МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Показательные уравнения и неравенства в школьном курсе математики

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Новогординской Ларисы Антоновны

Научный руководитель		
доцент, к.п.н.	______________________	О. М. Кулибаба
Зав. кафедрой		
к.п.н., доцент	______________________	И. К. Кондаурова

Саратов 2022

Введение. В школьном курсе математики большое внимание уделяется решению уравнений и неравенств разных типов, в том числе и показательных.

Актуальность исследуемой темы обуславливается педагогическими проблемами в сфере школьного курса математики. Безусловно, решению показательных уравнений, а равно и неравенств, должно уделяться пристальное внимание. Тем не менее, продолжительность данного курса не столь велика, ввиду чего ученики получают недостаточно практических знаний, что влияет на возникновение проблем в рамках исследуемой тематики, «особую значимость приобретает отбор учителем содержания учебного материала для обобщения и систематизации знаний школьников».

Период, когда ученики сталкиваются с представленным нами объектом исследования – 10 класс – во время ознакомления с показательной функцией и присущими ей свойствами, а решение систем, которые содержат показательные уравнения и неравенства, изучаются учениками в рамках курса математики в 11 классе. Высокий уровень потребности к изучению рассматриваемого вопроса объясняется и тем фактом, что рассматриваемые уравнения и неравенства содержатся в заданиях ЕГЭ, что значительно повышает потребность усиленного внимания к методике решения таковых. Более того, показательные уравнения и неравенства содержатся не только в заданиях ЕГЭ профильного уровня, но и базового.

Вопросам обучения решению показательных уравнений и неравенств в школьном курсе математики посвящено большое число исследований. В частности, К. И. Нешков выделяет необходимый и достаточный объем материала по теме, в том числе по упражнениям. Проблема прикладной направленности темы «Показательные уравнения и неравенства» рассмотрена в работах В. В. Вавилова, И. И. Мельникова, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко, Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова, Н. Х. Розова, Т. Дыбова, А. И. Забоева, А. С. Иванова, В. К. Егерева, Б. А. Кордемского, И. Ф. Шарыгина. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на едином государственном экзамене по математике отмечала М. В. Крутихина.

Цель работы: выявить методические особенности обучения решению показательных уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

Для достижения данной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1) обобщить теоретический материал по теме «Показательные уравнения и неравенства»;

2) провести сравнительный логико-дидактический анализ изложения темы «Показательные уравнения и неравенства» в учебниках по алгебре и началам анализа различных авторов;

3) проанализировать задания базового и профильного уровней ЕГЭ по математике по теме «Показательные уравнения и неравенства»;

4) выявить трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при решении показательных уравнений и неравенств.

5) сформулировать методические рекомендации по изучению темы «Показательные уравнения и неравенства» в школьном курсе математики.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования: анализ научно-методической и учебно-методической, научно-популярной литературы, школьных учебников курса алгебры; теоретический анализ и обобщение педагогического опыта.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух разделов, заключения и списка использованных источников.

Основное содержание работы. В первом разделе «Теоретические аспекты решения показательных уравнений и неравенств» определены понятия показательных уравнений и неравенств, представлены их основные виды и рассмотрены методы решения показательных уравнений и неравенств.

Определение 1. Уравнения вида: $a^{f(x)} = a^{g(x)}, \mathrm{a} > 0, a \neq 1.$ называются показательными уравнениями.

Обобщив рассмотренные некоторыми авторами подходы к обоснованию методов решения показательных уравнений, выделили следующие:

1) уравнивание оснований;
2) разложение на множители;
3) введение новой переменной;
4) использование свойств функций;
5) графический метод.

Каждый метод подробно рассмотрен и проиллюстрирован примерами.

Метод уравнивания оснований основывается на том, что, если основания степеней равны, то равны и показатели степеней. Поэтому при использовании данного метода необходимо левую и правую часть уравнения привести к степени с одинаковыми основаниями. Затем приравнять показатели и решить получившееся уравнение.

Метод разложения на множители.

Решение уравнений $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ методом разложения на множители, в том числе и показательных, предполагает переход к совокупности уравнений $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, …, $f_n(x) = 0$ на области допустимых значений (ОДЗ) переменной x для исходного уравнения.

Метод введения новой переменной.

Метод введения новой переменной используется в случае, когда после упрощения обеих частей уравнения появилась возможность обозначить какую-то степень другой переменной и, при этом, все остальные степени также будут выражаться через введённую переменную.

Метод использования свойств функций.

