МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Финансовая математика. Модели краткосрочного страхования.

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 451 группы

направления **38.03.05 – Бизнес-информатика**

механико-математического факультета

Ревзина Леонида Владимировича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________________ В. С. Рыхлов

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________ С. И. Дудов

Саратов 2022

Введение.В данной работе будет рассмотрена одна из важнейших, но при том одна из наименее изученных отраслей экономики – страхование. Актуарная математика, используя методы математической статистики и теории вероятности, помогает решить эту проблему. Целью работы является рассмотрение моделей краткосрочного страхования жизни и решение задач актуарной математики с привлечением высокоуровнего языка программирования общего назначения Python.

В данной работе будут рассмотрены основные сведения о краткосрочном страховании, историческая справка и сферы применения. Далее будут рассмотрены модели краткочсрочного страхования, нетто-премия, защитная надбавка и модель индивидуальных потерь. В следующем разделе будет представлена краткая справка по используемому для решения задач языку программирования Python.

Заключающим этапом работы будет рассмотрение и решение нескольких задач актуарной математики с привлечением языка программирования Python.

Финансовая математика. Финансовая математика — раздел прикладной математики, имеющий дело с финансовыми расчётами и финансовыми задачами. В финансовой математике любой финансовый инструмент рассматривается как генератор некоторого денежного потока. Задача классической финансовой математики сводится к сопоставлению денежных потоков от различных финансовых инструментов исходя из критериев временной ценности денег, оценка эффективности вложений в те или иные финансовые инструменты, разработка финансовой стратегии.

Страхование жизни. Основные сведения о страховании жизни. Краткий исторический обзор. Первые полисы страхования жизни были оформлены в начале 18 века. Первой компанией, предложившей страхование жизни, было Дружественное общество по бессрочной гарантии, основанное в Лондоне в 1706 году Уильямом Талботом и сэром Томасом Алленом.

Первая таблица смертности была написана Эдмундом Галлеем в 1693 году, но только в 1750-х годах необходимые математические и статистические инструменты были созданы для развития современного страхования жизни.

В 1776 году Общество провело первую актуарную оценку обязательств и впоследствии распределило первую возвратную премию (1781) и промежуточную премию (1809) среди своих членов. Он также использовал регулярные оценки для уравновешивания конкурирующих интересов.

Продажа страхования жизни в США началась в конце 1760-х годов. В Филадельфии и Нью-Йорке в 1759 году основана корпорация для оказания помощи бедным и неблагополучным вдовам и детям министров.

В конце 19 века стало доступно "страхование от несчастных случаев что очень похоже на современное страхование по инвалидности.

Первой компанией, предложившей страхование от несчастных случаев, была компания по страхованию железнодорожных пассажиров, созданная в 1848 году в Англии для страхования от растущего числа смертельных случаев в зарождающейся железнодорожной системе. Она была зарегистрирована как Универсальная компания по компенсации несчастных случаев, чтобы "... гарантировать жизнь людей, путешествующих по железной дороге, и предоставлять, в случае несчастного случая, не приводящего к летальному исходу, компенсацию страхователям за травмы, полученные при определенных условиях".

Термин краскосрочное страхование. Страхование – это такой вид необходимой общественно полезной деятельности, при которой граждане и организации заранее страхуют себя от неблагоприятных последствий в сфере их материальных и личных нематериальных благ путем внесения денежных взносов в особый фонд специализированной организации (страховщика), оказывающей страховые услуги, а эта организация при наступлении указанных последствий выплачивает за счет средств этого фонда страхователю или иному лицу обусловленную сумму.

В условиях перехода к рыночным отношениям страхование становится объективно необходимым элементом всего хозяйственного механизма. Сфера его применения значительно расширяется, охватывая все формы собственности. Страховой рынок предполагает функционирование различных страховых организаций, конкурирующих между собой и выступающих в различных организационно-правовых формах.

Термин краткосрочное страхование применяется для обозначения страховых договоров, заключенных на срок до 12 месяцев. Минимальный срок такого страхования – 3 дня. Существуют также случаи, когда страхование может быть заключено на очень короткий срок, например несколько часов или даже минут. Такие случаи происходят довольно редко, например когда человек страхуется на время прыжка с парашютом или на время соревнований.

Модели краткосрочного страхования. Простейший вид страхования жизни заключается в следующем.

Страхователь платит страховой компании страховую премию в размере р руб., страхователем может быть сам застрахованный или другое лицо.

В свою очередь страховая компания обязуется выплатить лицу, в пользу которого заключен договор, страховую сумму b руб. в случае смерти застрахованного в течение года по причинам, перечисленным в договоре.

Страховая сумма часто принимается как 1 или 1000.

