

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКА
ПЛАТЕЖЕЙ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Ивановой Алены Владиславовны

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н., доцент

Е. В. Гудошникова

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2023

Введение. Современный мир характеризуется высокой динамичностью и развитием, и экономические и финансовые категории играют в нем важнейшую роль. Среди них особое значение имеет поток платежей – все последовательные финансовые операции, в которых участвуют предприятия, организации, государственные и муниципальные учреждения, а также физические лица. Изучение этой категории является крайне важным, поскольку финансы и платежный процесс имеют ключевое значение для любой организации или даже для частного лица.

Тема исследования, связанная с потоками платежей, имеет высокую **актуальность**, так как денежные средства являются важным ресурсом и результатом деятельности предприятий. Финансовые контракты часто предусматривают серию платежей на протяжении длительного периода времени, что делает потоки платежей неотъемлемой частью финансовых операций. Контроль за потоками платежей играет важную роль в управлении экономическими субъектами, обеспечивая их финансовую стойкость и платежеспособность.

Цель данной бакалаврской работы заключается в изучении основных характеристик потоков платежей и оптимизации процесса расчета для изученных характеристик.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- изучить теоретические основы финансовых характеристик потока платежей;
- рассмотреть методические основы финансовых характеристик потока платежей;
- выполнить программную реализацию расчета стоимости потока платежей, использованием языка программирования *Python*.

Непосредственным **предметом исследования** является поток платежей и его характеристики.

Практическая значимость данной работы заключается в оптимизации расчетов характеристик потоков платежей, что может быть полезным для финансовых аналитиков, инвесторов и других профессионалов, работающих в области финансов.

Структура работы включает введение, три раздела, заключение и список использованных источников.

В первом разделе рассмотрены понятия дискретного и непрерывного потоков платежей, множители дисконтирования и наращенная стоимость, стоимость и доходность потока платежей, модель оценки финансовых активов методом дисконтирования, а также понятие чистого и непрерывного потоков платежей.

Во втором разделе предложено использовать методы интервальной математики для анализа потоков платежей. Были выведены формулы для расчета современной стоимости потока и наращенной суммы годовой ренты с несколькими начислениями процентов в год.

В третьем разделе был продемонстрирован расчет стоимости потока платежей с помощью языка программирования *Python*. Это дает возможность более точного и быстрого расчета характеристик потоков платежей и может быть использовано в профессиональной деятельности.

В заключении были подведены итоги всей работы и сделаны выводы по теме исследования.

Основное содержание работы. В первом разделе работы «Теоретические основы потока платежей» даются понятия потока платежей, а также чистого потока платежей. Показаны расчеты наращенной и современной стоимости потока платежей.

Поток платежей – это распределенная во времени последовательность платежей.

Денежные потоки разделяются на:

- регулярные;
- нерегулярные.

Регулярные потоки платежей (финансовая рента, рента, аннуитет) – это платежи, у которых все выплаты направлены в одну сторону, а временные интервалы между платежами одинаковы.

Нерегулярные потоки платежей – это платежи, у которых платежи направлены в разные стороны: поступления и выплаты. Интервалы между платежами не обязательно равны друг другу.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

ми:

1. R_t – член ренты, величина платежа $t = \overline{1, n}$;
2. n – срок ренты, время от начала первого периода до конца последнего;
3. Δt – период ренты, временной интервал между двумя последовательными платежами;
4. i – процентная ставка;
5. p – число платежей в году (дополнительный параметр);
6. m – количество начислений процентов в году (доп. параметр).

Обобщающими характеристиками потока платежей является наращенная и современная стоимость.

Современная стоимость потока платежей PV (present value) – это сумма всех выплат, дисконтированных на начало срока потока по сложной процентной ставке.

Современная стоимость потока платежей вычисляется:

$$PV = \frac{R_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{R_2}{(1+i)^{t_2}} + \dots + \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} + \dots + \frac{R_n}{(1+i)^{t_n}}.$$

В краткой записи:

$$PV = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}},$$

где R_k – ряд платежей, выплачиваемых в моменты времени t_k , $k = \overline{1, n}$; n – количество выплат; t_n – общий срок выплат. Проценты начисляются по сложной процентной ставке i один раз в году, выплаты производятся в конце года.

Дисконтирование – это операция определения величины денег, которые будут получены в будущем на более ранний момент времени.

Дисконтный множитель (коэффициент дисконтирования) DF (discount factor) показывает, какую долю составляет первоначальная величина в конечной сумме. **Дисконтный множитель** – величина, обратная множителю наращения. Дисконтный множитель всегда меньше единицы $DF < 1$.

Наращенная сумма (будущая стоимость) потока платежей FV (future value) – это сумма всех выплат с начисленными на них к концу срока сложными процентами.

