

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Рациональные функции и их графики в курсе алгебры основной школы**  
**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 5 курса 521 группы  
направления 44.03.01 Педагогическое образование  
механико-математического факультета

Кисловой Анастасии Владимировны

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент

\_\_\_\_\_

Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент

\_\_\_\_\_

И. К. Кондаурова

Саратов 2022

**Введение.** Изучение поведения функций и построение их графиков является важным разделом математики. Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решать многие задачи и порой является единственным средством их решения. Кроме того, умение строить графики функций представляет большой самостоятельный интерес. Всегда, когда нужно выяснить общий характер поведения функции, обнаружить ее особенности, график в силу своей наглядности является незаменимым. При изучении функций у учащихся формируется представление о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления, а также реализуется развитие умений использовать функционально-графические представления для решения математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей. Класс рациональных функций является одним из основных в курсе алгебры основной школы.

Задачи по теме «Построение графиков рациональных функций» включены в основной государственной экзамен: часть 1 включает в себя задание №10, часть 2 – задание №23.

Анализ диссертационных работ, посвященных методике изучения темы «Рациональные функции» в школьном курсе математики, показал, что работы В. В. Крючковой, Л. Г. Петерсон, А. А. Михеева, посвящены функциональной пропедевтике и трактовке понятия рациональной функции; в работах А. И. Жаворонкова, В. Г. Ашкинуде, Ю. Н. Макарычева освещены аспекты изучения рациональных функций и их свойств; в исследованиях Е. И. Лященко, Р. А. Майер, О. А. Креславской уделено внимание системе задач для усвоения понятия рациональные функции, а вот Е. К. Попова в своем исследовании рассматривает взаимосвязь функциональной и алгоритмической линий.

Рассмотрением рациональных функций занимаются все авторы современных учебников (Г. В. Дорофеев, Н. Я. Виленкин, А. Г. Мерзляк, А. Г. Мордкович и другие).

Таким образом, можно констатировать, что многие вопросы методики формирования понятия рациональной функции в курсе алгебры средней школы

освещены достаточно полно. Но в связи с принятием нового ФГОС ООО возникает необходимость разработки соответствующих новым требованиям учебно-методических материалов.

*Цель бакалаврской работы* – теоретически обосновать и практически разработать методические материалы по теме «Рациональные функции и их графики» в курсе алгебры основной школы.

Реализация поставленной цели потребовала решения ряда *задач*, а именно:

1. Выявить особенности изучения функциональной линии в целом, и рациональной функции, в частности, в условиях реализации ФГОС ООО 2021.
2. Описать основное содержание темы «Рациональные функции и их графики».
3. Рассмотреть роль пропедевтического этапа в изучении темы «Рациональные функции и их графики».
4. Разработать и апробировать серию задач для 6 класса (пропедевтический этап).
5. Составить серии задач по теме «Рациональные функции и их графики» в курсе алгебры 7–9 классов основной школы.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования: изучение нормативных документов; анализ учебной, методико-математической и научной литературы по теме исследования; разработка методических материалов.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух разделов («Рациональная функция и их графики: теоретические аспекты» и «Рациональные функции и их графики в курсе алгебры основной школы: практические аспекты»), заключения и списка использованных источников.

**Основное содержание работы.** Первый раздел «Рациональная функция и их графики: теоретические аспекты» посвящен решению первой, второй и третьей задач бакалаврской работы. В ФГОС ООО установлены лишь самые общие требования к результатам (личностным, метапредметным, предметным)

изучения функциональной линии в целом и, рациональной функции, в частности, в курсе математики.

Исходя из планируемых результатов изучения функциональной линии, можно сформулировать ряд целей изучения функциональной линии в целом, и рациональной функции, в частности в контексте ФГОС:

1. Формирование у обучающихся целостного представления об окружающем мире и взаимосвязи его компонентов на основании исследования реальных зависимостей при помощи функций.

2. Формирование навыков использования функций в повседневной жизни, как в бытовых аспектах, так и в специальных областях, например, научных исследованиях.

3. Формирование у обучающихся знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с функциональной линией, в математике и других областях научных знаний.

4. Формирование у обучающихся навыков перевода информации из одного вида в другой: из графической в текстовую, табличную, на язык формул.

