

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математической физики и вычислительной
математики

Частичные суммы тригонометрических рядов Фурье

в задачах приближения и восстановления функции

АВТОРЕФЕРАТ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная информатика

механико-математического факультета

Тихонова Константина Сергеевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор

Г.В. Хромова

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

В.А. Юрко

Саратов 2023

Введение. Теория приближения функций является важной областью современной математики, направленной на изучение методов приближения непрерывных функций гладкими или полиномиальными функциями. В данном исследовании будет рассмотрен один из наиболее эффективных методов приближения функций - разложение в ряд Фурье, представляющее функцию в виде бесконечной суммы гармонических функций. Частичные суммы рядов Фурье будут использованы для приближения функций.

В данной работе будет рассмотрен метод сглаживания функции с помощью частичных сумм рядов Фурье. Будет построен интегральный оператор. Также будет проанализирована сходимость приближений с помощью интегрального оператора. Так же будет рассмотрена задача восстановления функции $f(x)$ на основе предоставленной функции $f_\delta(x)$, где δ представляет собой погрешность в значениях. Будет рассматриваться непрерывная функция на интервале от $-\pi$ до π , при условии, что значение функции в начальной и конечной точках интервала совпадает. Будет проведён математический эксперимент на модельной задаче

Основное содержание работы. Основное содержание работы состоит из трёх глав. В первой главе рассматривается задача приближения функции $f(x)$ с помощью частичной суммы ряда Фурье. Рассматривается построение метода приближения с помощью частичной сумм Фурье интегральном виде S_n

Приближение периодических функций. Рассмотрим сумму ряда Фурье.

$$S_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Где $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos kx dx$, а $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin kx dx$

Подставим a_k и b_k в сумму.

$$S_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos kt \cos kx dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin kt \sin kx dt \right)$$

Вынесем интеграл и $\frac{1}{\pi}$ за знак суммы:

$$S_n f = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n ((\tilde{f}(x) \cos kt \cos kx + \tilde{f}(x) \sin kt \sin kx) dt)$$

$$S_n f = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n \tilde{f}(x) (\cos(kt - kx)) dt$$

Мы можем представить a_0 в виде:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

И так же внести под знак интеграла. По итогу получим:

$$S_n f = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x) \right) f(t) dt$$

Ядром интегрирования $K_n(x; t)$ будет:

$$K_n(x; t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x) \right)$$

Теорема 1. Пусть f — 2π -периодическая непрерывная и кусочно-непрерывно дифференцируемая функция. Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на \mathbb{R} и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(x; f) - f(x)| \leq C \frac{\ln n}{n} \text{ при } n \geq 2$$

где C не зависит от n .

Во второй главе рассматривается случай когда $f(x)$ задана с погрешностью и описывается метод регуляризации, даётся теоретическое обоснование, указывается способ выбора параметра регуляризации, моделирование функции со скачком.

Построение метода регуляризации восстановления непрерывных функций

Теорема 2. Задача восстановления элемента $f \in X_i$ по его δ -приближению в пространстве X_2 корректна тогда и только тогда, когда нормы в пространствах X_1 и X_2 эквивалентны.

Откуда получим оценку:

$$\|T_h f_\delta - f\|_{x_1} \leq \|T_h\|_{x_2 \rightarrow x_1} \delta + \|T_h f - f\|_{x_1}$$

Данную оценку можно использовать и для изучения других операторов [4]. Рассмотрим оценку оператора $\|S_n f_\delta - f\|$.

$$\|S_n f_\delta - f\| \leq \|S_n\| \delta + \|S_n f - f\| \quad (1)$$

В конечном итоге получим следующее:

$$\|S_n f_\delta - f\| \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}} \delta + \frac{\ln n}{n}$$

Моделирование функции f_δ . Требуется построить $f_\delta(x)$ такую, что Требуется построить $f_\delta(x)$ такую, что

$$\sqrt{\int_a^b (f_\delta(x) - f(x))^2 dx} \leq \delta \quad (2)$$

Запишем конечномерный аналог этой задачи.