Наращенная сумма потока платежей запишется:

$$FV = R_1(1+i)^{t_n-t_1} + R_2(1+i)^{t_n-t_2} + \dots + R_k(1+i)^{t_n-t_k} + \dots + R_n.$$

В краткой записи:

$$FV = \sum_{k=1}^n R_k(1+i)^{t_n-t_k},$$

где где R_k – ряд платежей, выплачиваемых в моменты времени t_k , $k = \overline{1, n}$; n – количество выплат; t_n – общий срок выплат. Проценты начисляются по сложной процентной ставке i один раз в году, выплаты производятся в конце года.

Множителем наращенной суммы называется число, показывающее, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной величины.

Стоимость потока платежей $P(t)$ в момент $t \in [0, n]$ – это сумма всех членов потока, приведенных к моменту времени t .

Согласно определению, стоимость потока в момент t есть:

$$P(t) = \sum_{k=1}^n R_k(1+i)^{t_n-t_k} + \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}.$$

Здесь $(1+i)^{t_n-t_k}$ – множитель наращенной суммы k -го платежа на временном отрезке $[t_k, t]$ ($t > t_k$, где $k = 1, 2, \dots, m$) по процентной ставке потока, $\frac{1}{(1+i)^{t_k}}$ – дисконтный множитель k -го платежа на отрезке $[t, t_k]$ ($t < t_k$, $k = m + 1, \dots, n$) по процентной ставке потока.

Поток платежей имеет доходность.

Доходность потока платежей за единицу времени – это ставка сложных процентов r , по которой современная стоимость потока платежей равна P :

$$P = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}}.$$

Если сроки поступления платежей t_1, t_2, \dots, t_n измеряются в годах, то r – годовая доходность. Доходность потока платежей – это не процентная ставка

потока, r зависит только от величины и моментов самих платежей. Поэтому ее называют внутренней доходностью потока платежей.

Базовая модель оценки финансовых активов. Метод дисконтированных денежных потоков.

Финансовый актив (инструмент, ценная бумага) — это документ, который обеспечивает право на будущий доход при выполнении определенных условий.

Проблема заключается в том, насколько точно удастся сделать прогноз денежных потоков финансового актива. Такой подход известен как **фундаментальный анализ**.

Стоимость финансового актива может быть оценена по формуле:

$$PV = \frac{CF_1}{(1+r_1)^1} + \frac{CF_2}{(1+r_2)^2} + \dots + \frac{CF_n}{(1+r_n)^n} = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r_t)^t},$$

где CF_t — ожидаемые денежные поступления в период t , r — ставка дисконтирования в период t , n — число периодов, в течение которых ожидается поступление денежных потоков.

Для инвестора наиболее существенным является ставка дисконтирования. Ставка дисконтирования (приемлемая норма прибыли) характеризует доходность альтернативных вариантов инвестиций, доступных данному инвестору. Поэтому ставки дисконтирования будут отличаться у разных инвесторов.

Определения основных характеристик потока платежей справедливы не только для дискретных, но и для **непрерывных потоков платежей**.

Предположим, что в течение времени $[0, n]$ непрерывно выплачиваются деньги с интенсивностью выплат в единицу времени $f(t)$ в момент t . Тогда современная стоимость и наращенная сумма такого потока платежей определяются по формулам:

$$PV = \int_0^n f(t) \frac{1}{(1+i)^t} dt,$$

и

$$FV = \int_0^n f(t)(1+i)^{t_n-t} dt,$$

где $\frac{1}{(1+i)^t}$ – дисконтный множитель на отрезке $[0, t]$, $(1+i)^{t_n-t}$ – множитель наращения на отрезке $[t, n]$.

До сих пор предполагалось, что все платежи, дискретные непрерывные, положительны. Если имеется серия поступающих платежей a_1, a_2, \dots, a_n в моменты t_1, t_2, \dots, t_n и серия расходов b_1, b_2, \dots, b_n в те же моменты времени, то член потока R_k можно представить в виде разности $R_k = a_k - b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, так как положительный платеж соответствует поступлению денег, отрицательный – их расходу (в большинстве случаев только одна из сумм a_k и b_k будет ненулевой). Тогда R_1, R_2, \dots, R_n – это **чистый денежный поток**.

Этот поток охватывает два встречных потока – расходов и поступлений. Доходность за единицу времени такого потока определяется как ставка сложных процентов r , по которой современная стоимость потока расходов равна современной стоимости потока доходов:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(1+r)^{t_k}} = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{(1+r)^{t_k}}.$$

Это уравнение можно переписать в виде:

$$\sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} = 0.$$

Это выражение называется уравнением доходности денежного потока.

Во втором разделе работы «Применение обобщенной интервальной арифметики в анализе потоков платежей» для анализа потоков платежей предлагается использовать методы интервальной математики. Выведены формулы для расчета наращенной суммы и современной величины годовой ренты с несколькими начислениями процентов в год.

