МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики её преподавания

Серия «Геометрические задачи на экстремум» для школьников

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование механико-математического факультета

Зиновьевой Марии Сергеевны

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент ______________________ Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурока

Саратов 2022

Введение. Задачи на максимум и минимум или, как их называют по-другому, задачи на экстремум во всей математике и, в частности, в геометрии имеют древнюю историю. Уже в «Началах» Евклида можно встретить задачу: «Если даны длины двух сторон треугольника, то наибольшую площадь он будет иметь тогда, когда эти стороны составляют прямой угол».

В окружающем мире многое происходило и происходит по экстремальным законам. Согласно Евклиду, даже ослик, ничего не ведающий о математике, бежит к сену кратчайшим путём. Возможно, поэтому экстремальным задачам уделяли большое внимание выдающиеся ученые – математики разных эпох: Архимед, Герон, Птолемей, Кеплер, Ферма, Торричелли, Лейбниц, Штейнер, Эйлер и многие другие.

К сожалению, в школьном курсе геометрии по разным причинам не уделяется должного внимания геометрическим задачам на экстремум. В лучшем случае, такие задачи появляются после того, как в старших классах школьники знакомятся с производной. Поэтому всё сводится к решению задач «с геометрическим содержанием» стандартными методами.

В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования по математике учащиеся 7-9 класса должны: «свободно оперировать понятиями: наибольшее и наименьшее значения; по графику находить промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения функции <…> В повседневной жизни и при изучении других предметов: использовать графики реальных процессов и зависимостей для определения их свойств (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания)»

Экстремальные задачи играют существенную роль во многих разделах современной математики и ее приложений. Великий русский математик Чебышев П. Л. о таких задачах писал, что «практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных метод. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?». Чебышев П. Л. добавляет: «Решение задач этого рода составляет предмет так называемой теории наибольших и наименьших величин. Эти задачи, чисто практического характера, имеют особенную важность и для теории: все законы, определяющие движение материи весомой и невесомой, представляют решение задач этого рода. Нельзя не заметить особенно благотворного влияния их на развитие наук математических».

Проблемам обучения решению задач на экстремум в школьном курсе математики посвящены исследования Мордковича А. Г., Кудрявцева Л. Д., Колмогорова А. Н., Смирнова В. А., Смирновой И. М. и др.

Цель работы – теоретически описать и практически разработать серию геометрических задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения для учащихся 7-9 классов.

Задачи работы:

1) рассмотреть математическое содержание темы «Экстремум функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции»;

2) описать основные задачные конструкции;

3) разработать серию геометрических задач на экстремум;

4) сформулировать методические рекомендации по использованию задач разработанной серии.

Методы исследования: анализ математической и учебно-методической литературы; изучение нормативных документов; разработка методических материалов.

Структура работы: титульный лист, введение, два раздела («Серия «Геометрические задачи на экстремум» для школьников»: теоретические аспекты»; «Серия «Геометрические задачи на экстремум» для школьников»: практические аспекты»); заключение; список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Серия «Геометрические задачи на экстремум» для школьников»: теоретические аспекты» посвящен решению первой и второй задач бакалаврской работы. Рассмотрено математическое содержание темы «Экстремумы функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции», а именно: определение возрастания и убывания функции в точке и на множестве; критерий возрастания (убывания) функции; определение локального минимума (локального максимума) функции; необходимое условие экстремума; первое достаточное условие экстремума; второе достаточное условие экстремума; нахождение наибольшего и наименьшего значений функции; алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют возрастающей (убывающей) на множестве $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$ $(x_1 < x_2)$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2))$.

Теорема 1. (Критерий возрастания (убывания) функции). Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая на интервале (a, b) функция. Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на (a,b) тогда и только тогда, когда её производная неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$ (неположительна, т.е. $f'(x) \leq 0$) на этом промежутке.

