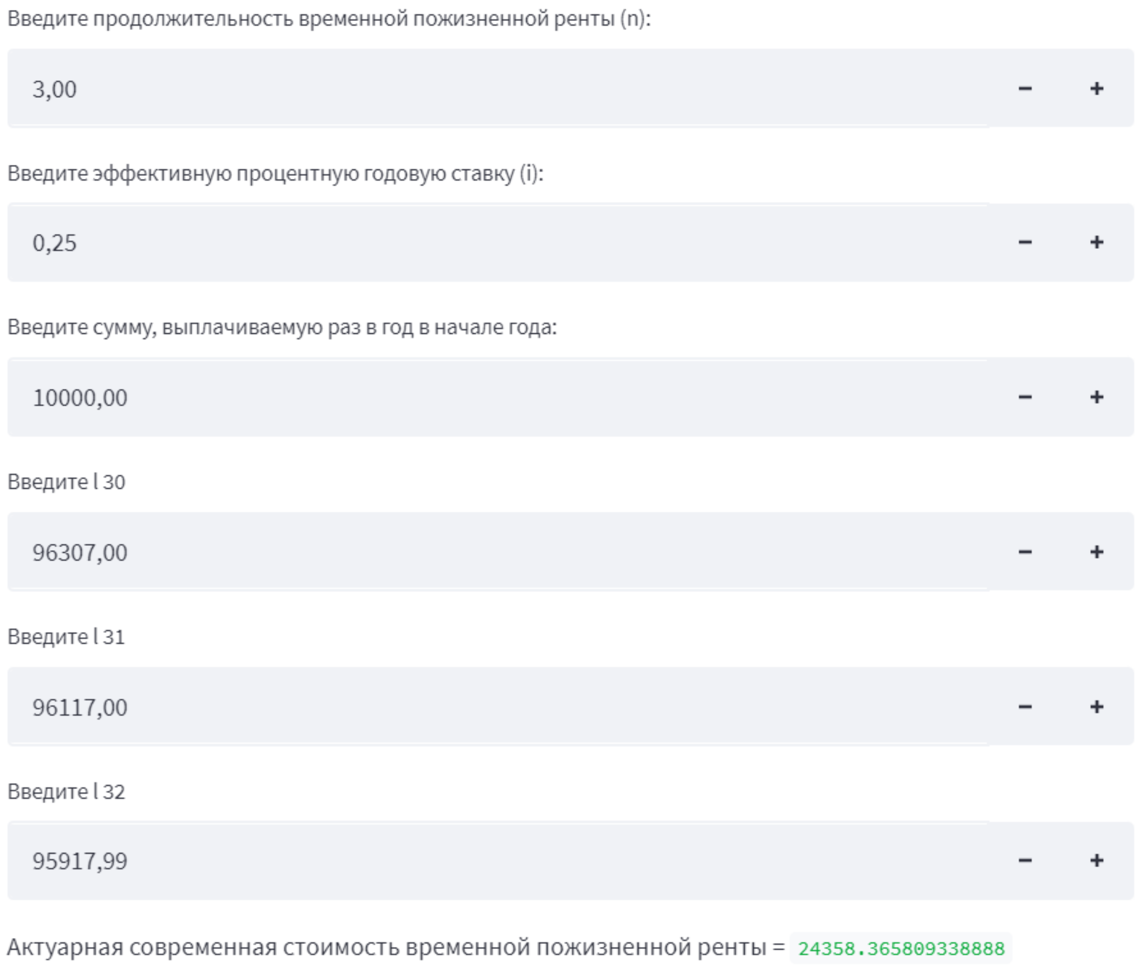

Рисунок 1

Заключение. При выполнении данной работы были изучены основы финансовой математики. Также рассмотрены способы решения задач финансовой математики с использованием языка программирования Python, на основе которых в дальнейшем можно построить многофункциональную программу.