Изучение рациональных функций начинается в школьном курсе алгебры, начиная с 7-го класса. Причем сначала изучаются целые рациональные функции (линейная функция (7 класс), квадратичная функция (8 класс)), а затем – дробно–рациональные функции. Стоит отметить, что теме «Дробно–рациональные функции» стоит уделить больше внимания в 9 классе, поскольку материалы по данной теме встречаются в ОГЭ.

Изучение функциональной линии будет более эффективным, в том случае когда:

- 1) в 5-6 классах проводится функциональная пропедевтика;
- 2) понятие «функция» вводится конкретно-индуктивным путём, при использовании генетического подхода;
- 3) исследование конкретных функций, то есть изучение её свойств, проводится комбинированным методом;

4) существенное внимание уделяется формулировке свойств на различных языках (словесном, графическом, аналитическом);

5) используется функциональная символика.

Автор А. В. Погодина предлагает следующую схему изучения рациональных функций:

1. Рассмотреть конкретные ситуации (или задачи), приводящие к данной функции.

2. Сформулировать определение данной функции, дать запись функции формулой, провести исследование входящих в эту формулу параметров.

3. Ознакомить учащихся с графиком данной функции.

4. Исследовать функцию на основные свойства: области определения и значений, возрастание и убывание, промежутки знакопостоянства, нули, экстремумы, чётность или нечётность (или отсутствие этих свойств), периодичность, ограниченность, непрерывность.

5. Использовать изученные свойства функций при решении различных задач, в частности уравнений и неравенств.

Эта методическая схема является своеобразным планом – программой для изучения функции в целом, и рациональной функции и ее графика, в частности.

По мнению В. Г. Дорофеева, основная цель в начале изучения функциональной линии в 7 классе: познакомить учащихся с понятием функции, расширить математический язык введением функциональной терминологии и символики; рассмотреть свойства и графики конкретных числовых функций: линейной функции и квадратичной функции; показать значимость функционального аппарата для моделирования реальных ситуаций, научить в несложных случаях применять полученные знания для решения прикладных и практических задач.

Изучение предыдущего материала курса подготовило учащихся к введению понятия функции – школьники изучали различные зависимости между величинами, в том числе прямую и обратную пропорциональности, они много работали с формулами, с графиками реальных зависимостей и с

графиками уравнений. Вся эта подготовка активно используется при изложении материала в начале изучения функциональной линии в 7 классе. Необходимо иметь в виду, что акцент при изучении функций делается не столько на определение понятия функции и связанных с ним понятий, сколько на введение нового языка, на овладение учащимися новой терминологией и символикой. При этом новый язык постоянно сопоставляется с уже освоенным – внимание обращается на умение переформулировать задачу или вопрос, перевести его с языка графиков на язык функций или уравнений.

Пропедевтический этап изучения рациональных функций позволяет учащимся более осознанно подойти к изучению функциональной линии, осознать значимость данной темы и овладеть базовым понятийным аппаратом для успешного дальнейшего обучения, сформировать понятия зависимости между величинами; развивать умение работать с формулами; способствовать развитию графических умений.

В работе рассмотрены основные понятия по теме «Рациональные функции и их графики». Приведем несколько определений.

Определение 1. Функция  $y = f(x)$  называется алгебраической, если она удовлетворяет алгебраическому уравнению  $F(x, y) = 0$ , где  $F(x, y)$  – полином от двух переменных.

Рациональная функция в школьном курсе алгебры, как было сказано выше, представляется целой рациональной функцией (многочленом), которая изучается в курсе алгебры 7 класса и дробно-рациональной функцией, которая изучается в курсе алгебры 8 класса.

Рациональная функция – функция вида:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m},$$

где  $a_i, b_i$  – постоянные числа ( $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ ), а  $n$  и  $m$  – целые неотрицательные числа.

При  $m = 0$  рациональная функция называется целой рациональной функцией или многочленом и задается формулой

$$f(x) = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Таким образом, рациональная функция (дробно–рациональная функция) представляет собой отношение двух целых рациональных функций.

Рациональная функция определена при всех значениях  $x$ , кроме тех, которые обращают в нуль знаменатель  $Q(x)$ .

При  $n = m = 1$  рациональная функция называется дробно-линейной рациональной функцией, имеющей вид:  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

Целая рациональная функция (многочлен) и дробно–рациональная функция образуют класс рациональных функции.

График простейшей дробно-рациональной функции  $y = \frac{k}{x}$  – гипербола.

