МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Квадратный трехчлен в курсе алгебры основной школы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Махневой Алины Сергеевны

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент ______________________ Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2022

Введение. Актуальность темы исследования обусловлена теми фактами, что, во-первых, сама тема «Квадратный трехчлен» является одной из важнейших, изучаемых в курсе алгебры основной школы, и, во-вторых, с этой темой сопряжены такие темы как «Квадратичная функция», «Квадратные уравнения» и «Квадратные неравенства».

Исследованием квадратного трехчлена занимались многие математики и методисты: В. Г. Болтянский, М. И. Башмаков, М. Я. Выготский, В. С. Крамор, П. И. Горнштейн, Б. И. Полонский, И. Ф. Шарыгин и др.

Темой «Квадратный трехчлен», так или иначе, занимались все авторы современных учебников алгебры для основной школы: Г. В. Дорофеев, Ю. М. Колягин, Ю. Н. Макарычев, А. Г. Мерзляк, А. Г. Мордкович, С. М. Никольский и другие.

31 мая 2021 года утвержден новый федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (ФГОС ООО), в соответствии с которым учебный предмет «Математика» включает традиционные дисциплины «Алгебра», «Геометрия» и новую – «Вероятность и статистика». На основе ФГОС с учетом потребностей регионов разрабатываются примерные образовательные программы ООО, в том числе предусматривающие углубленное изучение учебных предметов.

Новый ФГОС ООО обеспечивает, в частности: (1) вариативность содержания образовательных программ ООО; (2) личностное развитие обучающихся, в том числе патриотическое.

Вариативность содержания программ основного общего образования обеспечивается во ФГОС, в частности, за счет требований к структуре программ основного общего образования, предусматривающей наличие в них: (1) учебных предметов; (2) учебных курсов; (3) учебных модулей.

При этом учебный курс определяется как целостная, логически завершенная часть содержания образования, расширяющая и углубляющая материал предметных областей, и (или) в пределах которой осуществляется освоение относительно самостоятельного тематического блока учебного предмета.

В нашем исследовании под курсом «Алгебра» будем понимать дисциплину «Алгебра» и учебные курсы соответствующего (алгебраического) направления, разрабатываемые учителями самостоятельно.

Многие ученые и педагоги внесли большой вклад в становление олимпиад в России, в разработку методики организации и проведения олимпиад. Проблемам подготовки к предметным олимпиадам по математике были посвящены диссертационные исследования Г. И. Алексеевой, И. С. Петракова.

Задания по теме «Квадратный трехчлен» часто встречаются в олимпиадах различного уровня. Это справедливо и для Саратовских олимпиад по математике (районных, городских, областных).

Цель бакалаврской работы: разработать содержательную модель учебного курса «Задачи на квадратный трехчлен в Саратовских олимпиадах».

Задачи бакалаврской работы:

1. Исследовать тему «Квадратный трехчлен» в аспекте реализации ФГОС ООО 2021.
2. Рассмотреть содержание темы «Квадратный трехчлен».
3. Выявить задания по теме «Квадратный трехчлен» в материалах саратовских олимпиад.
4. Разработать теоретический и задачный материал учебного курса «Задачи на квадратный трехчлен в Саратовских олимпиадах».

Методы исследования: изучение нормативных документов; анализ математической и учебно-методической литературы; разработка методических материалов.

Структура бакалаврской работы: введение, два раздела («Квадратный трехчлен в курсе алгебры основной школы: теоретические аспекты»; «Квадратный трехчлен в курсе алгебры основной школы: практические аспекты»), заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Квадратный трехчлен в курсе алгебры основной школы: теоретический аспект» посвящен решению первых трех задач бакалаврской работы.

Рассмотрено содержание темы «Квадратный трехчлен» в ФГОС ООО.

Новизна современного урока математики в условиях введения нового ФГОС ООО 2021 года заключается в том, чтобы: чаще организовать индивидуальные и групповые формы работы на уроке. Именно, на таких уроках постепенно преодолеваться авторитарный стиль общения между учителем и учеником.