Заменяем отрезок $[a, b]$ на набор узлов $a = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\} = b$, функции на значения их в этих узлах, интервал на квадратурную формулу. Возьмём для примера формулу левых прямоугольников:

$$\int_a^b F(x) dx = h \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i), \quad h = \frac{b-a}{m}$$

Тогда вместо (2) будем иметь:

$$\sqrt{\sum_0^{n-1} h [f_\delta(x_i) - f(x_i)]^2} \leq \delta$$

или:

$$\sum_0^{n-1} [f_\delta(x_i) - f(x_i)]^2 \leq \frac{\delta^2}{h}$$

Рассмотрим такой вариант. Пусть для $x = x_0, x_3, x_4, \dots, x_m$ $f_\delta(x_i) = f(x_i)$, а для $x = x_1, x = x_2$:

$$\begin{aligned} f_\delta(x_1) &= f(x_1) + N \\ f_\delta(x_2) &= f(x_2) - N \end{aligned}$$

где N - скачок. Отсюда получим:

$$\sum_0^{n-1} [f_\delta(x_i) - f(x_i)]^2 = 2N^2$$

Выберем N из условия

$$2N^2 = \frac{\delta^2}{h}$$

Откуда получим скачок:

$$N = \frac{\delta}{\sqrt{2h}} \quad (3)$$

Для такой $f_\delta(x)$ решим задачу восстановления. Однако стоит отметить что при низкой δ , скачок будет так же мал, если не будет крайне большого числа точек, что в дальнейшем может отразиться на времени решения. По этому в качестве эксперимента возьмём функцию, так же зависящую от m , но уже не зависящую от δ .

В третьей главе будет проведён численный эксперимент для задач приближения и восстановления с различными значениями N .

Проведение численного эксперимента Рассмотрим задачу приближения функции $f(x)$. В задаче мы будем рассматривать функцию непрерывную на участке от $-\pi$ до π , такую что $f(-\pi) = f(\pi)$. В качестве примера возьмём

функцию:

$$f(x) = x^2 - \pi^2$$

Рассмотрим алгоритм приближения:

1. Выделим точки, в которых будем рассматривать значения функций
Пусть x_i , где $i = \overline{0, m}$.
2. Далее в каждой точке x_i мы будем рассматривать интеграл
$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x_i, t) f(t) dt.$$
3. Рассчитаем значения в каждой точке, используя квадратурные формулы.
4. Полученные данные визуализируем с помощью python и библиотеки matplotlib.

Для начала рассмотрим составную формулу Симпсона:

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x_i, t) f(t) dt \approx \frac{h}{3} \left[K_n(x_i, x_0) f(x_0) + \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} K_n(x_i, x_{2j}) f(x_{2j}) + \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}} K_n(x_i, x_{2j-1}) f(x_{2j-1}) + K_n(x_i, x_m) f(x_m) \right] \quad (4)$$

Рассмотрим применение формулы трапеций:

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x_i, t) f(t) dt \approx h \left(\frac{K_n(x_i, x_0) f(x_0) + K_n(x_i, x_j) f(x_j)}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} K_n(x_i, x_j) f(x_j) \right) \quad (5)$$

В первую очередь рассмотрим результаты задачи приближения. Рассмотрим два случая. Как уже было упомянуто выше, чем больше слагаемых в частичной сумме тем лучше сойдётся приближение. Рассмотрим 2 случая. В одном случае используем только 2 слагаемых, во втором будем рассматривать 30 слагаемых. На рисунке 1 представлен график, приближения функции f . В качестве квадратурной формулы использовался метод трапеций: Голубым на графике представлена исходная функция, синим результат приближения. Можно увидеть, что точность приближение функции оказалась крайне низ-