Для анализа и расчета характеристик потока платежей необходимо точное задание всех параметров потока – размеров платежей, процентной ставки и т.д. При решении многих практических задач, как правило, эти параметры

точно неизвестны, но всегда можно с достаточной степенью достоверности задать интервалы, в которых они лежат. Если такой случай возникает, то методы интервального анализа могут предоставить необходимый математический инструмент для количественного анализа потоков платежей. Применение интервального анализа позволяет включить решение в интервал для задач, где известно, что входные данные лежат только в определенном интервале. Ошибки округления также включаются в интервал решений.

С помощью обобщенной интервальной арифметики получили формулы для расчета основных обобщающих характеристик интервальных потоков платежей. Нарощенная сумма годовой ренты с начислениями процентов m раз в год лежит в интервале:

$$S = [\underline{R}, \overline{R}] \cdot [\underline{M}, \overline{M}],$$

где,

$$\underline{M} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}; \quad \overline{M} = \frac{\left(1 + \frac{\bar{j}}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{\bar{j}}{m}\right)^m - 1}.$$

Современная величина годовой ренты с начислениями процентов m раз в год лежит в интервале:

$$P = [\underline{R}, \overline{R}] \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{\bar{j}}{m}\right)^{-nm}}{\left(1 + \frac{\bar{j}}{m}\right)^m - 1}, \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} \right].$$

Таким образом, формулы обобщенной интервальной арифметики позволяют получать более точные результаты при анализе потока платежей, учитывая возможные неопределенности и изменения параметров. Это особенно важно при принятии финансовых решений, так как позволяет оценить риски и принять взвешенное решение, учитывающее возможные изменения в будущем.

В третьем разделе работы «Практическая часть» продемонстрирован расчет стоимости потока платежей, с помощью языка программирования

Python.

Продемонстрируем работу программы на примере:

График на рисунке 1 предусматривает следующий порядок инвестиций в проект в течение года: 1 марта 200 000 руб., 1 апреля 180 000 руб., 1 июня 500 000 руб., 1 октября 100 000 руб. В следующем году 50 000 руб. 1 июня. Определить стоимость проекта на 1 февраля текущего года и сумму, которая накопилась бы через 2 года, если эти деньги вложить на депозит, банковская ставка 8% годовых.

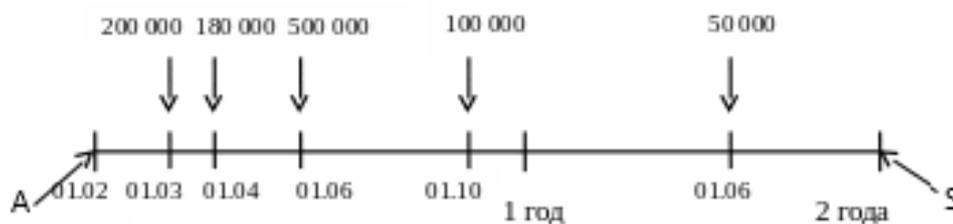


Рисунок 1 – График порядка инвестиций

Программная реализация вычислений на языке программирования *Python* продемонстрирована в Приложении А.

В самом начале выводится 3 сообщения с помощью функции `print()`: «Введите число выплат», «Введите ставку», «Введите общий срок выплат». После каждой из этих строк происходит запрос у пользователя ввода целочисленного значения числа выплат и вещественных значений ставки и общего срока, всё это реализовано при помощи инструкций `int(input())` и `float(input())` – преобразование строкового типа, в котором сохраняет в памяти команда `input()` введённые данные, в целочисленный тип `int` и вещественный `float` соответственно.

Затем в соответствии с заданной пользователем размерностью n им же вводится массивы выплат R и моментов времени выплат t . Также внутри цикла для массива t рассчитываются формулы для слагаемых современной стоимости потока платежей PV и наращенной суммы FV . Затем выводятся элементы каждого из массивов, а в качестве значения рассчитанных формул выводятся обе суммы по обоим массивам чисел.

Входные данные и результат программы представлены на рисунке 2:

```

Введите число выплат
5
Введите ставку
0.08
Введите общий срок выплат
1.967
Введите элемент массива 1 200000
Введите элемент массива 2 180000
Введите элемент массива 3 500000
Введите элемент массива 4 100000
Введите элемент массива 5 50000

200000 180000 500000 100000 50000 [200000, 180000, 500000, 100000, 50000]
Введите элемент массива 1 0.083
Введите элемент массива 2 0.167
Введите элемент массива 3 0.333
Введите элемент массива 4 0.667
Введите элемент массива 5 1.333
[231206.66588115718, 206745.1189033694, 567001.7780642533, 110522.54634490881, 52500.16463557899]
1167976.2738292678
[198726.51839885305, 177701.35440966065, 487348.79183191946, 94996.22667016544, 45124.88813258513]
1003897.7794431837

```

Рисунок 2 – Результат программы

Продемонстрируем работу программы для расчета стоимости платежа на примере:

Кредит 100000 руб. выдан 21.05.2022 года под 5% годовых на 5 лет Проценты начисляются 1 раз в год на имеющийся на этот момент долг и прибавляются к сумме долга. Найти стоимость платежа на 15.05.2024 года.