Второй раздел «Рациональные функции и их графики в курсе алгебры основной школы: методические аспекты» посвящен решению двух последних задач бакалаврской работы. Представлены разработки серий задач для 6-9 классов.

В 6 классе актуальна организация пропедевтики функциональной линии в целом и рациональной функции, в частности. Изучаются новые формулы  $y = kx$  и  $y = \frac{k}{x}$ , широко начинают использоваться буквенные обозначения, где под буквой понимается какое-то допустимое значение – переменная величина, изучаются прямая и обратная пропорциональность, используются табличные записи функциональной зависимости. Целесообразно делать упор на упражнения, в которых нужно найти значение выражения не при одном только значении переменной, а использовать несколько таких значений. С помощью таких заданий можно сформировать у учеников понимание зависимости значения выражения от значений входящих в него переменных. Пропедевтическую работу по формированию функционального фундамента необходимо вести постоянно, через систему различных упражнений, содержащих идею функциональной зависимости, и шаг за шагом готовить учеников к введению одного из центральных понятий «функция».

Учащимся была предложена следующая серия задач:

Задание 1. Известно, что  $x$  и  $y$  – натуральные числа и  $6x + y = 53$ .

Выразите число  $x$  через  $y$ ?

Решение:  $x = \frac{53-y}{6}$ .

Задание 2. Выберите точки, которые можно отметить на координатном луче (в соответствии с рисунком 1): A (2,5); B (-1); C (0); D (-4) ; N (3); M(-0,4); K (6).



Рисунок 1 – Координатный луч

Задание 3. На координатной плоскости изображена кривая линия (в соответствии с рисунком 2):

а) Найдите координаты точек, отмеченных на этой кривой.

б) Какая из данных точек имеет: наименьшую абсциссу; наименьшую ординату; наибольшую абсциссу; наибольшую ординату?

в) Будут ли принадлежать данной кривой точки с координатами (-1; 2), (2; 3), (5; 3), (-2; -2)?

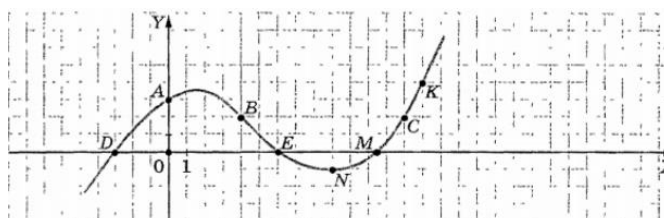


Рисунок 2 – График функции

Задание 4. Пешеход находится в пути 4 ч. Верно ли утверждение, что скорость и пройденное им расстояние – величины обратно пропорциональные? Заполните карточку (в соответствии с рисунком 3), она поможет правильно ответить на этот вопрос.

V (км/ч)	3	3,5	4	4,5	5	5,5
S (км)						

Рисунок 3 – Карточка к заданию 4

Задание 5. Длина прямоугольника – 45 м, ширина –  $x$  метров,  $x$  нечётное число. Можно сказать, что значение площади этого прямоугольника кратно 4?



Задание 6. Сторона одного квадрата 0,3 дм, другого 1,5 см. Найди отношение длины стороны меньшего квадрата к большему. Будет ли отношение длин сторон квадратов равно отношению их площадей? Решите данную задачу, если стороны квадратов будут равны: 1) 0,6 дм и 3 см; 2) 0,3 дм и 1 см.

Задание 7. Упростите выражение  $\frac{1}{3}k + \frac{7}{24}k - \frac{1}{8}k$  и найдите его значение, если  $k = \frac{1}{12}; \frac{5}{6}; \frac{3}{4}$ .

Задание 8. Площадь прямоугольника равна 24 см. Чему равна его длина, если ширина прямоугольника 2 см? 4 см? 6 см? а) Выберите запись формулы для решения задачи, если  $S$  – площадь прямоугольника,  $a$  – его длина,  $b$  – ширина:  $S = a \times b$ ,  $a = \frac{b}{S}$ ,  $b = \frac{S}{a}$

б) Какие величины изменялись в формуле при решении задачи? Какие не изменялись? Как изменялась длина в зависимости от изменения ширины прямоугольника?