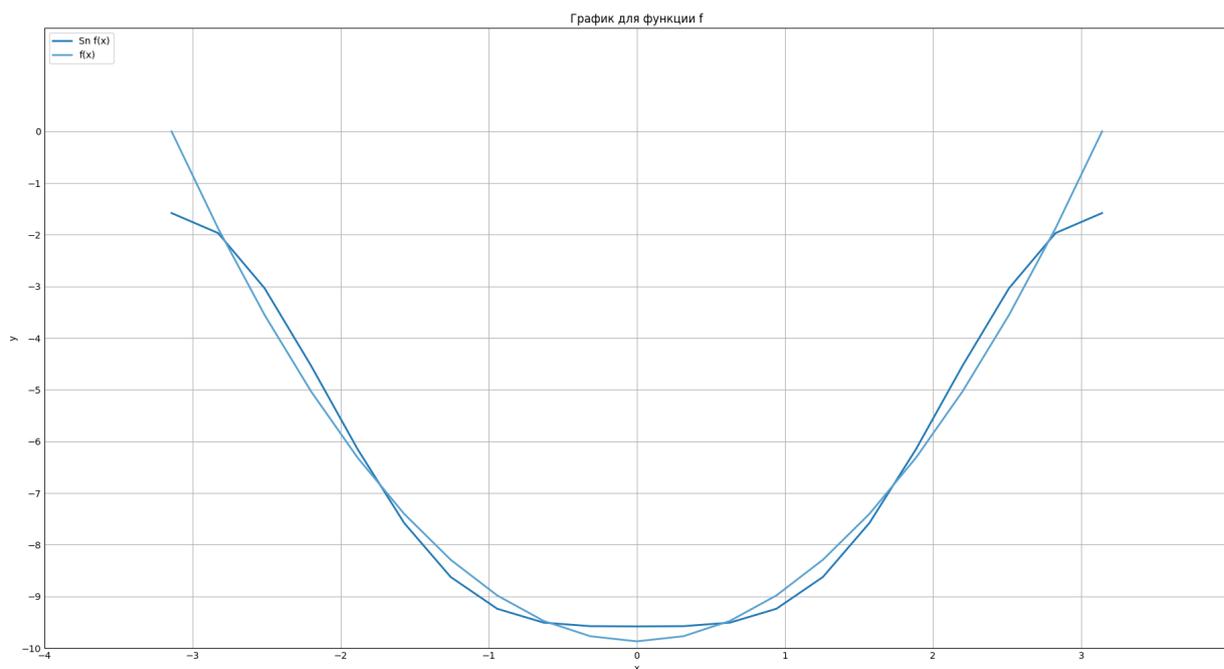


Рисунок 1 — Функция f вычисленная методом трапеций

кой. Ниже представим результат с помощью метода трапеций (рисунок ??)

Несмотря на разные методы, результат остался схожим. Как и предполагалось при малом количестве слагаемых сходимость приближения так же будет низкой. Рассмотрим теперь случай с 30 слагаемыми в сумме. Ниже представлен график полученный с помощью метода Симпсона (рисунок 3)