Нетто-премия. Страховая выплата – величина гораздо большая, нежели страхова премия. Одной из важнейших задач актуарной математики является нахождения оптимального соотношения между этими величинами. В ходе решения данной задачи принимаются во внимание такие факторы как: вероятность наступления страхового случая, его ожидаемая величина и возможные флуктуации, связь с другими рисками, которые уже приняты компанией, организационные расходы компании на ведение дела, соотношение между спросом и предложением по данному виду рисков на рынке страховых услуг и множество других факторов. Однако основным обычно является принцип эквивалентности финансовых обязательств страховой компании и застрахованного. В рассмотренной выше простейшей схеме страхования, когда плата за страховку полностью вносится в момент заключения договора, обязательство застрахованного выражается в уплате премии р. Обязательство компании заключается в выплате страховой суммы, если наступит страховой случай. Таким образом, денежный эквивалент обязательств страховщика, X, является случайной величиной:

$$X = \begin{cases} b, & \text{если наступил страховой случай} \\ 0, & \text{в противоположном случае} \end{cases}$$

В простейшей форме принцип эквивалентности обязательств выражается равенством:

$$P = EX$$

т.е. в качестве платы за страховку назначается ожидаемая величина убытка. Эта премия называется нетто-премией (net premium).

Защитная надбавка. Купив за фиксированную премию р руб. страховой полис, страхователь избавил выгодоприобретателя от риска финансовых потерь, связанных с неопределенностью момента смерти застрахованного. Однако сам риск не исчез, его приняла на себя страховая компания.

Поэтому равенство $P = EX$ на самом деле не выражает эквивалентности обязательств страхователя и страховщика. Хотя в среднем и страховщик, и страхователь платят одну и туже сумму, страховая компания имеет риск, связанный с тем, что в силу случайных обстоятельств ей, ей может быть, придется выплатить гораздо большую сумму, чем EX. Страхователь же такого риска не имеет.

Поэтому было бы справедливо, что плата за страховку включала бы надбавку L , которая служила бы эквивалентом случайности, влияющей на компанию. Эту надбавку называют страховой (или защитной) надбавкой (или нагрузкой) (security loading), а $\Theta = L/EX$ – относительной страховой надбавкой (relative security loading).

Величина защитной надбавки определяется такой, чтобы вероятность того, что компания будет иметь потери по некоторому портфелю договоров («разорится»), была достаточно малой величиной.

Следует отметить, что реальная плата за страховку (брутто-премия или офисная премия) – больше нагруженной нетто-премии (часто в несколько раз). Разница между ними позволяет страховой компании покрыть административные расходы, обеспечить доход и т.д.

Модель индивидуальных потерь. Точный расчет защитной надбавки может быть произведен в рамках теории риска.

Простейшей моделью функционирования страховой компании, предназначенной для расчета вероятности разорения, является модель индивидуального риска.

Обычно предполагается, что в модели индивидуального риска случайные величины $X_1, ..., X_n$ – независимы.

В рамках этой модели «разорение» определяется суммарными потерями по портфелю $S = X_1 + ... + X_n$. Если эти суммарные выплаты больше, чем активы компании, предназначенные для выплат по этому блоку бизнеса, u , то компания не сможет выполнить все свои обязательства (без привлечения дополнительных средств); в этом случае говорят о «разорении».

Итак, вероятность «разорения» равна $R = P(X_1 + ... + X_n > u)$.

Поскольку суммарные выплаты S представляют собой сумму независимых случайных величин, распределение случайной величины S может быть подсчитано с помощью классических теорем и методов теории вероятности.

Прежде всего — это использование сверток. Напомним, что если X_1 и X_2 – две независимые неотрицательные случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция распределения их суммы $X_1 + X_2$ может быть подсчитана по формуле:

$$F(x) = \int\limits_0^x F_1(x-y)\mathrm{d}F_2(y)$$

Применяя эту формулу несколько раз, можно подсчитать функцию распределения суммы любого числа слагаемых.

Если случайные величины X_1 и X_2 – непрерывны, то обычно работают с плотностями $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Плотность суммы может быть подсчитана по формуле:

$$f(x) = \int\limits_0^x f_1(x-y)\mathrm{d}f_2(y)$$

Если случайные величины X_1 и X_2 – целочисленные, то вместо функции распределения обычно работают с распределениями:

$$p_1(n) = P(X_1 = n), \qquad p_2(n) = P(X_2 = n)$$

Распределение суммы $p(n) = P(X_1 + X_2 = n)$ может быть определено по формуле:

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} p_1(k)p_2(n-k)$$

При росте N вероятность $P(X_1 + ... + X_N \leq x)$ часто имеет определенный предел, который можно принять в качестве приближенного значения этой вероятности. Точность подобных приближений обычно очень велика и удовлетворяет практической потребности.