Определение 2. Точку $x = x_0$ называют точкой локального минимума (локального максимума) функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x = x_0$) выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием локальный экстремум (или просто экстремум).

Теорема 2. (Необходимое условие экстремума). Пусть x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0. Тогда либо производная $f'(x)$ не существует, либо $f'(x) = 0$.

Для удобства условимся внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называть стационарными, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, – критическими.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений функции $y = f(x)$ *непрерывной на отрезке* $[a;b]$.

1. Найти производную $f\,'(x)$.

2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a;b]$.

3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{\text{наим}}$) и наибольшее (это будет $y_{\text{наиб}}$).

Для формирования математических знаний и умений применяются разнообразные задачные конструкции. Задачными конструкциями занимались профессор Зайкин М. И., ученые и методисты Абрамова О. М., Гарвиш М. К., Гарминович Н. А., Лебедева С. В. и др., а так же студенты дипломники Байкина Е. П., Дорофеева Е. П., Михеев С. А.

Изучению задачных конструкций посвящены многочисленные работы Зайкина М. И.. Зайкин М. И. под *задачными конструкциями* понимает некоторую совокупность задач удовлетворяющую определенным требованиям.

Существуют различные разновидности задачных конструкций, а именно: системы, циклы, вариации, обращения задачи, цепочки и серии.

Серия математических задач – упорядоченная совокупность задач, формулировки которых имеют схожесть текстового, сюжетного, графического представления либо математическую идентичность заданных в условии отношений.

Во втором разделе «Серия «Геометрических задач на экстремум» для школьников: практические аспекты» решалась третья и четвертая задачи бакалаврской работы.

В ходе анализа содержания школьного учебника «Геометрия. 7-9 класс» (Атанасян Л. С. и др.) на наличие задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений установлено, что таких задач очень мало в школьном курсе геометрии 8-9 класса. И возникает необходимость расширить число таких задач, объединенных общим серийным признаком.

Нами разработаны серии геометрических задач на экстремум для 7 и 8-9 классов. В качестве примера представим несколько задач каждой из серий.

Серия «Геометрические задачи на экстремум» для 7 класса:

Задача 1. Даны: прямая b и точка A, не принадлежащая этой прямой. На прямой b найдите такую точку B, расстояние до которой от точки A наименьшее.

Задача 2. Даны: прямая b и точка A, не принадлежащая этой прямой. Докажите, что прямой b не существует точки C, расстояние до которой от точки A наибольшее.

Задача 3. Точка A расположена вне окружности с центром в точке O. На этой окружности найдите точку, расстояние до которой от точки A: а) наименьшее; б) наибольшее

Задача 4. Прямая b не имеет общих точек с окружностью с центром в точке O. На этой окружности найдите точку, расстояние от которой до прямой b: а) наименьшее; б) наибольшее.

Задача 5. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 не имеют общих точек и находятся вне друг друга. Найдите точки на этих окружностях, расстояние между которыми: а) наименьшее; б) наибольшее.

Задача 7. (Задача Герона) Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по одну сторону. На этой прямой найдите такую точку C, для которой сумма расстояний AC + CB наименьшая.

Задача 13. Даны прямая с и две точки А и В, расположенные от неё по разные стороны. На этой прямой найдите такую точку С, для которой разность расстояний *AC* – *CB* наибольшая.

Задача 17 (Задача Фаньяно). Дан остроугольный треугольник АВС. На его сторонах ВС, АС, АВ найдите точки A_1, B_1, C_1 соответственно для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший.

Задача 21. Три соседа по садовым участкам, домики которых расположены в вершинах правильного треугольника, решили вырыть общий колодец и проложить от него дорожки к своим домикам. Укажите расположение колодца, при котором сумма расстояний от него до домиков наименьшая.

Задача 22. а) Какого наименьшего периметра может быть прямоугольная детская площадка площади 100 м^2?

б) Какого наибольшего периметра может быть прямоугольная детская площадка площади 100 м^2?

