МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Элективный курс «Геометрия в олимпиадном программировании»

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Дружининой Кристины Владимировны

Научный руководитель

доцент, к.п.н. А. В. Букушева

Зав. кафедрой

к.ф-м.н., доцент С. В. Галаев

Саратов 2022

Введение. На сегодняшнее время олимпиадное программирование актуально и востребовано. Непомерную роль в распространение сыграла информационно-коммуникационная сеть, т.е. интернет. Существуют сообщества, любители и профессионалы, увлеченные данным делом.

Для большинства предлагаемых геометрических задач на олимпиадном программировании основную сложность, несет не реализация решения на электронно-вычислительной машине, а его предварительная разработка «на бумаге» − создание и поиск решения. Отсюда и следует зависимость успехов учеников от их знаний в области геометрии. Как искать решение, если нет определенного алгоритма или этот алгоритм не узнан. В этом помочь должен учитель, научить ученика действовать в подобных ситуациях. Ведь олимпиадная задача – это миниатюрное исследование, а значит учитель должен передать ученику методы и приемы ведения исследования. Год за годом задачи, связанные с геометрией в олимпиадном программировании, составлялись с целью проверки креативности и математического мышления у учащихся, а не только технических навыков.

В средней школе ученики обычно завершают свое отношение к математике и свое восприятие себя, как учеников математики с точки зрения способностей, мотивации, интереса и компетентности. Поэтому предоставление им различных возможностей для развития позитивного и успешного подхода к изучению математики имеет решающее значение и может помочь им оценить актуальность, полезность и творческий потенциал этого предмета. Здесь в силу вступают элективные курсы, ученик выбирает из предложенного набора курсов те, которые интересны или необходимы ему, например, с точки зрения дальнейшей его профессиональной деятельности. Школьники, которые принимают участие в олимпиадах по программированию, обладают знаниями, умениями и навыками по математики намного выше, чем их ровесники. Они умеют решать трудные и нестандартные задачи, имеют большой кругозор из разных областей информатики и математики. На элективном курсе школьники готовятся предварительно к участию в олимпиадном программировании для того, чтобы добиться высоких результатов. Ведь для успешной подготовки недостаточно учебных часов.

Цель работы: теоретическое обоснование и практическая разработка методического обеспечения элективного курса «Геометрия в олимпиадном программировании» для учащихся 9-го класса.

Задачи работы:

1. Рассмотреть определение понятия «элективный курс» в профильном обучении, выделить и охарактеризовать возможные типы, цель, функции, содержание и условия эффективной реализации.

2. Выявить роль математики в школьном олимпиадном программировании.

3. Описать концептуальные основы создания элективного курса «Геометрия в олимпиадном программировании».

4. Разработать методическое обеспечение элективного курса «Геометрия в олимпиадном программировании» для учащихся 9-го класса.

Методы работы: анализ литературы по теме исследования; разработка методических материалов.

Структура работы: титульный лист; введение; два раздела («Элективный курс «Геометрия в олимпиадном программировании»; «Разработка методического обеспечения элективного курса «Геометрия в олимпиадном программировании»»); заключение; список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Элективный курс «Геометрия в олимпиадном программировании»» посвящен решению первой и второй задач бакалаврской работы. Проанализировав имеющуюся в нашем распоряжении литературу, мы рассмотрели определение понятия «Элективный курс» в профильном обучении. Под элективным курсом в профильном обучении будем понимать элемент учебного плана, который дополняет содержание при реализации профильного обучения, что позволяет удовлетворить разнообразные познавательные интересы учеников, целью которой является ориентация на индивидуализацию обучения и социализацию учащихся, на подготовку к осознанному и ответственному выбору сферы будущей профессиональной деятельности.

Выделены и охарактеризованы следующие типы элективных курсов: предметные, межпредметные, направленные на интеграцию знаний учащихся и такие элективные курсы по предметам, которые не входят в базисный учебный план, в свою очередь они должны выполнять следующие функции: изучение основных профильных предметов на более углубленном уровне, выстраивание индивидуальной образовательной траектории, способствовать удовлетворению познавательного интереса учащихся (в том числе выходящие за рамки профильного обучения).

Условия эффективной реализации элективных курсов заключается в актуальности, вариативном характере, оригинальном материале, междисциплинарной интеграции и педагогической эффективности.

В рамках бакалаврской работы выявлена роль математики в школьном олимпиадном программировании. Роль математики является одной из ведущих, так как классификация задач олимпиады включает в себя разные области математики, без которой невозможно выполнить большинство поставленных задач, что значит математика является неотъемлемой частью.

