

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Методические особенности обучения учащихся решению квадратных
уравнений**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование
механико-математического факультета

Стольной Олеси Сергеевны

Научный руководитель

доцент, к.п.н.

О. М. Кулибаба

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент

И. К. Кондаурова

Саратов 2022

Введение. Учебный материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики, а его изучение в современной методике обучения математике организовано в отдельную содержательно-методическую линию.

Квадратные уравнения присутствуют во многих типах задач школьного курса алгебры. В настоящее время основным направлением модернизации математического школьного образования является отработка механизмов итоговой аттестации через введение единого государственного экзамена. Анализ контрольно-измерительных материалов показывает, что для получения высоких результатов учащиеся должны уметь решать задачи высокого уровня трудности, среди которых особенно выделяются задачи, для решения которых необходимо усвоение способов решения квадратных уравнений. Все вышеперечисленное определило актуальность исследования.

Методическими разработками по исследуемой теме занимались такие ученые-методисты как И. Ф. Шарыгин, А. Р. Гасанов, А. А. Курамшин, А. А. Ельков, Л. В. Виноградов, А. Б. Бекаревич, Ю. М. Колягин, Л. А. Маркушевич, В. И. Мишин, В. А. Оганесян, С. Шаталов.

Цель работы: выявить методические особенности обучения учащихся решению квадратных уравнений в школьном курсе математики.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие задачи:

- 1) систематизировать теоретический материал по теме «Решение квадратных уравнений»;
- 2) провести сравнительный логико-дидактический анализ изложения темы «Квадратные уравнения» в учебниках по алгебре различных авторов;
- 3) проанализировать задания, требующие умения решать квадратные уравнения, в материалах ОГЭ и ЕГЭ;
- 4) выявить трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при решении квадратных уравнений, и предложить пути их преодоления;

5) продемонстрировать использование методических особенностей обучения учащихся решению квадратных уравнений на примере разработки плана-конспекта урока.

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих методов исследования: анализ математической и методической литературы, школьных программ, учебников и учебных пособий по алгебре, теоретический анализ и обобщение передового педагогического опыта.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух разделов, заключения и списка использованных источников.

Во введении обоснована актуальность темы, кратко охарактеризована степень её разработанности, сформулированы цель, задачи и методы исследования, описана структура работы по разделам.

В первом разделе «Теоретические аспекты обучения учащихся решению квадратных уравнений» систематизирован материал о различных способах решения квадратных уравнений.

Во втором разделе «Методические аспекты обучения учащихся решению квадратных уравнений» рассмотрены цели изучения темы «Квадратные уравнения» в школьном курсе математики; проведен сравнительный логико-дидактический анализ изложения темы «Квадратные уравнения» в учебниках по алгебре различных авторов; проанализированы задания, требующие умения решать квадратные уравнения, в материалах ОГЭ и ЕГЭ; рассмотрены трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при решении квадратных уравнений, и предложены пути их преодоления; разработан план-конспект урока обобщения и систематизации знаний по теме «Решение квадратных уравнений».

В заключении сформулированы основные выводы по работе.

Список использованных источников содержит 31 наименование.

Основное содержание работы. Первый раздел «Теоретические аспекты обучения учащихся решению квадратных уравнений» посвящен решению первой задачи бакалаврской работы. Проанализировав имеющуюся в нашем

распоряжении литературу, был систематизирован теоретический материал по теме «Решение квадратных уравнений», рассмотрены различные способы решения квадратных уравнений.

Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b, c – некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Числа a, b , и c называют *коэффициентами квадратного уравнения*, число a называют первым или старшим коэффициентом, число b – вторым коэффициентом, число c – свободным членом.

Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют *приведенным*; если $a \neq 1$, то неприведенным.

Существуют различные способы решения квадратных уравнений. Нужно отметить, что не все они одинаково удобны для решения конкретного уравнения, но каждый из них по-своему уникален. Использование некоторых способов решения квадратных уравнений помогают сэкономить время, что немаловажно при решении заданий на контрольных работах и экзаменах.