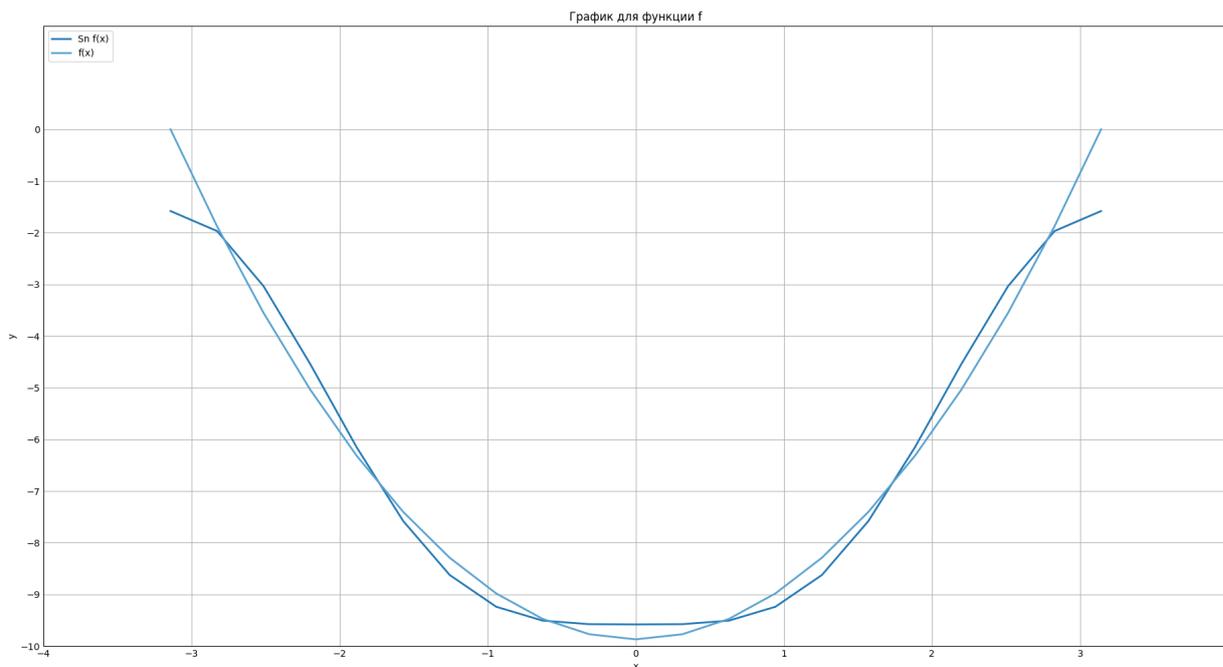


Рисунок 2 — Функция f вычисленная методом Симпсона

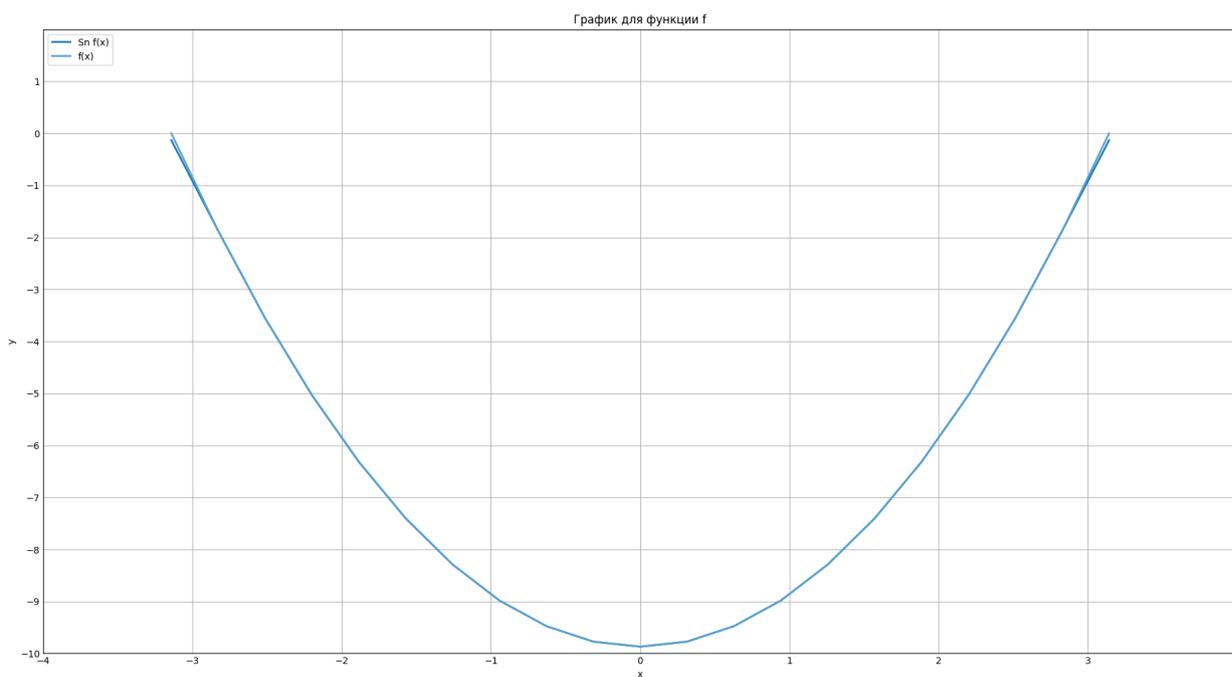


Рисунок 3 — Приближение функция f вычисленная методом Симпсона

Сразу можно увидеть, что приближение функции сошлось достаточно хорошо. Погрешность в значениях составила максимум 0.13. Самая большая погрешность оказалась в крайних точках. Рассмотрим, как прошёл расчёт с помощью метода трапеций (рисунок 4).