Задача 23. Земля и Марс обращаются вокруг Солнца по круговым (почти) орбитам радиусов 150 и 228 миллионов километров. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния между Землей и Марсом.

Серия «Геометрические задачи на экстремум» для 8-9 классов:

Задача 27. Через точку, лежащую внутри данного угла, провести прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади.

Задача 28. Дан острый угол и точка А внутри него. Построить ΔАВС минимального периметра, вершины В и С которого лежат на сторонах данного угла.

Задача 29. Впишите в данный острый угол треугольник наименьшего периметра так, чтобы две его вершины были на сторонах угла, а третья – в данной точке внутренней области угла.

Задача 36. Дан угол *AOB* и внутри него точки *M* и *K*. Соедините эти точки ломаной линией наименьшей длины так, чтобы две ее вершины лежали на сторонах угла *AOB*.

Задача 38. Какое наибольшее число острых углов может быть в выпуклом многоугольнике?

Задача 46. Дан куб $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$. Провести через его диагональ B_1D сечение, которое имеет наименьшую площадь.

Задача 47. Имеется изгородь длиной в 200 метров. Требуется огородить этой изгородью участок земли в виде прямоугольника наибольшей площади. Найти отношение сторон этого прямоугольника и его площадь.

Задача 50. Две деревни А и В находятся по одну сторону от шоссе а. Где на шоссе а надо расположить остановку автобуса К, чтобы сумма расстояний АК + КВ была наименьшей?

Задача 52. Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

Задача 54. Какое наименьшее количество дуг нужно заказать, чтобы расстояние между соседними дугами было не более 60 см?

Использование задач на экстремум с одной стороны, имеют большое значение как для математики, так и для её приложений, а с другой стороны, развивает геометрические представления учащихся, формирует необходимые умения и навыки решения экстремальных задач, может служить пропедевтикой изучения соответствующих разделов курса алгебры и начал математического анализа.

В работе сформулированы рекомендации по возможному использованию задач разработанной нами серии по ряду тем курса «Геометрии, 7» и «Геометрия, 9». В качестве примера рассмотрим четыре темы.

Тема «Изучение теоремы о перпендикуляре и наклонной».

Прежде чем вводить теорему о том, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, короче любой наклонной, проведенной из этой точки к данной прямой можно учащимся предложить задачи 1 и 2 нашей серии.

Задача 1. Даны: прямая b и точка A, не принадлежащая этой прямой. На прямой b найдите такую точку B, расстояние до которой от точки A наименьшее.

Задача 2. Даны: прямая b и точка A, не принадлежащая этой прямой. Докажите, что прямой b не существует точки C, расстояние до которой от точки A наибольшее.

После того, как учащиеся решат эти две задачи, они смогут самостоятельно прийти к формулировке теоремы о перпендикуляре и наклонной.

Тема «Задача Герона».

Прежде чем решать задачу 7 (задача Герона) серии, учащимся можно предложить более простую задачу 6, подводящую к решению задачи Герона.

Задача 6. Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по разные стороны. На этой прямой найдите такую точку C, для которой сумма расстояний AC + CB наименьшая.

Далее, учашиеся могут решать задачу Герона.

Задача 7. (Задача Герона) Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по одну сторону. На этой прямой найдите такую точку C, для которой сумма расстояний AC + CB наименьшая.

После того, как учащиеся самостоятельно или с помощью учителя решили задачу Герона, необходимо (например, в ходе беседы) выявить идею решения этой задачи и записать её (в виде плана, алгоритма и т.п.). Закрепление полученного плана осуществляется на этом же уроке в ходе решения задач 8, 9.

Задача 8. Дан угол и точка C внутри него. Найти A и B на сторонах угла так, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

Задача 9. Дан угол и две точки C и D внутри него. Найти точки A и B на сторонах угла так, чтобы сумма длин |CA| + |AB| + |BD| была наименьшей.