Требования к результатам освоения по учебному предмету «Математика» (дисциплина «Алгебра») – на базовом уровне: умение оперировать понятиями: одночлен, многочлен, тождество; умение выполнять расчеты по формулам, разложение многочлена на множители, в том числе с использованием формул разности квадратов и квадрата суммы и разности.

Требования к результатам освоения по учебному предмету «Математика» (дисциплина «Алгебра») – на углубленном уровне:

– умение свободно оперировать понятиями: числовое и алгебраическое выражение, степень с целым показателем, одночлен, многочлен; умение выполнять расчеты по формулам, преобразования целых, выражений; умение выполнять преобразования многочленов, в том числе разложение на множители;

– умение свободно оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, числовое равенство, уравнение с одной переменной, линейное уравнение, квадратное уравнение, неравенство; умение решать линейные и квадратные уравнения, системы уравнений, линейные, квадратные неравенства с одной переменной и их системы; умение составлять и решать уравнения, неравенства и их системы (в том числе с ограничениями, например, в целых числах) при решении математических задач, задач из других учебных предметов и реальной жизни; умение решать уравнения, неравенства и системы графическим методом; знакомство с уравнениями и неравенствами с параметром.

Рассмотрены основные понятия по теме «Квадратный трехчлен».

Квадратный трехчлен – это многочлен вида $ax^2 + bx + c$ (1), где: x – переменная; a, b и c – постоянные коэффициенты (старший, средний и свободный, соответственно); $a \neq 0$.

Значения x, при которых квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль, называются корнями трехчлена. Таким образом, для нахождения корней квадратного трехчлена нужно решить квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$.

Теорема 1. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с действительными коэффициентами a, b, c, где $a \neq 0$ всегда имеет два корня, определяемых по формулам $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$. Эти корни:

А) действительны и различны, если $D > 0$;

Б) действительны и совпадают, если $D = 0$;

В) не являются действительными (и будут комплексно сопряженными) при $D < 0$.

Функцию $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – действительные числа, причем a $\neq 0$, будем называть квадратичной функцией. Хотя значение y по этой формуле может быть вычислено для любых комплексных значений x, мы будем в дальнейшем рассматривать эту функцию лишь для действительных значений аргумента x.

Графиком квадратичной функции является парабола.

Для изучения регионального опыта использования темы «Квадратный трехчлен» в олимпиадных заданиях, нами были рассмотрены материалы Межрегиональной олимпиады по математике для обучающихся 2-10 классов 2019/20 учебного года; материалы открытой олимпиады школьников по математике 2017 года (СГУ); а также следующие источники: (1) А.И. Барабанов, И.Я. Чернявский. Задачи и упражнения по математике. По материалам математических олимпиад. Издательство Саратовского университета, 1965. (2) И.Л. Бабинская. Задачи математических олимпиад. М. Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1975. (3) А.Н. Андреева, А.И. Барабанов, И.Я. Чернявский. Саратовские математические олимпиады. 1950/51–1994/95.М. МЦНМО, 2013.

Выделены 32 задачи по темам «Квадратный трехчлен», «Квадратное уравнение», «Квадратичная функция».

Приведем примеры задач по каждой из тем.

<u>Тема «Квадратный трехчлен»</u>

Задача 1. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ не имеет вещественных корней, и $a + b + c > 0$. Определите знак c.

Решение. Очевидно, что $c \neq 0$, иначе трехчлен $y(x) = ax^2 + bx + c$ имел бы вещественные корни ($ax^2 + bx = x(ax + b) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$).

Так как вещественных корней нет, график трехчлена лежит либо выше оси Ох, либо ниже ее. Но $y(1) = a + b + c > 0$ по условию, то есть график трехчлена лежит выше оси Ох. Тогда $c = y(0) > 0$.

Ответ: $c > 0$.

Задача 2. Пусть $D -$ дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами. Докажите, что D не может быть равным ни 1986, ни 1987.

Решение. Рассмотрим два случая. 1) b – четное число, т.е. $b = 2k$, тогда $D = b^2 - 4ac = (2k)^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$ делится на 4.

