

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Серии задач в математическом образовании современных школьников**  
**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 5 курса 521 группы  
направления 44.03.01 Педагогическое образование  
механико-математического факультета

Михеева Сергея Александровича

Научный руководитель

зав. кафедрой, к. п. н., доцент \_\_\_\_\_

И. К. Кондаурова

Зав. кафедрой

к. п. н., доцент \_\_\_\_\_

И. К. Кондаурова

Саратов 2022

**Введение.** Для формирования теоретических, операциональных и практических математических знаний и решения других образовательных задач применяется средство обучения, называемое задачей конструкцией, подсистемой которой являются серии задач. Очевидным также является тот факт, что развивающие и воспитательные задачи математического образования школьников реализуются не только на уроках математики, но и в ходе разнообразных форм дополнительного математического образования. Содержательной основой большинства мероприятий любой программы дополнительного математического образования являются занимательные литературно-математические тексты и задачи, а основным средством – серии задач.

Задачными конструкциями в своё время занималась группа ученых из Арзамаса под руководством профессора М. И. Зайкина, а также другие ученые и методисты А. А. Аксенов, О. М. Абрамова, С. В. Лебедева и др.; содержание и проблемы дополнительного математического образования школьников рассматриваются в трудах И. К. Кондауровой, С. В. Напалкова, Р. А. Мельникова и др.

Цель работы – обобщение и систематизация материала теории задач в контексте проектирования серий задач, выполняющих разнообразные функции в обучении математике школьников.

Задачи работы: (1) изложить основные теоретические положения, связанные с темой исследования; (2) определить и сформулировать принципы конструирования серий задач в контексте их целевого назначения; (3) разработать учебную серию задач для урока математики; (4) разработать серию задач для отчетного мероприятия учебного курса; (5) разработать серию задач для одного из занятий математического кружка; (6) разработать серию занимательных математических задач для досуговых мероприятий.

Методы исследования: анализ первоисточников, теоретический анализ, педагогические (методическое) проектирование.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух разделов основной части («Серии задач в структуре современного математического образования школьников», «Проектирование серий задач») заключения, списка из 44 использованных источников.

### **Основное содержание работы.**

**В первом разделе основной части работы** приводятся основные положения теории серий задач и их места в математическом образовании современных школьников.

Определены понятия и основные теоретические аспекты, рассматриваемые в бакалаврской работе.

*Серия задач* – это такая упорядоченная совокупность задач, формулировки которых имеют схожесть текстового, сюжетного, графического представления, либо математическую идентичность заданных в условии отношений.

Таким образом, под *учебной* нужно понимать серию математических задач с постепенно усложняющимся для восприятия общим признаком, обеспечивающим достижение поставленной дидактической или образовательной цели.

С точки зрения функциональности, вариантами целевого назначения применения серий математических задач могут быть: (а) отработка навыков выполнения математических действий; (б) подведение к обнаружению (открытию) какой-либо особенности математического объекта, зависимости или закономерности, их выражения в виде соотношения, формулы или словесного правила и т. д.; (в) усвоение способов решения задачи, алгоритма действий и т. д.; (г) диагностика математических способностей школьников, уровня сформированности у них какого-либо умения или навыка.

Таким образом, можно ввести следующую классификацию серий задач по функциональному признаку: (1) демонстрационные; (2) обучающие (формирующие и подводящие); (3) диагностические.

С точки зрения дидактической ценности серии математических задач способствуют: – развитию интереса учащихся к занятию математикой; – развитию познавательной самостоятельности школьников; – развитию эстетического вкуса учащихся; – развитию креативности школьников, формированию у них способности к математическому творчеству с помощью правильно составленных серий математических задач, обеспечивающих самостоятельное успешное продвижение ученика от задачи к задаче; – развитию внимательности обучаемого; – развитию целеустремленности, настойчивости в достижении поставленной цели.

С точки зрения процесса применения серий задач в школьном курсе математики, можно говорить о таких способах, как: – совместное решение учащимися задач серии при попеременном комментировании хода решения каждой задачи отдельными учениками; – совместное решение задач серии с обсуждением хода решения каждой задачи; – самостоятельное решение задач серии каждым учащимся без непосредственного взаимодействия с другими учащимися класса или учебной группы и др.

Организационными формами использования серий математических обучающих задач могут быть: устный счет; всевозможные тренажеры; практикумы; проектные задания; домашняя работа и др.

При этом задачи серии могут: предъявляться полным списком; формулироваться учителем по мере решения; формулироваться самими учащимися по наводке учителя; составляться учащимися самостоятельно и т. д.