Во втором разделе «Разработка методического обеспечения элективного курса «Геометрия в олимпиадном программировании»» представлено описание концептуальных основ создания элективного курса «Геометрия в олимпиадном программировании»: определена актуальность, тематическое планирование, предлагаемые результаты, межпредметная связь между информатикой и математикой; выделены цели и задачи элективного курса; представлены методы контроля успеваемости учащихся.

Дальнейшие наши действия заключались в практической разработке методического обеспечения элективного курса «Геометрия в олимпиадном программировании» для учащихся 9-го класса. В качестве примера приведем фрагмент лекции, исследовательской работы учащихся и темы исследовательских проектов.

Теоретический материал для занятия 2.

Тема: «Векторы и координаты. Угол между векторами».

Угол между векторами.

Учитель: Пусть α и b – два ненулевых вектора, отложенные от одной точки. На уроках геометрии под углом между векторами понимается меньший из двух углов между лучами, на которых лежат векторы α и b. Значение такого угла всегда находится в промежутке $[0;\pi]$.

Учитель: Для вычислений более удобным оказывается понятие ориентированного угла, т.е. угла, учитывающего взаимное расположение векторов. Значение ориентированного угла по абсолютной величине равно обычному углу между векторами. Ориентированный угол между векторами α и b положительный, если поворот от вектора α к вектору b совершается в положительном направлении (в нашей системе координат против часовой стрелки), и отрицательный – в другом случае. Говорят, что пара векторов α и b положительно (отрицательно) ориентирована. Следовательно, величина ориентированного угла зависит от чего и какие принимает значения? // От порядка перечисления векторов и может принимать значения в интервале $(-\pi;\pi]$. В соответствие с рисунком 2 ориентированные углы между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ равны по модулю, но первый из них отрицательный, а второй – положительный.

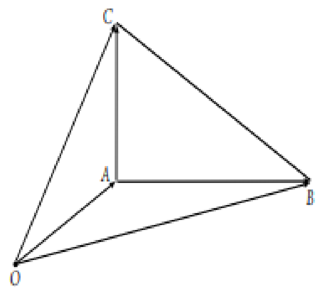

Рисунок 2 – Иллюстрация ориентированных углов

Учитель: Для любых векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ легко вычислить величину ориентированного угла AOB, зная величины углов AOC и COB: она равна их сумме с учетом знаков. Например, при таком расположении векторов, в соответствие с рисунком 2, угол AOC войдет в сумму со знаком плюс, а угол COB – с минусом. Может быть такое, что при суммировании двух положительных (двух отрицательных) углов результат превзойдет π по модулю. Тогда, для того чтобы получить правильное значение угла, нужно отнять (добавить) 2π.

Замечательно, что при этом нам не придется рассматривать различные случаи взаимного расположения векторов. В этом и состоит преимущество использования ориентированных углов.

Учитель: Мы знаем координаты векторов, как найти угол между ними? // Очевидный способ следует из формулы для скалярного произведения: $\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}$. Однако при этом получится значение неориентированного угла и часть информации (возможно, полезная) будет нами потеряна. Кроме того, использование этой формулы для программирования не всегда удобно. Например, в языке Python, как и в ряде других языков программирования, из обратных тригонометрических функций реализована только функция $arctg\ \varphi$. Я покажу вам, как найти угол иначе, после того, как познакомимся с ориентированной площадью.

Примеры исследовательской работы.

Учащиеся самостоятельно проводят исследования заданий, ищут различные методы и подходы к решению геометрических задач. При необходимости учитель помогает с помощью наводящих вопросов.

Задание 3 (тема: «Особые точки многоугольников и множеств N точек плоскости»). Кратчайшая сеть дорог.

Заданы N населенных городов (т.е. точек на плоскости). Нам необходимо так проложить между ними дороги, чтобы по этим дорогам возможно было проехать из любого пункта в любой другой, а суммарная длина дорог должны быть минимальной. В этой задаче мы не ограничены отрезками прямых, соединяющих заданные точки. При необходимости мы можем построить в произвольных местах плоскости новые точки пересечения участков дорог (так, для

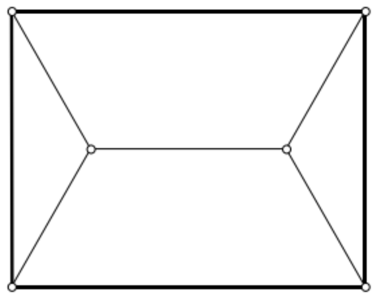

Рисунок 4 – Иллюстрация к заданию 3

четырех точек, расположенных в вершинах квадрата, система дорог, составленная из двух диагоналей этого квадрата, предпочтительнее любого основного дерева, но и она не является оптимальной, в соответствие с рисунком 4 – решения для прямоугольника).