2) b – нечетное число, т.е. $b = 2k + 1$, тогда $D = b^2 - 4ac = (2k + 1)^2 - 4ac = 4k^2 + 4k - 4ac + 1$ дает при делении на 4 остаток 1. Однако $1986 = 4 \cdot 496 + 2;\ 1987 = 4 \cdot 496 + 3$. Ч.т.д.

Задача 3. Докажите, что при любых p и q существует такое нецелое x, что $x^2 + px + q$ будет целым числом.

<u>Тема «Квадратные уравнения»</u>

Задача 1. Пусть $D-$ дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами. Доказать, что D не может равняться 1983.

Решение. Рассмотрим два случая. 1) b – четное число, т.е. $b=2k$, тогда $D=b^2-4ac=(2k)^2-4ac=4(k^2-ac)$ делится на 4.

2) b – нечетное число, т.е. $b=2k+1$, тогда $D=b^2-4ac=(2k+1)^2-4ac=4k^2+4k-4ac+1$ дает при делении на 4 остаток 1. Однако $1983=4\cdot 495+3$. Ч.т.д.

Задача 2. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней следующего уравнения:

$$x^2+px+q=0.$$

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$. Тогда по теореме Виета $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$. Далее:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-p)^2-2q=p^2-2q;\ \ x_1^2x_2^2=q^2.$$

Поэтому корнями уравнения $x^2+(2q-p^2)+q^2=0$ являются x_1^2 и x_2^2.

Ответ: $x^2+(2q-p^2)+q^2=0$.

Задача 3. Не решая уравнения $x^2+px+q=0$, найти сумму кубов его корней.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$.

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-p^3+3pq.$$

Ответ: $x_1^3+x_2^3=-p^3+3pq$.

Задача 4. Не решая уравнения $ax^2+bx+c=0$, найти сумму обратных величин четвертых степеней его корней.

Задача 5. Не находя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2+px+q=0$, найти величину выражения

$$x_1(2x_1^2-3x_2^2)+x_2(2x_2^2-3x_1^2).$$

Задача 6. Найти все целые a, при которых уравнение $x^2+ax+a=0$ имеет целые корни.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни данного уравнения. По теореме Виета $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=a,$ следовательно:

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 1 = -a + a + 1 = 1.$$

Числа $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ должны быть целыми (по условию), поэтому либо $x_1 + 1 = 1$ и $x_2 + 1 = 1$, либо $x_1 + 1 = -1$ и $x_2 + 1 = -1$. В первом случае $x_1 = x_2 = 0$ и $a = 0$. Во втором случае $x_1 = x_2 = -2$ и $a = x_1 x_2 = 4$.

Ответ: $a = 0, a = 4$.

Задача 7. При каких значениях a уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0,$$
$$x^2 + x + a = 0$$

имеют общий корень?

Задача 8. В уравнениях

$$x^2 - 15 + 2k = 0,$$
$$x^2 - 2x + k = 0$$

определить k так, чтобы один из корней второго уравнения был в два раза больше одного из корней первого уравнения.

Задача 9. Доказать, что если $(a + b + c)c < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет вещественные корни.

Задача 10. При каких значениях a оба корня квадратного уравнения $(1 - a^2)x^2 + 2ax - 1 = 0$ удовлетворяют равенству $0 < x < 1$ $(a^2 \neq 1)$?

Решение. При $a^2 \neq 1$ корни заданного уравнения определяются по формуле $x = \frac{-a \mp 1}{1 - a^2}$. Записывая условие для первого из корней $\frac{-a+1}{1-a^2} \in (0,1)$, получаем $a > 0$. Из условия $\frac{-a-1}{1-a^2} \in (0,1)$, находим $a > 2$. Следовательно, оба корня одновременно удовлетворяют заданному условию при $a > 2$.

<u>Тема «Квадратичная функция»</u>

Задача. Доказать, что если функция $y = ax^2 + bx + c$ при всех целых значениях x принимает целые значения, то числа $2a, 2b, c$ целые.