В первой части бакалаврской работы рассмотрены следующие способы решения квадратных уравнений:

- 1) решение квадратных уравнений по формулам его корней;
- 2) с помощью теоремы, обратной теореме Виета;
- 3) используя разложение левой части уравнения на множители;
- 4) используя выделение полного квадрата;
- 5) способом переброски коэффициентов;
- 6) используя свойства коэффициентов квадратного уравнения;
- 7) графический способ;
- 8) с помощью циркуля и линейки;
- 9) геометрический способ.

Таким образом, нужно отметить, что не все способы решения квадратных уравнений удобны, но каждый из них может быть эффективен для применения в отдельных ситуациях решения квадратных уравнений, имеет свои «плюсы» и «минусы».

Во втором разделе «Методические аспекты обучения учащихся решению квадратных уравнений» представлено методическое обеспечение организации деятельности учащихся при обучении математике по теме исследования.

Представлена общая таблица целей обучения из Федерального базисного учебного плана для образовательного изучения темы «Квадратные уравнения».

При рассмотрении целей изучения темы, следует отметить, что основным и значимым материалом этой темы являются такие понятия, как полные квадратные уравнения, неполные квадратные уравнения, приведенные квадратные уравнения, формулы корней квадратных уравнений, теорема Виета, алгоритмы решения уравнений.

Построение темы «Квадратные уравнения» основано на дедуктивном подходе, т. е. на определенной аксиоматике, которая вводится постепенно.

На 1-ых уроках следует познакомить учащихся с видами уравнений, с решением неполных уравнений вида: $ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$. Далее познакомить с графическим решением уравнений, с решением уравнений с помощью разложения левой части на множители путем выделения полного квадрата.

Далее выводятся формулы корней квадратного уравнения, и отрабатывается алгоритм решения квадратных уравнений.

Учащихся необходимо познакомить еще с одной формулой нахождения корней, когда 2-ой коэффициент четный, с теоремой, обратной теореме Виета и разложением квадратного трехчлена на множители по формуле

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Выделены следующие этапы при изучении темы «Квадратные уравнения»: на первом этапе рассматриваются неполные квадратные уравнения, на втором этапе осуществляется переход к решению полного квадратного уравнения, на третьем этапе рассматриваются приведенные квадратные уравнения, которые имеют вид $x^2 + bx + c = 0$, где b и c – данные числа. Число b – коэффициент при x , а c – свободный член.

С началом изучения систематического курса алгебры основное внимание уделяется способам решения квадратных уравнений, которые становятся специальным объектом изучения. Для этой темы характерна большая глубина изложения и богатство устанавливаемых с ее помощью связей в обучении, логическая обоснованность изложения. Поэтому она занимает исключительное положение в линии уравнений и неравенств. В работе рассмотрена логика изложения исследуемой темы в учебниках различных авторов. Проанализировано три учебника из федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию в современных школах для начального, основного и среднего общего образования.

Рассмотрены учебники авторских коллективов 1) Мордкович А. Г., Семенов П. В., Александрова Л. А., Мардахаева Е. Л. «Алгебра. 8 класс», 2) Алимов Ш. А., Колягин Ю. М. «Алгебра. 8 класс», 3) С. М. Никольский «Алгебра. 8 класс» и проанализированы по нескольким аспектам.

При проведении логико-дидактического анализа выделены особенности структурного построения и методического изложения материала учебника, определено представление задачного материала. На основании данного анализа сделаны выводы.

Учебник Алимова Ш. А., Колягина Ю. М. наиболее нагляден для учащихся. Весь теоретический материал подкреплён конкретными примерами. Задачный материал рассчитан на каждого ученика: есть задачи легкого уровня, а также среднего и повышенного уровня сложности.

В учебнике авторского коллектива Мордковича А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л. «Алгебра. 8 класс» иллюстрируется графический метод, применяется метод разложения на множители, с использованием формул дискриминанта и его корней для решения квадратных уравнений.

В учебнике Алимова Ш. А., Колягина Ю. М. «Алгебра. 8 класс» рассматривается метод использования формул дискриминанта и его корней,

теорема Виета, разложение на множители, метод замены переменной для решения квадратных уравнений.

В учебнике С. М. Никольского «Алгебра. 8 класс» для решения квадратных уравнений используется метод разложения на множители, метод использования формул дискриминанта и его корней, метод выделения полного квадрата, теорема Виета, метод замены переменной.