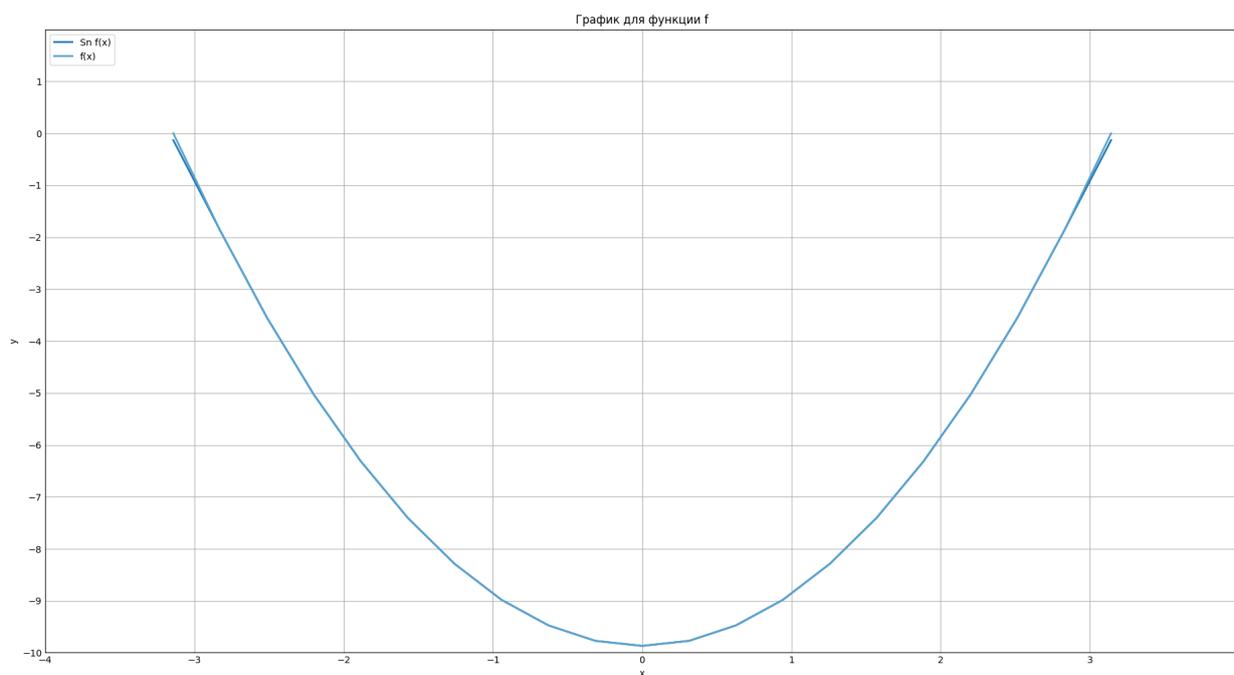


Рисунок 4 — Приближение функции f вычисленная методом трапеций

Здесь можно увидеть, что полученное приближение сошлись с большей точностью. Вне зависимости от метода, получено приближение, с низкой погрешностью. При необходимости можно увеличить количество слагаемых в частичной сумме ряда Фурье и получить ещё более точное приближение.