Данный метод основывается на применении свойств монотонности функции.

I. Если в уравнении $\boldsymbol{f(x) = a}$.

Функция f(x) возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение на этом промежутке может иметь не более одного корня.

II. Если в уравнении $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ функция f(x) возрастает на некотором промежутке, а функция g(x) на этом промежутке убывает (или наоборот), то это уравнение на этом промежутке может иметь не более одного корня.

Графический метод.

Большое распространение получил графический метод решения показательных уравнений. Особенно целесообразным является его использование к уравнениям вида: $a^{\varphi(x)} = f(x)$. Для графического решения уравнения подобного вида необходимо осуществить построение графиков функций $y = a^{\varphi(x)}$ и $y = f(x)$ в единой системе координат и найти точки пересечения этих графиков (если они существуют). Именно абсциссы этих точек и будут являться корнями исходного уравнения.

Определение 2. Неравенство называется показательным, если переменная находится только в показателе степени. Простейшее показательное неравенство имеет вид: $a^x < b$ или $a^x > b,$ где $a > 0, a \neq 1,$ x – неизвестное.

При решении показательных неравенств используются те же методы и приемы, что и при решении показательных уравнений, рассмотренные в п. 1.1. Если при решении показательных уравнений можно проверить найденные корни, то при решении показательных неравенств проверка подстановкой, как правило, невозможна, так как обычно решением неравенства является бесконечное множество. Также рассмотрены конкретные примеры решения некоторых показательных неравенств.

Во втором разделе «Методические аспекты обучения решению показательных уравнений и неравенств» охарактеризована пропедевтика изучения темы показательных уравнений и неравенств, представлен сравнительный логико-дидактический анализ изложения темы «Показательные уравнения и неравенства» в учебниках по алгебре и началам анализа различных авторов, рассмотрены задания ЕГЭ, в которых встречаются показательные уравнения и неравенства, а также выявлены трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при решении показательных уравнений и неравенств, и предложены пути их преодоления.

Пропедевтика изучения показательных уравнений и неравенств начинается в 7 классе с введения понятия степени числа.

Далее, после определения степени числа, вводится понятие степени с целым показателем: a^m называют степенью с целым показателем, a – любое действительное число отличное от нуля и m – любое целое число (положительное, отрицательное или нуль). Помимо этого отмечаются свойства степеней.

Далее приводятся примеры на нахождение числового значения, которые решаются с использованием определения степени с рациональным показателем.

Затем изучается показательная функция и ее основные свойства, демонстрируется график показательных функций. Решение показательных уравнений и неравенств основывается на свойствах показательной функции

Прежде чем перейти непосредственно к решению показательных уравнений, учащиеся знакомятся с показательной функцией. К моменту решения уравнений они уже знают определение показательной функции, ее свойства и график, знакомы с новыми обозначениями и понятиями.

Если сравнить программы базового и профильного уровней в рамках темы «Показательные уравнения и неравенства», то можно отметить, что различия содержания, обязательных умений учащихся обусловлены различием целей профильного и базового уровня обучения математике. Приведены требования к знаниям учащихся на базовом и профильном уровнях.

В результате проведенного анализа теоретического и задачного материала учебников можно констатировать, что предложенные в федеральном перечне учебники очень разнообразны по представлению теоретического материала и изложению методов решения показательных уравнений и неравенств, а также распределению материала в рамках 10-11 классов.

Можно сделать следующие выводы:

– первая группа (учебники Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина, М. В. Ткачевой и др. [24], Ю. М. Колягина, М. В. Ткачевой, Н. Е. Федоровой, М. И. Шабунина) используют классическую схему изложения, которая подразумевает использование показательной функции для решения показательных уравнений и неравенств. Изучение решения уравнений излагается в 10 классе и предполагает только демонстрацию примеров;

– вторая группа (учебники Г. К. Муравина, О. В. Муравиной используют исследовательскую схему изложения, которая ориентирована на решение задач, связанных с исследованием функции, формируют основные понятия в 10 классе, а полное изложение методов решения показательных уравнений и неравенств переносится в 11 класс;

– третья группа (учебники С. М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова, А. В. Шевкина) предполагают достаточно высокий уровень изложения даже в рамках базового варианта с использованием понятий предела в 10 классе, равносильности преобразований уравнений и неравенств в 11 классе. В этой группе изложены методы решения показательных уравнений и неравенств углубленного уровня. При этом использование этого учебника для базового уровня сомнительно, так как принцип изложения материала предполагает достаточно высокий начальный уровень подготовки школьников.