Решение. Так как $y(0) = c$, то c целое. Тогда $z(x) = ax^2 + bx$ является целым при любом целом значении x. Имеем: $z(1) = a + b$, $z(-1) = a - b$. Складывая и вычитая эти два равенства, получаем:

$2a = z(1) + z(-1)$ – целое число;

$2b = z(1) - z(-1) -$ целое число. Ч.т.д.

Второй раздел «Квадратный трехчлен в курсе алгебры основной школы: практические аспекты» посвящен решению четвертой задачи бакалаврской работы. В разделе представлена программа учебного курса «Задачи на квадратный трёхчлен в Саратовских олимпиадах» (пояснительная записка, планируемые результаты освоения учебного курса, тематическое планирование, теоретический и задачный материал).

Учебный курс «Задачи на квадратный трёхчлен в Саратовских олимпиадах» для учащихся 9 классов осваивается после изучения основного содержания темы «Квадратный трехчлен» и связанных с ней тем «Квадратичная функция», «Квадратные уравнения» и «Квадратные неравенства».

Цели учебного курса:

– освоить методы решения задач по теме «Квадратный трехчлен», предлагаемых на олимпиадах по математике г. Саратова;

– воспитание любви к малой Родине, гордости за их историю и достижения.

В содержании курса предлагаются ряд свойств квадратного трехчлена, не излучающихся в школьном курсе, но непосредственно к ним примыкающих и которые, в основном, легко доказываются на основе школьных знаний уровня обязательного минимума. Среди этих свойств самые главные – это многочисленные необходимые и достаточные условия для того или иного расположения корней трехчлена, для сохранения знака трехчлена на некотором промежутке, для определения связи между двумя заданными квадратными трехчленами и т. п.

Учебный курс предусматривает не только классно–урочную и лекционно–практическую системы, но и использование личностно–ориентированных педагогических технологий. При решении задач значительное место должно занимать поиски идей решения, эвристические соображения, и только затем, само решение, найденное эвристически, проводится строгим логическим рассуждением.

Предлагаемый курс рассчитан на 17 часов (2 и 3 четверть).

Программа построена таким образом, что учитель сам может решать сколько и какие темы в неё включить в зависимости от уровня подготовленности учащихся. Темы содержательной части программы расположены по нарастающей степени сложности и трудности, при этом учитель вправе ограничиться подбором таких заданий практического содержания, которые будут доступны всем учащимся и одновременно повысят уровень их математических знаний и создадут необходимый уровень знаний для продолжения изучения математики в 10 классе математического профиля. Данный учебный курс может быть использован учителем и в старших 10–11 классах для развития и систематизации знаний учащихся по теме и подготовки их к математическим олимпиадам различного уровня.

При заинтересованности учащихся данной темой количество часов на него может быть увеличено за счет изучения всех тем программы, а также его практической части с большей опорой на олимпиадные задачи.

Программа учебного курса «Задачи на квадратный трехчлен в Саратовских олимпиадах» прошла частичную апробацию в МАОУ СОШ №13 г. Балаково Саратовской области. В ходе проведения факультативных занятий с учащимися 9 класса с углубленным изучением математики проведено два занятия по теме «Задачи с параметром» (учитель Рыженкова Т. Н.).

Заключение. Основные результаты, полученные при написании бакалаврской работы.

1. Рассмотрено основное содержание темы «Квадратный трехчлен», изучаемое в школьном курсе алгебры, как на базовом, так и на углубленном уровнях.

2. Проведено исследование темы «Квадратный трехчлен» в содержании нового ФГОС ООО, в частности, указаны требования,

предъявляемые к образовательным результатам: личностным, метапредметным, предметным.

3. Изучен региональный опыт использования темы «Квадратный трехчлен» в материалах саратовских олимпиад. Выделены 32 задачи.

4. Разработан теоретический и задачный материал учебного курса «Задачи на квадратный трехчлен в Саратовских олимпиадах» в рамках программы учебного курса, включающую: пояснительную записку, планируемые результаты, тематическое планирование, содержание (теоретический и задачный материал).

Материалы бакалаврской работы могут быть использованы при подготовке школьников к математическим олимпиадам, в курсах дополнительного математического образования, при составлении программ учебных курсов.