Задачу Герона можно переформулировать, как задачу с практическим содержанием и дать её учащимся в качестве домашнего задания.

Задача об автобусной остановке. Два населенных пункта *A* и *B* расположены по одну сторону от прямолинейного участка шоссе *c*. Требуется построить автобусную остановку и продолжить от неё прямолинейные дорожки до населенных пунктов так, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей.

Тема «Параллельный перенос»

Задача Герона может быть использована при рассмотрении задачи 48 в 9 классе, при решении которой используются свойства параллельного переноса.

Задача 48. Где следует построить мост через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы дорога между ними была кратчайшей?

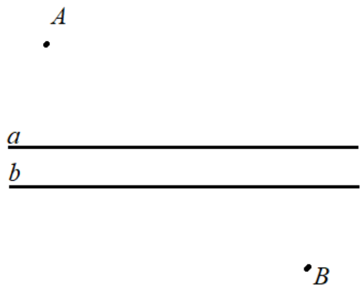

Рисунок 1

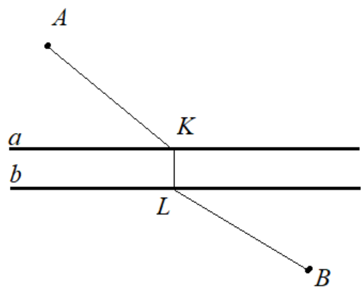

Рисунок 2

Замечание. Берега реки считаются параллельными, а мост перпендикулярен берегам реки.

Решение. Условие задачи отражено на рисунке 1, где параллельные прямые a и b – берега реки. Предположим, что задача решена, и отрезок KL перпендикулярный прямым a и b, – мост (в соответствии с рисунком 2). Тогда расстояние между точками A и B равно AK + KL + LB. Эта сумма не зависит от длины отрезка KL, так как длина отрезка KL – это расстояние между параллельными прямыми a и b и является постоянной величиной. Поэтому необходимо найти такое положение точки K, чтобы сумма AK + LB была наименьшей.

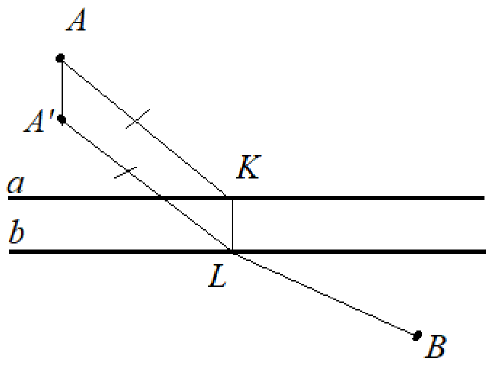

Рисунок 3

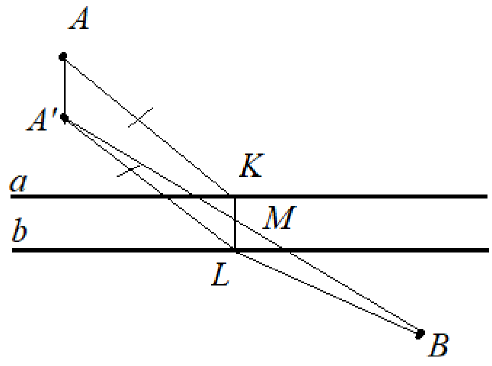

Рисунок 4

Совершим параллельный перенос отрезка AK на вектор, при этом точка A перейдет в точку A′, а точка K в точку L. A′L = AK по свойству параллельного переноса (в соответствии с рисунком 3). Сумма A′L + LB, равная сумме AK + LB, будет наименьшей тогда, когда эти отрезки лежат на одной прямой. Соединим точки A′ и B. Отрезок A′B пересекает прямую b в точке M (в соответствии с рисунком 4). Проведем обратное преобразование – параллельный перенос отрезка A′M на вектор, при этом точка A′ перейдет в точку A, а точка M в точку K′ (в соответствии с рисунком 5). Результат решения представлен на (в соответствии с рисунком 6).