Если случайные величины $X_1, ..., X_n$ независимы и одинаково распределены со средним ES_n и дисперсией σ^2, то при $N \to \infty$ функция распределения центрированной и нормированной суммы:

$$S_n^* = \frac{X_1 + ... + X_n - N_a}{\sigma\sqrt{N}} = \frac{S_N - ES_N}{\sqrt{VarS_n}}$$

имеет предел, равный $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

Python. Python – Высокоуровневый язык программирования общего назначения, ориентированный на повышение производительности разработчика и читаемости кода. Python поддерживает структурное, обобщенное, объектно-ориентированное, функциональное и аспектно-ориентированное программирование. Python используется по всему миру и поставляется в составе операционных систем на базе Linux, а также в компьютерах от фирмы Apple на базе MacOS. Python – активно развивающийся язык программирования, новые версии с добавлением/изменением языковых свойств выходят примерно раз в два с половиной года.

К важным плюсам Python относятся:

1)Простота.

2)Обширность применения.

3)Обширные библиотеки.

4)Подходит для большинства типов современных операционных систем.

Данный язык программирования также имеет минусы:

1)Некорректное копирование кода.

2)Конвертация программы в exe.

3)Несовместимость разных версий языка.

Задачи и решения. Задача на нахождение коэффициента вариации. Найдите коэффициент вариации выплат по договору страхования жизни на один год. Страховая сумма $b = 100000$ руб., вероятность смерти застрахованного в течение года $q = 0,0025$.

Решение

Пусть случайная величина X описывает выплаты по договору. Тогда:

$$EX = b \cdot q = 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 250(\text{руб.}),$$

$$VarX = b^2 \cdot (1-q) \cdot q = 10^{10} \cdot (1 - 25 \cdot 10^{-4}) \cdot 25 \cdot 10^{-4} \approx 25 \cdot 10^6,$$

так что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma x = \sqrt{VarX} \approx 5000(\text{руб.}),$$

а коэффициент вариации

$$cx = \sigma x / EX \approx 5000/250 = 20.$$

Для решения задачи с помощью языка программирования Python была написана программа, которой необходимо задать величину страховой суммы b и вероятность смерти застрахованного в течение страхового в течение года q. Программа выполняет описанные выше действия.

Задача на нахождение общей Нетто-премии. Страховая компания заключила договор группового страхования $N = 60000$ работников большого предприятия сроком на один год. Страховая сумма равна 1000. Для каждого работника интенсивность смертности на протяжении этого года не меняется с течением времени и имеет вид:

$$\mu_x = 0,001h,$$

где параметр h описывает состояние здоровья работника. Параметр h является случайной величиной, имеющей равномерное распределение на интервале (1 ; 9). Найдите общую нетто-премию по этому договору.

Решение

Для работника с фиксированным значением состояния здоровья h вероятность смерти в течение рассматриваемого года равна

$$q(h) = 1 - e^{-0,001h}.$$

Поэтому для него нетто-премия равна

$$\pi(h) = 1000q(h) = 1000(1 - e^{-0,001h}).$$

Для случайно выбранного работника нетто-премия равна

$$\pi = \int\limits_1^9 \pi(h)\frac{1}{8}dh = 1000(1 - \frac{e^{-0,001} - e^{-0,009}}{0,008}) \approx 4,984867$$

Соответственно общая нетто-премия равна

$$N\pi \approx 299092$$

Для решения задачи с помощью языка программирования Python была написана программа, которой необходимо задать количество работников предприятия N и величину страховой суммы b. Программа выполняет описанные выше действия.

Задача на нахождение коэффициента вариации в зависимости от причины смерти. Подсчитайте среднее значение и коэффициент вариации выплат по договору страхования жизни на один год с зависимостью страховой суммы от причины смерти. Страховая сумма при смерти от несчастного случая $b_1 = 500000$ руб., а при смерти от «естественных» причин $b_2 = 100000$ руб. Вероятность смерти в течение года от несчастного случая $q^{(1)} = 0,0005$, а вероятность смерти в течение года от «естественных» причин $q^{(2)} = 0,002$.

Решение

Пусть случайная величина X описывает выплаты по договору. Тогда

$$EX = b_1 \cdot q^{(1)} + b_2 \cdot q^{(2)} = 450(\text{руб.}),$$

$$VarX = b_1^2 \cdot q^{(1)} + b_2^2 \cdot q^{(2)} - (EX)^2 \approx 145 \cdot 10^6,$$

так что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma x = \sqrt{VarX} \approx 12042(\text{руб.}),$$

а коэффициент вариации

$$cx = \sigma x / mx \approx 26,76.$$

Для решения задачи с помощью языка программирования Python была написана программа, которой необходимо задать величину страховой выплаты по причине несчастного случая, величину страховой выплаты при смерти по естественной причине, вероятность смерти застрахованного по причине несчастного случая и вероятность смерти застрахованного по естественной причине. Программа выполняет описанные выше действия.

Заключение. При выполнении данной работы были изучены основы финансовой математики. Также рассмотрены способы решения задач финансовой математики с использованием языка программирования Python, на основе которых в дальнейшем можно построить многофункциональную программу.