Задание 9. Пользуясь формулой  $y = kx$ , заполните пропуски в карточках (в соответствии с рисунком 4):

а) если  $k = 3$ :

$x$		$\frac{1}{3}$		0.01		$\frac{1}{4}$		6		1.7	
$y$	0.6		2		4.2		4		9		$\frac{1}{3}$

а) если  $k = 0.2$ :

$x$		10	0.5		1.5	120			17	0.1	1.9
$y$	0.2			0.04			1.6	20.4			

Рисунок 4 – Карточки к заданию 9

Задание 10. Найдите значение выражения  $\frac{5}{x+3}$  при  $x = 2, x = 0, x = 5, x = 4$  и изобразить точки на координатной плоскости?

Представленная серия задач для 6 класса, направлена на пропедевтику функциональной линии в целом и рациональной функции в частности.

Частичная апробация разработанной серии задач проходила в 6 классе МАОУ «СОШ № 28» г. Балаково Саратовской области в четвертой четверти 2021-2022 учебного года в ходе повторения по темам «Рациональные числа»,

«Отношения величин», «Площадь». Наиболее легкими для учеников оказались задания, предполагающие работу с координатным лучом и определением положения точек на координатной плоскости (задачи 2, 3) Наибольшие проблемы у учащихся возникли при решении задачи 6, 8 (трудности с понятием отношения, осознанием буквенной записи формулы).

Нами разработаны серии задач по теме «Рациональные функции и их графики» для учащихся 7, 8 и 9 классов

В качестве примера приведем две задачи из серии для 9 класса

№1. Постройте график функции  $y = \frac{3}{x-2} + 1$ .

№2. Построить график функции  $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ .

Актуализирован вопрос использования ИКТ технологий на уроках математики, при построении графиков с использованием специальной программы «Glance».

**Заключение.** Основные результаты, полученные при написании бакалаврской работы.

1. Выявлены особенности изучения функциональной линии в целом, и рациональной функции, в частности, в условиях реализации ФГОС ООО 2021.

Среди метапредметных результатов обучения при изучении рациональных функций у обучающихся должно быть сформировано умение читать и использовать для интерпретации и аргументации различные математические средства наглядности, такие как графики, таблицы, диаграммы, схемы.

Из предметных результатов при изучении функциональной линии в целом, и рациональной функции, в частности должны быть достигнуты следующие:

– овладеть базовым понятийным аппаратом по всем разделам содержания функциональной линии;

– умение выполнять преобразования целых, дробно-рациональных выражений;

– умение оперировать понятиями: функция, график функции, нули функции, прямая пропорциональность, линейная функция, квадратичная функция, обратная пропорциональность, парабола, гипербола; умение строить графики функций, использовать графики для определения свойств процессов и зависимостей, для решения задач из других учебных предметов и реальной жизни; умение выражать формулами зависимости между величинами

2. В ходе анализа математической литературы рассмотрено основное содержание темы «Рациональные функции и графики».

Целая рациональная функция (многочлен)  $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ , где  $n$  – целое неотрицательное число (степень многочлена),  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – постоянные числа, и дробно–рациональная функция:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}, \text{ образуют класс рациональных функции.}$$

График простейшей дробно-рациональной функции – гипербола.

3. Рассмотрена роль пропедевтического этапа в изучении темы «Рациональные функции и графики». В 6 классе актуальна организация пропедевтики функциональной линии в целом и рациональной функции, в частности. Изучаются новые формулы  $y = kx$  и  $y = \frac{k}{x}$ , широко начинают использоваться буквенные обозначения, где под буквой понимается какое-то допустимое значение – переменная величина, изучаются прямая (линейная функция) и обратная пропорциональность (парабола), используются табличные записи функциональной зависимости. Целесообразно делать упор на задания, в которых нужно найти значение выражения не при одном только значении переменной, а использовать несколько таких значений. С помощью таких заданий можно сформировать у учеников понимание зависимости значения выражения от значений входящих в него переменных

4. Разработана и частично апробирована серия задач по теме «Рациональные функции и их графики» для 6-го класса, включающая 10 заданий (пропедевтический этап).

Частичная апробация разработанной серии задач проходила в 6 классе МАОУ «СОШ № 28» г. Балаково Саратовской области

5. Составлены серии задач по теме «Рациональные функции и их графики» для 7, 8, 9 классов.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанные методические материалы могут быть использованы учителями, работающими в основной школе при изучении темы «Рациональные функции и их графики».