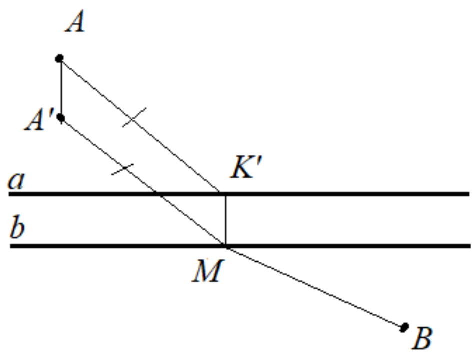

Рисунок 5

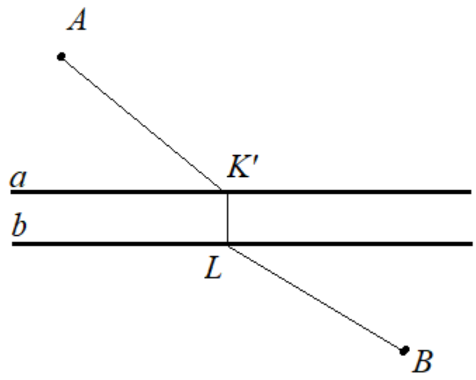

Рисунок 6

Тема «Осевая симметрия»

Задача 49 серии на нахождение кратчайшего расстояния более сложная, при ее решении кроме непосредственного применения осевой симметрии требуются знания свойств серединного перпендикуляра или свойств равнобедренного треугольника.

Задача 49. Две деревни А и В находятся по одну сторону от шоссе а. Где на шоссе а надо расположить остановку автобуса К, чтобы расстояния от каждой из деревень до остановки были равными?

Замечание. Шоссе считается прямой линией.

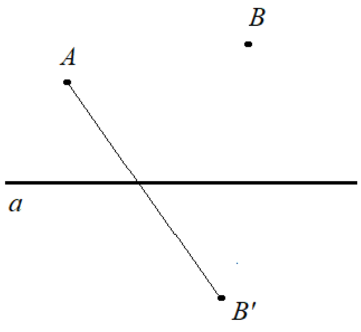

Рисунок 7

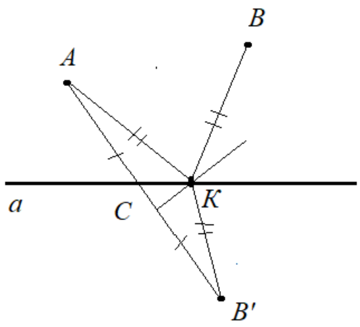

Рисунок 8

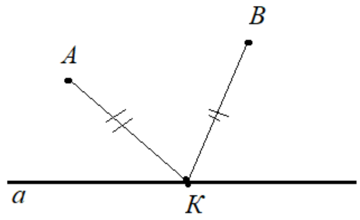

Рисунок 9

Решение. Построим точку B′, симметричную точке B относительно прямой a, и соединим точки A и B′ (в соответствии с рисунком 7). Построим серединный перпендикуляр CK к отрезку AB′, который пересекает прямую a в точке K, и соединим точку K с точками A и B′ (в соответствии с рисунком 8). По свойству серединного перпендикуляра AK = KB′, а по свойству осевой симметрии KB′ = BK, следовательно, AK = BK. Результат решения представлен на (в соответствии с рисунком 9).

Заключение. Основные выводы по бакалаврской работе.

1. Рассмотрено математическое содержание темы «Экстремум функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции».

2. Описаны основные задачные конструкции: система, цикл, вариация математических задач, обращение математической задачи, цепочка, серия.

3. Разработана серия геометрических задач на экстремум для учащихся 7-9 классов.

4. Сформулированы методические рекомендации по использованию задач разработанной серии на уроках геометрии в 7-9 классах.