Рассмотрены задания единого государственного экзамена, для решения которых необходимо решать показательные уравнения и неравенства.

Умение решать уравнения и неравенства проверяются в заданиях № 1, № 9, № 11, № 14 и № 17 профильного уровня ЕГЭ по математике 2022 года. Задания № 1, № 9 относится к базовому уровню сложности и подразумевает краткий числовой ответ; задания № 11, № 14 и № 17 относятся к повышенному и высокому уровню сложности, подразумевают развернутый ответ. В них могут встречаться показательные уравнения и неравенства.

В задании № 14 профильного уровня ЕГЭ по математике встречаются задачи прикладного содержания, в которых также могут содержаться показательные уравнения и неравенства.

Пример 1. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const,$ где p (Па) − давление газа, V − объем газа в кубических метрах, a − положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в два раза объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

Решение. Пусть p_1 и V_1 – начальные значения, а p_2 и V_2– конечные значения давления и объема газа соответственно. Условие $pV^a = const$ означает, что $p_1 V_1^a = p_2 V_2^a$, откуда $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1^a}{V_2^a} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a$.

Задача сводится к решению неравенства:

$\frac{p_2}{p_1} \geq 4$, причем по условию $\frac{V_1}{V_2} = 2$:

$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a \geq 4,$

$2^a \geq 4,$

$2^a \geq 2^2,$

$a \geq 2.$

Ответ: 2.

Задания № 11, № 14 и № 17 профильного уровня ЕГЭ по математике – повышенного уровня сложности, в которых представлены наиболее трудные задания по теме «Показательные уравнения и неравенства». Для их успешного решения ученику требуется подробно и четко расписать решение.

Пример 2. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(1; \frac{7}{3})$.

Решение. а) Заметим, что $9^{x-\frac{1}{2}} = 9^{x-1+\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{x-1} = 3 \cdot 9^{x-1}$.

Преобразуем исходное уравнение:

$$3 \cdot 9^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0. \qquad (2.1)$$

Выполним замену:

пусть $3^{x-1} = t$, $t > 0$, тогда уравнение (2.1) примет вид $3t^2 - 8t + 5 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{5}{3}$.

При $t_1 = 1$ получим: $3^{x-1} = 1$, откуда $x_1 = 1$.

При $t_2 = \frac{5}{3}$ получим: $3^{x-1} = \frac{5}{3}$, откуда $x_2 = \log_3 5$.

б) Корень $x_1 = 1$ не принадлежит промежутку $(1;\ \frac{7}{3})$

Поскольку $1 < \log_3 5$ и $\log_3 5 < \log_3 9 < \frac{7}{3}$, корень $x_2 = \log_3 5$ принадлежит промежутку $(1;\ \frac{7}{3})$.

Ответ: а) $x_1 = 1$, $x_2 = \log_3 5$; б) $x_2 = \log_3 5$.

Пример 3. а) Решите уравнение: $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$;

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2;\ \sqrt{10}]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде

$$4^x - 2^x \cdot 8 + 15 = 0. \tag{2.3}$$

Введем замену переменной: $t = 2^x$, $t > 0$. Тогда уравнение (2.3) принимает вид $t^2 - 8t + 15 = 0$, откуда $t_1 = 3$, $t_2 = 5$.

Вернемся к исходной переменной:

$\left[\begin{array}{l} 2^x = 3, \\ 2^x = 5, \end{array}\right.$ откуда получим $x_1 = \log_2 3$, $x_2 = \log_2 5$.

б) Поскольку $\log_2 3 < 2$ или $\log_2 3 < \log_2 4$, корень $x_1 = \log_2 3$ не принадлежит отрезку $[2;\ \sqrt{10}]$.

Поскольку $2 < \log_2 5 < \sqrt{10}$, корень $x_2 = \log_2 5$ принадлежит отрезку $[2;\ \sqrt{10}]$.

Ответ: а) $x_1 = \log_2 3$, $x_2 = \log_2 5$; б) $x_2 = \log_2 5$.

Анализируя ЕГЭ по математике, методисты отмечают, что выпускники допускают ошибки при выполнении заданий № 11 и № 14 профильного уровня, в которых требуются умения систематизировать и обобщать знания при решении показательных уравнений и неравенств.

Условно ошибки, которые встречаются не только при решении показательных уравнений и неравенств и не являются для них специфическими, но встречаются достаточно часто, можно разделить на несколько видов:

- потеря корней или решений уравнений и неравенств;
- получение посторонних корней или интервалов;
- некорректность использования замены переменной;
- проведение подбора корней без достаточных оснований.