При составлении обучающей серии степень аналогичности задач, входящих в нее может быть различной. Самое простое – это составление серии из задач-клонов, одинаковых по сложности, способу решения, теоретическому базису, равноценных или очень близких по сложности, и отличающихся друг от друга числовыми данными, обозначениями, расположением объектов, наименованием нематематических объектов задач. Вершина мастерства – составление серий задач, в которых аналогия прослеживается между разными учебными предметами школьного курса математики, связь между задачами

заметна не каждому, поскольку умение увидеть ее зависит и от суммы знаний, и от способности комбинировать, связывать знания по-новому.

Обобщая результаты исследований, проводимых на кафедре математики и методики ее преподавания механико-математического факультета СГУ, выделим: – междисциплинарные программы дополнительного математического образования школьников; – программы ДМОШ, направленные на расширение и углубление математических знаний, реализуемые в формах математических кружков и учебных курсов; – программы ДМОШ, направленные на развитие учащихся средствами математики, предполагающие чтение дополнительной математической литературы, участие в проектной и исследовательской деятельности и т.п.

Содержательной основой большинства мероприятий любой программы дополнительного математического образования являются познавательно-занимательные литературно-математические и математические тексты и задачи, а основным средством – серии задач.

*Занимательными* будем называть задачи математического, логического и практического содержания, изначально разработанные для организации математического досуга школьников.

С учетом вышеизложенного, все *задачи, составляющие содержание дополнительного математического образования школьников*, как занимательные (исначально разработанные для организации математического досуга школьников) и нестандартные (учащиеся не знают заранее ни способа ее решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение) мы, по содержанию и подходам к решению, выделяем три подкласса: (1) класс задач повышенной трудности, базис решения которых связан непосредственно с содержанием школьного курса математики; (2) класс задач, базис решения которых формируется на занятиях факультативных курсов и математических кружков, посвященных темам олимпиадной математики (задачи на принцип Дирихле, на действия с остатками, решение неопределенных уравнений, инверсия и т.п.); (3) класс задач напрямую не примыкающих к школьному

курсу математики – так называемые задачи без возрастных ограничений – универсальные логические задачи.

Определим *серию занимательных нестандартных задач* как упорядоченную совокупность познавательно-занимательных или занимательно-развлекательных задач, формулировки которых имеют схожесть текстового, сюжетного, графического представления, либо математическую идентичность заданных в условии отношений, а решение требует применения исследовательски-поисковых методов.

Таким образом, анализ вышеизложенного материала позволил прийти к выводу, что серия математических задач будет применена в учебном процессе наиболее эффективно, если ее составление будет происходить поэтапно: (1) постановка учебной задачи (четкое определение целей серии задач - какими конкретными знаниями, умениями и навыками должен овладеть учащийся в результате решения данной серии задач в соответствии с выбранной учебной темой); (2) обзор базового уровня темы: основные понятия, характеристики, методические аспекты (рассматриваются необходимые определения, характеристики, операции, методы, взаимосвязи понятий рассматриваемой темы в школьном курсе математики); (3) моделирование серии задач: подбор задач с учетом тематики, возраста обучаемого, уровня сложности задач, основных дидактических функций системы задач; (4) контроль: проверка соответствия серии задач необходимым условиям: признакам, характеристикам, критериям; (5) корректировка, данный этап используется только в тех случаях, когда сконструированная серия задач не соответствует каким-либо методическим аспектам и требованиям, предъявляемым на предыдущем этапе; (6) апробирование данной серии задач, на данном этапе готовая серия задач реализуется в учебной программе, далее проводится сравнительный анализ исходных данных об уровне обучения учащихся по данной теме с новыми, полученными в результате системы контроля после применения сконструированной серии задач, после чего делаются соответствующие выводы об эффективности ее применения.

В тоже время принципы проектирования серии могут отличаться (в некоторых случаях достаточно кардинально) сообразно целям ее применения.

Опираясь на вышесказанное и принимая во внимание ФГОС ООО структуру современного общего (основного) математического образования школьников можно представить четырьмя взаимосвязанными компонентами, целенаправленно достигающими заданных предметных (математика), метапредметных и личностных (средствами математики) образовательных результатов.

Очевидно, что серии задач, ориентированные на личностные результаты математического образования (с учетом возможности достижения ряда предметных и метапредметных результатов) должны стать объектом специального исследования, в результате которого будут сформулированы принципы конструирования (а) учебных серий задач для использования в рамках базового математического образования; (б) серий задач для отчетных мероприятий учебного курса в рамках углубленного образования; (в) серий задач для занятий математического кружка как одной из форм систематической внеурочной деятельности школьников; (г) серий задач для публичных (досуговых) мероприятий.