Рассмотри случай функции заданной с погрешностью. Будем использовать случай (3). Зафиксируем величину $\delta = 0.01$ откуда получим число слагаемых равное 10. Рассмотрим рисунки 5-6:

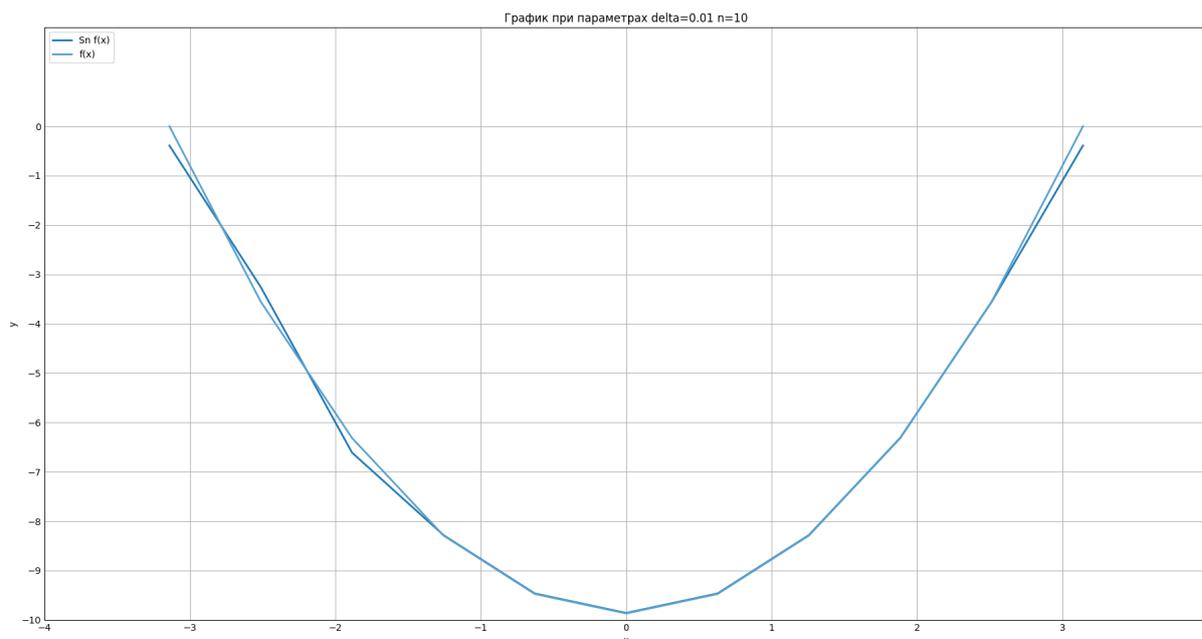


Рисунок 5 — График полученный с помощью метода трапеций с параметрами $\delta = 0.01$ и количеством узлов равное 10