Методы решения показательных уравнений приводят и к особенным ошибкам, связанным с некорректным применением свойств показательной функции при сведении членов уравнения к одному основанию или одному показателю.

Неравенства, как наиболее сложные конструкции для усвоения учащимися, проверять значительно сложнее. Если для уравнения посторонние корни могут быть удалены при помощи дополнительной проверки, то реализация такого плана для неравенств может потерпеть крах. Неравенства требуют более тонкого отношения к равносильным преобразованиям и постоянного соблюдения правила учета области определения, которая может меняться в ходе преобразований. Несмотря на кажущуюся простоту свойств показательной функции при основании меньшем единицы, более трети обучаемых делают ошибки при использовании свойств монотонности показательной функции.

Часто ошибка вызвана не столько незнанием свойств функции, сколько шаблонным мышлением, которое не позволяет учащемуся выполнить решение.

Таким образом, можно сделать вывод, что ошибки при решении показательных уравнений и неравенств возникают из-за недостаточной глубины и системности знаний, недостатка четкого понимания алгоритма действий при решении показательных уравнений и неравенств.

Поэтому перед изучением темы есть смысл предложить учащимся порешать задания на уже полученные знания по теме «Показательная функция» для закрепления изученной темы и введения новой темы. Необходимо сразу сформировать навык использования свойств показательной функции.

Возникает необходимость напомнить о равносильности (неравносильности) осуществляемых преобразований при решении уравнений и неравенств. Для успешного решения показательных уравнений и неравенств смешанных типов учащимся необходимо вспомнить тригонометрическую и логарифмическую функции. Учащиеся должны хорошо знать основные действия свойства степеней для изучения данной темы.

Следующей возможной причиной, по которой возникают сложности с усвоением темы у учащихся, является многообразие задачного материала по данной теме. Довольно часто учащийся не может четко систематизировать свои знания и выстроить четкий алгоритм решения задачи. Если обобщить и сформировать некоторую последовательность действий при решении задач, возможно учащимся будет легче структурировать работу.

Как уже было рассмотрено ранее простейшие показательные уравнения и неравенства решаются с использованием методов приведения к одинаковому основанию, вынесения общего множителя за скобки и приведение показательного уравнения и неравенства к квадратному. Таким образом, приступая к решению уравнения или неравенства, учащиеся должны проанализировать, можно ли привести уравнение или неравенство к степени с одинаковым основанием, получить квадратное уравнение или неравенство. Если это возможно, то учащиеся получают простейший вид и без труда смогут получить результат. Было бы полезным обратить внимание учащихся на некоторые отличительные особенности и дать полезные рекомендации. Например, метод вынесения общего множителя успешно используют тогда, когда при вынесении за скобки степени с переменным показателем мы получаем алгебраическую сумму в скобках, которая является определенным числом или выражением.

Заключение.

Основные результаты, полученные при написании бакалаврской работы.

1. Обобщен теоретический материал по теме «Показательные уравнения и неравенства».

2. Проведен сравнительный логико-дидактический анализ изложения темы «Показательные уравнения и неравенства» в учебниках по алгебре и началам анализа различных авторов.

Для профильных классов учебники при решении показательных уравнений и неравенств предлагают также введение понятия равносильности на множествах и изложение специализированных методов: умножение уравнений и неравенств на функцию; применение преобразований при дополнительных условиях; использование свойств функции; применение последовательности преобразований для получения равносильного уравнения или неравенства.

В результате проведенного анализа теоретического и задачного материала учебников можно констатировать, что предложенные в федеральном перечне учебники очень разнообразны по представлению теоретического материала и изложению методов решения показательных уравнений и неравенств, а также распределению материала в рамках 10-11 классов.

3. Проанализированы показательные уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ.

Показательные уравнения и неравенства, которые встречаются в заданиях ЕГЭ, относятся к повышенному уровню сложности и требуют от учащихся более глубоких знаний особенностей и специфики различных методов решения, но на их изучение в школьном курсе математики отводится недостаточное количество времени.

Проанализированы типичные ошибки, которые возникают у школьников при решении показательных уравнений и неравенств. Выделены ошибки, связанные со случайными некорректными преобразованиями, ошибками в вычислениях, систематическими ошибками. Изложены методические рекомендации обучения решению показательных уравнений и неравенств в школьном курсе математики.