Программная реализация вычислений на языке программирования *Python* продемонстрирована в Приложении Б.

Данный код представляет собой программу для расчета стоимости кредита на указанную дату. Он запрашивает у пользователя несколько входных параметров, таких как размер кредита, годовую процентную ставку, количество лет и даты выдачи кредита.

Код включает в себя проверки на отрицательные значения и правильный формат ввода для размера кредита, годовой процентной ставки и количества лет. Также добавлена проверка на правильность введенной даты - дата расчета не может быть раньше даты выдачи кредита. Если пользователь вводит неверный формат данных, программа сообщает об ошибке и просит повторить ввод.

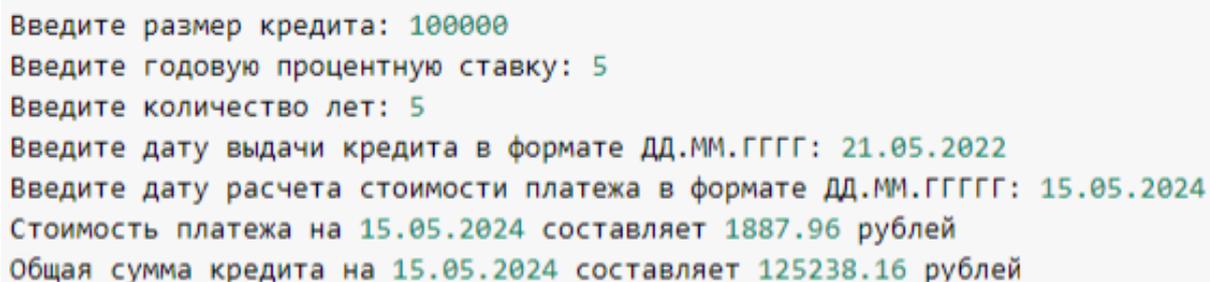
Кроме того, код содержит проверку на нулевую процентную ставку, чтобы избежать ошибки деления на ноль при расчете стоимости платежа.

Далее программа использует модуль *datetime* для расчета количества месяцев между датами выдачи кредита и расчета стоимости платежа.

Затем программа рассчитывает стоимость платежа по кредиту, используя формулу аннуитетного платежа.

И, наконец, программа рассчитывает общую сумму кредита на указанную дату, добавляя к остатку задолженности за вычетом всех платежей новый платеж с процентами.

В результате программа выводит на экран стоимость платежа на указанную дату и общую сумму кредита на эту дату. Входные данные и вывод программы представлены на рисунке 3:



```
Введите размер кредита: 100000
Введите годовую процентную ставку: 5
Введите количество лет: 5
Введите дату выдачи кредита в формате ДД.ММ.ГГГГ: 21.05.2022
Введите дату расчета стоимости платежа в формате ДД.ММ.ГГГГГ: 15.05.2024
Стоимость платежа на 15.05.2024 составляет 1887.96 рублей
Общая сумма кредита на 15.05.2024 составляет 125238.16 рублей
```

Рисунок 3 – Результат программы

Заключение. Из приведенного выше можно сделать ряд выводов.

В любом вопросе финансовой математики присутствует поток платежей, который может быть дискретным или непрерывным. Нарощенная сумма потока платежей – это сумма всех платежей, начисленных с процентами к концу срока ренты. Современная стоимость потока платежей – это сумма всех его платежей, приведенных к начальному моменту времени или к моменту, предшествующему началу потока.

Управление потоками платежей направлено на обеспечение финансового равновесия в процессе развития организации путем сбалансированности величины притоков и оттоков денежных средств во времени и увеличения свободного денежного потока организации. Потоки платежей играют важную роль в корпоративном финансовом управлении, кредитных операциях, оценке имущества и бизнеса, а также выборе альтернативных видов финансовых операций.

Даже самая простая финансовая операция, такая как кредит, включает в себя два платежа: выдачу кредита и его погашение. Эти два платежа составляют поток платежей. Поток платежей представляет собой серию де-

нежных потоков, каждый из которых относится к определенному моменту времени (дате).

Для количественного анализа потоков платежей можно использовать методы интервального анализа, а также обобщенную интервальную арифметику для расчета обобщенных характеристик интервальных потоков платежей. Основной целью управления потоками платежей является обеспечение финансового равновесия и увеличения свободного денежного потока организации.