Также в работе были проанализированы задачи из материалов ОГЭ и ЕГЭ, которые сводятся к составлению квадратных уравнений и их решению.

Задания по теме «Квадратные уравнения» регулярно включаются в материалы основного государственного экзамена (ОГЭ) и единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Анализ методических пособий для подготовки к ОГЭ показал, что задание 9 требуют базовых знаний решения неполных и полных квадратных уравнений.

Учащимся необходимо уметь проводить классификацию уравнений по общему виду; уметь определять числовые коэффициенты, применять формулы при решении квадратных уравнений; уметь выделять общее и находить различия.

Например, в демонстрационном варианте предложено следующее задание:

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - x - 6 = 0$.

Часть 2 содержит задания № 21; № 22 повышенного уровня сложности.

Пример 2. Решите уравнение $(x - 1)(x^2 + 6x + 9) = 5(x + 3)$.

При решении уравнений данного вида, учащиеся должны знать:

- 1) формулы сокращенного умножения;
- 2) алгоритм решения квадратных уравнений.

Пример 11. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми 209 км. Отдохнув, он отправился обратно в А, увеличив скорость на 8 км/ч. По пути он сделал остановку на 8 часов, в

результате чего затратил на обратный путь столько же времени. Найдите скорость велосипедиста из А в В.

При решении данных заданий, учащиеся должны уметь составлять дробно-рациональные уравнения, приводить их к квадратным, решать квадратное уравнение и отбирать нужные корни.

При анализе демонстрационного варианта ЕГЭ по математике профильного уровня, было выявлено, что задания 1 и 7 требуют при решении умения решать квадратные уравнения.

Пример 3. Решить уравнение: $(x - 6)^2 = -24x$.

В седьмом задании, может встретиться такая задача.

Пример 4. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,8 + 10t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска.

Во втором разделе бакалаврской работы также были выявлены основные трудности при обучении темы «Квадратные уравнения» и предложены пути их преодоления.

Выучив формулу корней квадратного уравнения, учащиеся, нередко, применяют ее и в случае решения квадратных уравнений с четным коэффициентом при неизвестном в первой степени. Таким образом, большее внимание в процессе обучения следует уделять рациональным способам вычисления корней.

Наиболее часто встречающиеся ошибки в работах учеников 8-го класса при решении квадратных уравнений, относятся к операциям с буквенными коэффициентами.

Следовательно, при обучении большее внимание следует обращать на нахождение числовых значений алгебраических выражений и на аналогию в выполнении алгебраических и арифметических действий; тем самым, учащиеся будут привыкать смотреть на буквенное выражение не только как на объект для тождественных преобразований, но и как на функцию входящих в него букв.

Теорема Виета при изучении квадратных уравнений является наиболее сложной темой. Нередко ее смысл учащиеся усваивают формально и не могут применить теорему на практике.

Изучая ошибки по рассматриваемой теме, можно прийти к выводу, что *теорему Виета целесообразно изучать индуктивным путем*, исходя из рассмотрения приведенного квадратного уравнения вида $x^2 + px + q = 0$. Затем перейти к рассмотрению этого вопроса для неприведенного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ и установить соотношение $\left(-\frac{b}{a}\right) = p$ и $\left(\frac{c}{a}\right) = q$.

Исследование корней квадратного уравнения по его дискриминанту и коэффициентам, исследование вопроса, будут ли корни данного квадратного уравнения различными или равными или среди действительных чисел нет корня данного уравнения, не затрудняет учащихся.

Обычно, допускаемая ошибка состоит в том, что за дискриминант принимают не подкоренное выражение, а квадратный корень из дискриминанта, то есть считают, что $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ или $D_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - q}$.

При исследовании корней уравнения школьники часто применяют нерациональный прием, который состоит в том, что для ответа на вопросы: будут ли корни данного квадратного уравнения действительными числами, будут ли они различны или равны, учащиеся вычисляют дискриминант, хотя достаточно только установить его знак.

Заметим еще, что не всегда учащиеся умеют самостоятельно указать квадратное уравнение, заведомо имеющее действительные корни без нахождения числовой величины его дискриминанта. Только после приведения нескольких аналогичных примеров квадратных уравнений с отрицательным свободным членом и наводящего вопроса, учащиеся могут сделать вывод, что в этих случаях всегда $D > 0$ (сказывается недостаточно сформированный навык вычитания отрицательных чисел). При определении знаков корней квадратного уравнения не всегда можно получить полное, последовательное, доведенное до

логического конца объяснение процесса исследования без наводящих (и даже подсказывающих) вопросов учителя.