Основные принципы конструирования учебных серий задач.

С точки зрения структуры серии задач как задачной конструкции, должны выполняться следующие принципы:

1. Расположение задач в серии по нарастанию трудности решения для школьников.
2. Достаточность числа задач в серии для достижения поставленной дидактической цели.
3. Минимальность числа задач в серии при условии их достаточности для достижения планируемых результатов.
4. Расположение задач «вразброс», предупреждающее в необходимых случаях «механические» умозаключения;

5. Достижимость личностных результатов, запланированных учителем; для учебных серий задач эти результаты будут связаны в первую очередь с воспитанием у школьников осознания ценности научного познания, развитием их «математических» навыков и умений.

Основные принципы конструирования серий задач для отчетных мероприятий учебного курса.

1. Задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики. Большая часть заданий должна включать в себя элементы научного творчества.

2. Задачи, включаемые в содержание олимпиады должны соответствовать материалу, изученному в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.

3. Сложность заданий должна быть дифференцирована для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому ее участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных участников.

4. Задания, включаемые в содержание олимпиады должны иметь познавательно-занимательный характер, иметь некоторую привлекательность для решающего.

5. Задачи должны быть сформулированы корректно, четко и однозначно. Не допускается использование терминов и понятий, не знакомых учащимся данной возрастной категории.

6. Задания по своему тематическому содержанию должны быть разнообразными и охватывать все разделы школьной математики – арифметику, алгебру, геометрию, логику, комбинаторику.

7. При проектировании серии олимпиадных задач необходимо придерживаться принципа новизны заданий. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Желательно использование различных источников, а в

идеале – использование совершенно новых заданий, пусть даже и являющихся вариациями уже известных.

8. Должна быть обеспечена достижимость личностных результатов, запланированных учителем; воспитательные цели могут быть направлены на достижение личностных результатов в различных областях (экологической, патриотической и т. д.).

Основные принципы конструирования серий задач для занятия математического кружка.

1. Внеурочные систематические мероприятия направлены, в первую очередь, на достижение метапредметных результатов, также формат мероприятий позволяет реализовать весь спектр воспитательных целей, прописанных в Стандарте. Поэтому вполне вероятно, что для серий задач будут подбираться межпредметные и метапредметные, практико-ориентированные и ситуационные задачи, аналогичные блокам тематических заданий для мониторинга формирования и оценки функциональной грамотности учащихся основной школы.

2. В основе кружковой работы лежит принцип строгой добровольности. В связи с этим задачный материал серии должен быть интересен для учащихся.

3. Обычно кружковые занятия организуются для хорошо успевающих учащихся. Однако следует иметь в виду, что иногда и слабо успевающие учащиеся изъявляют желание участвовать в работе математического кружка и нередко весьма успешно занимаются там. Поэтому серия задач, используемая в содержании занятия, должна быть сконструирована с учетом возможности дифференцирования заданий для каждого из учеников.

4. Задачный материал, используемый в содержании занятий, не должен дублировать содержание классных занятий.

5. Занимательность серии задач повышает интерес к предмету и способствует осмыслению важной идеи: математика окружает нас, она везде.

Основные принципы конструирования серий задач для публичных (досуговых) мероприятий.

1. Досуговые мероприятия направлены, в первую очередь, на достижение личностных результатов, а также на популяризацию математики и развитие у детей интереса к ее изучению. Поэтому математическое содержание мероприятия должно быть интересным и занимательным, строиться на основе игры и театрализации, так как отсутствие эмоциональной привлекательности способны обречь на неудачу любые формы и методы работы.

2. Задачи, используемые в содержании мероприятия не должны быть слишком сложными для решения. В тоже время задачи не должны быть слишком простыми, так как это приведет к быстрой потере интереса со стороны детей.

3. Решение задач должно быть неординарным, красивым, желательно наличие нескольких вариантов решения.

4. Для поддержания постоянного интереса необходима частая смена видов математической деятельности.

5. Серия задач для досугового мероприятия должна быть сконструирована с учётом индивидуальных запросов, интересов, склонностей, способностей детей. Дифференцированный подход обеспечивает комфортное состояние каждого участника досугового мероприятия.

**Во втором разделе основной части работы** приведены варианты сконструированных с учетом целевого назначения серий задач (учебная серия задач по теме «Вынесение общего множителя за скобки», серия конкурсных задач отчетного мероприятия учебного курса, серия конкурсных задач для учащихся 5-6 классов – членов математического кружка, серия задач для математического конкурса) и определены критерии достижимости требований к структуре серии задач как задачной конструкции.