Рассмотрим решение задачи для $N = 3$ (населенные города лежат в вершинах треугольника ABC).

Заметим, что в этом случае задача сводиться к поиску точки, а сумма расстояний от которой до всех вершин треугольника минимально, и что такая точка должна лежать внутри или на стороне треугольника ABC. Будем считать, что каждый из углов треугольника ABC не превосходит $120°$. Пусть D – это произвольная точка. Тогда рассмотрим треугольник $BC'D'$, полученный поворотом треугольника BCD вокруг точки B на $60°$ в соответствие с рисунком 5. В силу построения $DC = D'C'$ и $DD' = BD$ (треугольник BDD' – является равносторонним). Поэтому искомая сумма расстояний для точки D равна $AD + BD + CD = AD + DD' + D'C'$ и, значит, нам нужно найти такую точку D, для которой длина ломаной $ADD'C'$ минимальна. Если в качестве точки D мы выберем точку S, показанную на рисунке 5 ($\angle AC'B = \angle SCB$), то после поворота вокруг B на $60°$ она попадет на отрезок $C'S$. Следовательно, длина $ASS'C'$ окажется равной AC', что, естественно, не больше длины любой другой ломаной $ADD'C'$. Значит, S и есть искомая точка. Она называется «точкой Штейнера». Заметим, что угол CSA равен $120°$, так как луч CS переходит в луч $C'A$ при повороте на $60°$. Ясно, что и две другие стороны треугольника должны быть видны из точки S под углом $120°$.

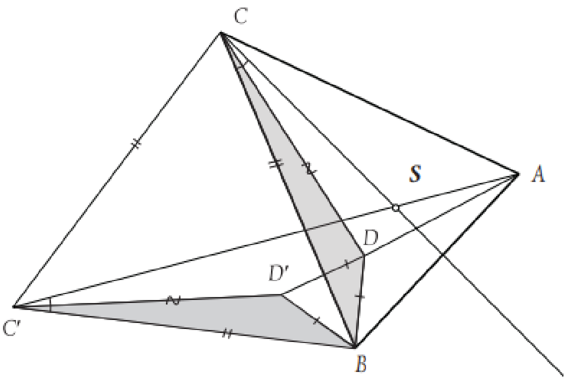

Рисунок 5 – Иллюстрация к заданию 3

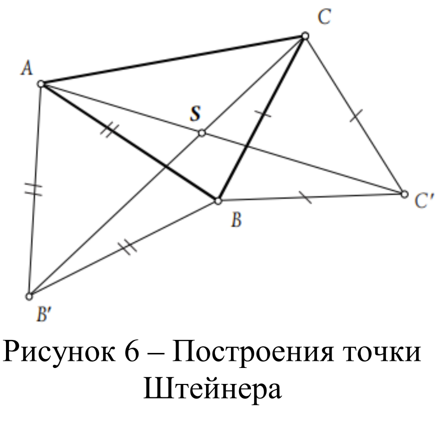

Рисунок 6 – Построения точки Штейнера

Из нашего проведенного анализа следует и способ построения точки Штейнера в соответствие с рисунком 6. Сначала ищем точки B и C' как вершины равносторонних треугольников ABB' и BCC', построенные вне треугольника ABC. Поиск их координат производится с помощью вектора нормали, приложенного к середине соответствующей стороны треугольника (искомая точка находится на расстоянии $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ от середины стороны исходного треугольника, где a – длина соответствующей стороны). Нам остается определить точку S пересечения отрезков CB' и AC'.

Для треугольников, у которых один из углов больше $120°$ (в том числе выродившихся в отрезок), предложенное нами построение не подходит. Действительно, в таком треугольнике нет точки, из которой бы все три стороны были видны под углом $120°$. В данном случае решение задачи будет представлять собой систему из двух наименьших сторон треугольника. В соответствие с рисунком 4 показано решение этой задачи для четырех точек, расположенных в вершинах прямоугольника. Для произвольных N точек задача о кратчайшей сети дорог будет не решена. Поэтому поиск минимальной транспортной сети осуществляется с использованием компьютера. Однако все известные на сегодня алгоритмы позволяют построить решение лишь при не значительно больших значениях N.