Четкость речи, как известно, связана с осознанностью соответствующей мысли. Поэтому при объяснении данного вопроса учитель должен дать четкий образец рассуждений. Прежде всего, надо указать, что о знаках корней можно говорить лишь тогда, когда они существуют (на множестве действительных чисел).

Надо убедиться в неотрицательности дискриминанта, причем для этого не следует доводить до конца вычисления, достаточно убедиться, что он не отрицателен (в случае, когда свободный член квадратного уравнения отрицателен, а коэффициент при x^2 положителен, не надо вычислять дискриминант – он положителен). Затем следует рассмотреть на примерах все четыре возможных случая: оба корня уравнения отрицательные, положительные, один из корней отрицательный, положительный. Выводы следует оформить таблицей.

К изучению данного учебного материала учащихся следует готовить, начиная с 5-го класса.

При изучении квадрата числа, натуральной степени учащимся следует предлагать следующие задания: найти значение выражения $D = b^2 - 4ac$, если $a = 2$, $b = 5$, $c = 4$. При изучении десятичных дробей, обыкновенных дробей, отрицательных чисел – a , b , c меняются.

Знание квадратов натуральных чисел от 1 до 20 нужно проверять на протяжении всех лет обучения математике.

К работе по схеме учащиеся готовятся, начиная с устного счета, по цепочке, с указанием порядка действий, с помощью стрелок, по элементарным программам при работе с микрокалькулятором, при прохождении многих тем учащиеся учатся выполнять те, или другие преобразования по алгоритму. У учащихся должны быть отработаны навыки решения линейных уравнений

В работе представлен план-конспект урока обобщения и систематизации материала по теме «Квадратные уравнения».

Цель урока: обобщение темы «Квадратные уравнения», создание условий для осознанного и уверенного владения навыком решения квадратных уравнений, выбора рационального способа решения квадратного уравнения.

Задачи урока:

Образовательная: углубить полученные теоретические знания при решении квадратных уравнений, систематизировать и обобщить знания, умения и навыки учащихся, связанные с применением квадратных уравнений.

Развивающая: развивать умение применять знания на практике, формировать умения выделять существенное, главное, развивать творческие способности учащихся, стремление к расширению углублению знаний по данной теме, умения анализировать.

Воспитательная: воспитывать интерес к предмету, коллективизм, логическое мышление учащихся, аккуратность, дисциплинированность, ответственность, внимание, упорство в достижении целей.

Заключение.

Основные результаты, полученные при написании бакалаврской работы.

1. Систематизирован теоретический материал по теме «Решение квадратных уравнений», обосновано использование 9 различных методов решения квадратных уравнений, приведены примеры.

2. Проведен сравнительный логико-дидактический анализ изложения темы «Квадратные уравнения» в учебниках по алгебре различных авторов (Мордкович А. Г., Семенов П. В., Александрова Л. А., Мардахаева Е. Л. «Алгебра. 8 класс»; Алимов Ш. А., Колягин Ю. М. «Алгебра. 8 класс»; С. М. Никольский «Алгебра. 8 класс»). При проведении логико-дидактического анализа выделены особенности структурного построения и методического изложения материала учебника, определено представление задачного материала. В ходе анализа выявлено, что в учебниках рассматриваются квадратные уравнения, которые, как правило, решаются с помощью двух способов: по формулам корней квадратного уравнения и по теореме, обратной теореме Виета.

3. Проанализированы задания, требующие умения решать квадратные уравнения, в материалах ОГЭ и ЕГЭ.

4. Выявлены трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при решении квадратных уравнений, и предложены пути их преодоления.

5. Продемонстрировано использование методических особенностей обучения учащихся решению квадратных уравнений на примере разработки плана-конспекта урока обобщения и систематизации знаний по теме «Решение квадратных уравнений». Данный урок позволяет обобщить и применить различные способы решения квадратных уравнений в разнообразных заданиях. Конечным результатом является сознательное овладение основными способами решения квадратных уравнений.