В качестве примера представим разработанную учебную серию задач.

1. Вынесите общий множитель за скобку:

а)  $3x + 3y$       б)  $5a - 15b$       в)  $21a + 28y$       г)  $1.25x - 1.75a$

д)  $3x + 0,3y$       е)  $5a - 1,5b$       ж)  $261a + 621y$       и)  $0,125x - 17,5a$

к)  $\frac{1}{8}x - 17,5a$       л)  $5a - 1,3b$       м)  $26a + 21y$       н)  $3^2x + 5y$

2. Запишите три одночлена, на которые делится каждый из заданных одночленов:

а)  $4x, 16x, 8xy$

б)  $56xyz, 42x^2z, 14y^2z$

3. Разложите многочлен на множители:

а)  $\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y$

б)  $4\frac{2}{7}a - 1\frac{1}{14}b$

4. Найдите и исправьте ошибки в равенствах:

а)  $8d^4 - 32d^2 = 8d^2(d^2 - 32)$

б)  $2m^6 - 4m^3 + 6m = 2(m^5 - 4m^2 + 6)$

в)  $m^3n^2 - n^3m^2 = m^2n^2(m - n)$

г)  $195c^6p^5 - 91c^5p^6 + 221c^3p^{10} = 7cp(27c^5p^4 - 13c^4p^5 + 32c^2p^9)$

5. Представьте в виде произведения выражения:

а)  $3x(a + b) + y(a + b)$

б)  $(c + 2) - d(c + 2)$

в)  $11p(c + 8d) - 9(8d + c)$

г)  $4(p - q) - a(q - p)$

6. Решите уравнение:

а)  $x^2 - 3x = 0$

б)  $x^3 - 3x^2 = 0$

в)  $0.45p^2 + 18p = 0$

г)  $-7x^2 + 2x = 0$

7. Вычислите наиболее рациональным способом:

а)  $154^2 + 154 \cdot 46$

б)  $0,9^3 - 0,81 \cdot 2,9$

8. Представьте в виде произведения многочлен:

а)  $(x - y)^2 - a(x - y)$

б)  $4c(4c - 1) - 3(4c - 1)^2$

в)  $a(2a - b)(a + b) - 3a(a + b)^2$

г)  $6d^2(2d - 5)^2 - d^2(2d - 5)(12d + 60)$

9. Найдите значение выражения:

а)  $0,756^2 - 0,241 \cdot 0,756 - 0,415 \cdot 0,756$

б)  $0,16 \cdot 6,41 \cdot 1,25 - 0,16 \cdot 1,25^2 - 0,16^2 \cdot 1,25$

в)  $\frac{1,7 \cdot 1,6 + 1,7^2}{3,4 \cdot 8,7 - 3,4 \cdot 5,4}$

г)  $\frac{1\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{15} - \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{9}}{\left(1\frac{2}{5}\right)^2 - 1\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{15}}$

10. Докажите, что значение выражения:

а)  $17^6 + 17^5$  кратно 18

б)  $2^{23} + 2^{20}$  кратно 72

в)  $10^6 + 5^7$  кратно 23

г)  $6^4 - 2^8$  кратно 13

**Заключение.** В процессе исследования в соответствии с целью и задачами получены следующие основные выводы и результаты:

1. Изложены основные теоретические положения, связанные с теорией школьных математических задач и выявлена роль в этой теории серий задач, под которой мы понимаем такую задачуную конструкцию, элементы которой, то есть задачи, обладают неким явным признаком (внешней схожестью, часто структурной или содержательной) и внутренней схожестью (касающейся базиса решения задачи, метод и/или способы решения, а возможно и подходы к решению) и составляют последовательный ряд (уточнённое определение).

2. Изложены основные теоретические положения, связанные с дополнительным математическим образованием школьников и выявлена роль в этой теории серий задач, под которыми мы понимаем такие упорядоченные совокупности задач, формулировки которых имеют схожесть текстового, сюжетного, графического представления, либо математическую идентичность заданных в условии отношений, а решение которых требует применения исследовательски-поисковых методов.

3. Определены и сформулированы принципы конструирования серий задач в контексте их целевого назначения.

4. Разработана учебная серия задач для урока математики.

5. Разработана серия задач для отчетного мероприятия учебного курса.

6. Разработана серия задач для одного из занятий математического кружка.

7. Разработана серия занимательных математических задач для досуговых мероприятий.

Основные положения исследования, проводимого в рамках бакалаврской работы, на различных этапах докладывались на научных конференциях и публиковались в форме статей.