Задание 4 (тема: «Особые точки многоугольников и множеств N точек плоскости»). Центр масс.

Порой очень полезным оказывается применение центра масс в некоторых геометрических задачах. Пусть на плоскости есть система материальных точек $A_1, A_2, \dots, A_N$, имеющих массы $m_1, m_2, \dots, m_N$ соответственно. Будем считать, что массы – это неотрицательные числа (но иногда допускают отрицательные или даже комплексные массы). Центром масс такой системы материальных точек называется точка M, для которой справедливо равенство $m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + m_N\overrightarrow{MA_N} = \vec{0}$.

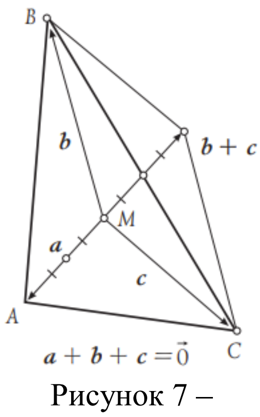

Рисунок 7 – Иллюстрация теоремы о медианах

Элементарный пример: точка пересечения медиан в треугольнике является центром трех равных масс, помещенных в вершинах этого треугольника. Это следует из теоремы о медианах в соответствие с рисунком 7. Вернемся к N точкам. Пусть O – это произвольная точка плоскости. Используя определение точки M, получим:

$$m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_N\overrightarrow{OA_N} = m_1\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_1}\right) + m_2\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_2}\right) + \ldots +$$
$$+ m_N\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_N}\right) = (m_1 + m_2 + \ldots + m_N)\overrightarrow{OM} + m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots +$$
$$+ m_N\overrightarrow{MA_N} = (m_1 + m_2 + \ldots + m_N)\overrightarrow{OM}.$$

В качестве точки O можно взять начало координат. Тогда найдем координаты точки M:

$$x_M = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N},$$
$$y_M = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_Ny_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N},$$

где (x_i, y_i) – координаты A_i.

Применение центра масс основывается на его определении.

Задание 5 (тема: «Многоугольники»). Построение выпуклой оболочки для множества из N точек плоскости.

Данная задача состоит в том, чтобы для заданного конечного множества точек найти вершины выпуклой оболочки этого множества. Для этого будем перечислять вершины в порядке обхода против часовой стрелки. Для реализации эффективного решения данной задачи существуют несколько различных алгоритмов. Приведем наиболее распространенную реализацию одного из них – это алгоритм Джарвиса (называют «заворачиванием подарка», в соответствие с рисунком 8).

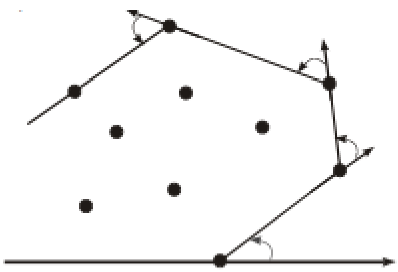

Рисунок 8 – Иллюстрация алгоритма Джарвиса

Перечисление точек искомой границы выпуклого многоугольник начнем с правой нижней точки P_1, которая заведомо принадлежит границе выпуклой оболочки. Обозначим ее координаты (x_1, y_1). Следующей при указанном порядке обхода будет точка $P_2(x_2, y_2)$. Она очевидно обладает тем же свойством, что все остальные точки лежит «слева» от вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$, т.е. ориентированный угол между векторами $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1M}$ неотрицателен для любой другой точки M данного множества. Для кандидата на роль точки P_2 проверяем выполнение условия $\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1M}\right] = 0$ со всеми точками M. Если точек, удовлетворяющих этому условию, несколько, то вершиной искомого многоугольника станет та из них, для которой длина вектора $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ максимальна.

Аналогично продолжаем. Допустим, уже найдена i-я вершина $P_i(x_i, y_i)$ выпуклой оболочки. Для следующей точки $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ косые произведения $\left[\overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_iM}\right]$ неотрицательны для всех точек M. В случае того, когда таких точек несколько, то выбираем ту, для которой вектор $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ имеет наибольшую длину. Таким образом, поиск такой точки можно осуществить так. Сначала мы можем считать следующей, $(i+1)$-й, любую точку. Затем вычисляем значение $\left[\overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_iM}\right]$, рассматривая в качестве M все остальные точки. Если для одной из них указанное выражение меньше нуля, считаем следующей ее и продолжаем проверку остальных точек. Если же значение выражения равно нулю, то сравниваем квадраты длин векторов. В результате за $O(N)$ операций очередная вершина выпуклой оболочки будет найдена. Продолжая эту процедуру, мы рано или поздно вернемся к точке P_1. Это будет означать, что выпуклая оболочка построена.