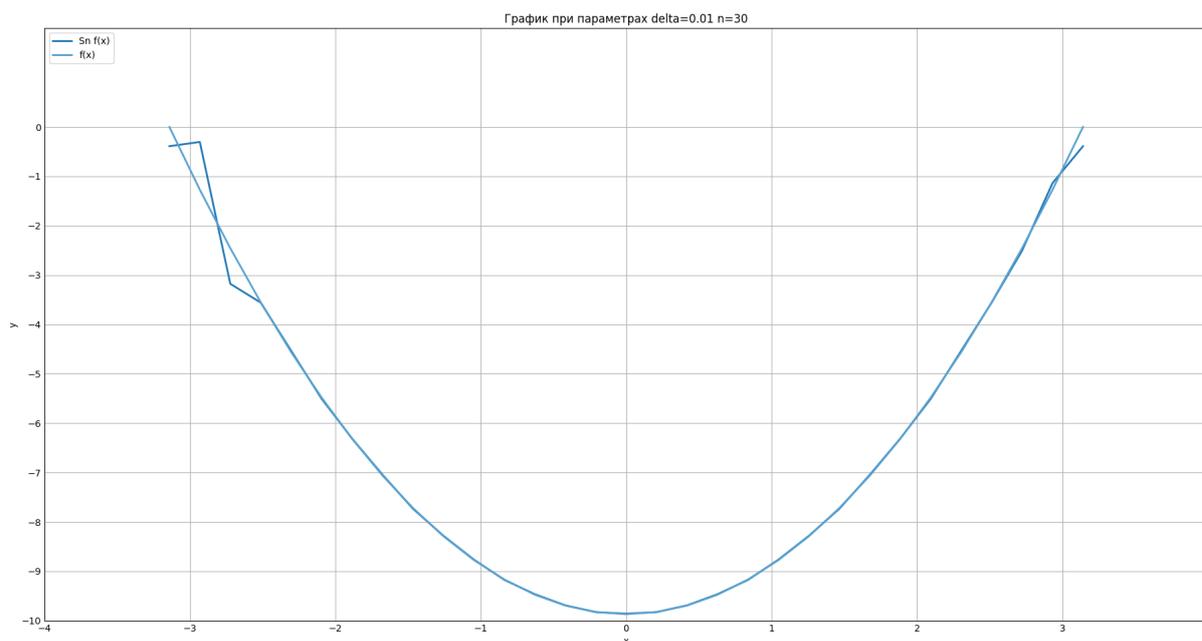


Рисунок 6 — График полученный с помощью метода трапеций с параметрами $\delta = 0.01$ и количеством узлов равное 30

Можно увидеть, что при увеличении количества узлов сходимость приближения функции резко ухудшилась. Значение скачка резко выросло. Рассмотрим теперь что произойдёт при уменьшении значения $\delta = 0.0001$. Будем

теперь рассматривать 100 слагаемых в частичной сумме ряда Фурье. На картинках 7-8 представлены результаты выполнения программы:

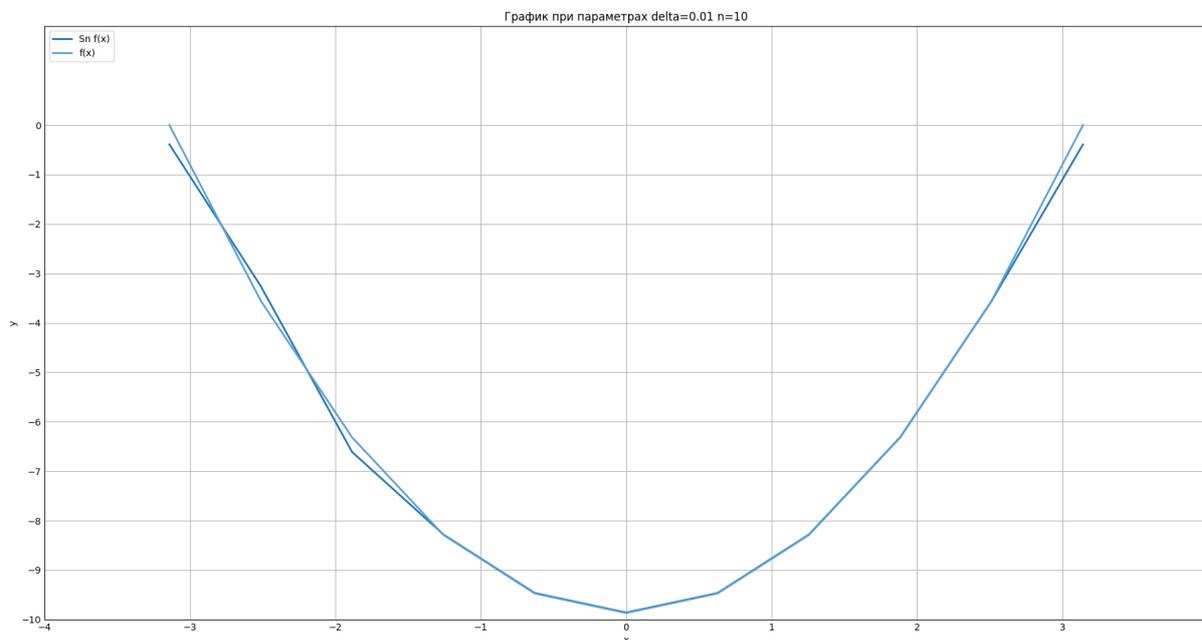


Рисунок 7 — График полученный с помощью метода трапеций с параметрами $\delta = 0.01$ и количеством узлов равное 10

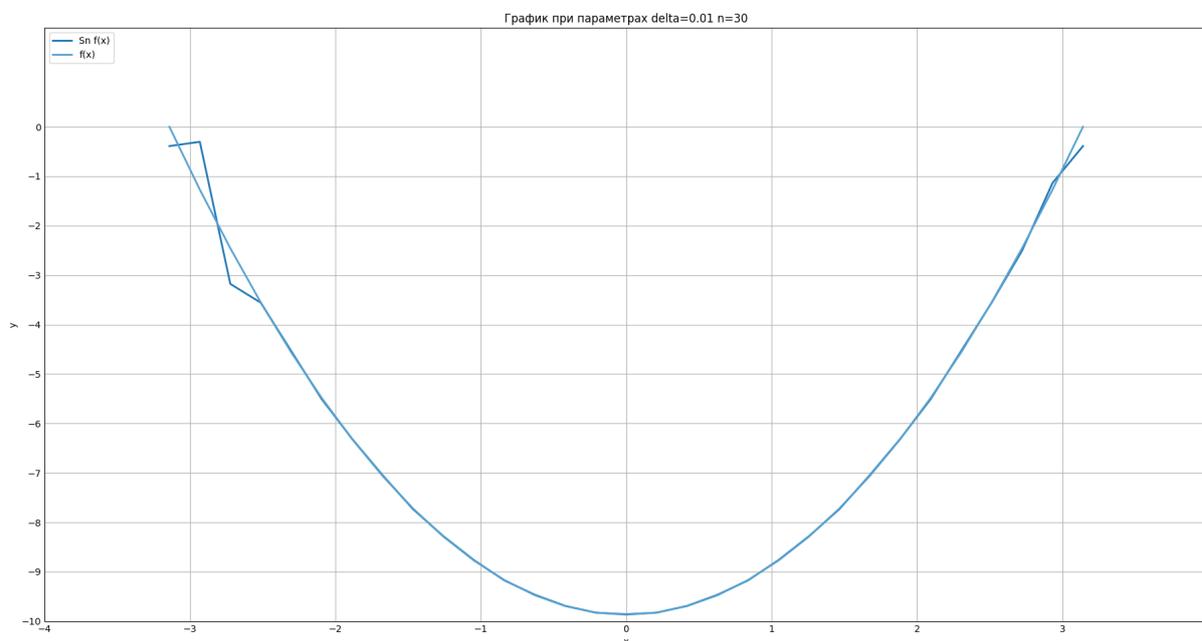


Рисунок 8 — График полученный с помощью метода трапеций с параметрами $\delta = 0.01$ и количеством узлов равное 30

В этом случае величина скачка растёт значительно хуже, чем в результатах до этого.

Так же в работе будет рассмотрена задача восстановления функции. В результатах полученных по формуле (3) можно увидеть зависимость величины скачка как от количества слагаемых, так и от величины δ . При малом δ увеличение скачка будет так же мало.

Заключение. В теоретической части был рассмотрен один из методов сглаживания функции с помощью частичных сумм рядов Фурье. Был построен интегральный оператор. Так же была рассмотрена сходимость приближения функций с помощью интегральных операторов.

В практической части на модельной задаче проведён математический эксперимент показывающий эффективность данного метода.