При решении данной задачи в случае изначально целочисленных координат мы полностью можем избежать применения вещественной арифметики, а значит избавиться от потери точности вычислений. В противном случае в решении могут быть включены «лишние» точки, близкие к границе выпуклой оболочки, или не учтены некоторые из «нужных» точек. Сложность данного алгоритма составит $O(kN)$, где k – количество точек в выпуклой оболочке, в худшем случае равное N.

Темы исследовательских проектов.

Представим примеры некоторых тем проектов для 9-го класса. Они являются расширенными и дают возможность учащимся в процессе своей исследовательской работы более глубоко изучить геометрию.

1) Нестандартные задачи по геометрии; 2) Нестандартные способы нахождения площадей некоторых многоугольников; 3) Применение векторов к доказательству свойств и признаков параллелограмма; 4) Применение векторов к доказательству теорем о треугольниках; 5) Применение подобия к доказательству и решению задач; 6) Равносоставленные многоугольники; 7) Треугольник Эйлера-Бернулли.

Заключение.

1. Рассмотрено понятие «Элективный курс» в профильном обучении. Под элективным курсом в профильном обучении будем понимать элемент учебного плана, который дополняет содержание при реализации профильного обучения, что позволяет удовлетворить разнообразные познавательные интересы учеников, целью которой является ориентация на индивидуализацию обучения и социализацию учащихся, на подготовку к осознанному и ответственному выбору сферы будущей профессиональной деятельности.

Выделены и охарактеризованы следующие типы элективных курсов: предметные, межпредметные, направленные на интеграцию знаний учащихся и такие элективные курсы по предметам, которые не входят в базисный учебный план, в свою очередь они должны выполнять следующие функции: изучение основных профильных предметов на более углубленном уровне, выстраивание индивидуальной образовательной траектории, способствовать удовлетворению познавательного интереса учащихся (в том числе выходящие за рамки профильного обучения).

Условия эффективной реализации элективных курсов заключается в актуальности, вариативном характере, оригинальном материале, междисциплинарной интеграции, педагогической эффективности.

2. Выявлена роль математики в школьном олимпиадном программировании. Роль математики является одной из ведущих, так как классификация задач олимпиады включает в себя разные области математики, что значит математика является неотъемлемой частью. Для большинства предлагаемых математических задач на олимпиадном программировании

основную сложность, несет не само решение на электронно-вычислительной машине, а его предварительная разработка «на бумаге» − создание и поиск решения. Отсюда и следует зависимость успехов учеников от их знаний в области математики. Ведь ученики, которые принимают участие в олимпиадах по программированию, обладают знаниями, умениями и навыками математики намного выше, чем их ровесники.

3. Были описаны концептуальные основы создания элективного курса «Геометрия в олимпиадном программировании»: выделены цели и задачи, определено тематическое планирование, а также предполагаемые результаты.

4. Разработано методическое обеспечение элективного курса «Геометрия в олимпиадном программировании».

Основная литература.

1 Федорова, Н. Б. Профильное обучение: элективные курсы для предпрофильной и профильной подготовки учеников общеобразовательной школы : учебно-методическое пособие / авт.-сост. Н.Б. Федорова, О.В. Кузнецова. – Ряз. гос. ун-т. им. С.А. Есенина. – Рязань, 2011. – 88 с.

2 Алижанова, Х. А. Методологические основы, стратегия, цели и основные задачи профильного обучения / Х. А. Алижанова, Р. Т. Гаджимурадова // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 14-16.

3 Сысоева, И. П. Элективные курсы и их значение в профильном обучении / И. П. Сысоева // Проблемы и перспективы развития образования в России. – 2013. – № 20. С. 36-40.

4 Лааксонен А. Олимпиадное программирование / пер. с англ. А. А. Слинкин – М. : ДМК Пресс, – 2020. – 328 с.

5 Школа программиста [Электронный ресурс] : [сайт]. – URL: https://acmp.ru/article.asp?id_text=118 (дата обращения 17.03.2022). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

6 Андреева, Е. В. Вычислительная геометрия на плоскости / Е. В. Андреева, Ю. Е. Егоров. – 2002. – № 39. – С. 26-38.