

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Дифференциальных уравнение и математической
экономики

Решение простейшей начально-граничной задачи для уравнения
гиперболического типа с постоянными коэффициентами

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Пастухова Максима Сергеевича

Научный руководитель

профессор, д.ф.м.н., профессор
должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

А.П. Хромов

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

зав. каф., д.ф.м.н., профессор
должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

С.И. Дудов

инициалы, фамилия

Саратов 2023

Введение

Настоящая бакалаврская работа посвящена изучению решения простейшей обобщенной начально-граничной задачи для уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами.

Линейные дифференциальные уравнения математической физики представляют собой одну из самых обширных ветвей анализа. Им посвящено большое число монографий и учебников и почти не поддающееся учету количество журнальных статей.

Актуальность темы заключается в том, что обобщенная начально-граничная задача является одним из наиболее сильных обобщений классической начально-граничной задачи. Внешний вид её такой же, как и у классической задачи, но смысл уже совсем другой. В настоящее время много работ посвященное изучению данной задачи.

Круг вопросов математической физики тесно связан с изучением различных физических процессов. Сюда относятся явления, изучаемые в гидродинамике, теории упругости, электродинамике и т. д. Возникающие при этом математические задачи содержат много общих элементов и составляют предмет математической физики.

Цель бакалаврской работы, доказать единственность классического решения поставленной задачи и вывести формулу для обобщенного решения.

Бакалаврская работа состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка используемых источников.

В первом разделе даётся постановка рассматриваемой начально-граничной задачи.

Во втором разделе приводится краткая история вопроса и рассматриваемого метода решения задачи.

В третьем разделе доказываются теорема о разложении и теорема о единственности классического решения начально-граничной задачи в виде ряда.

В четвертом разделе даётся определение обобщенного решения начально-граничной задачи и выводится конечная формула для обобщенного решения.

В пятом разделе приведена визуализация полученных результатов.

В заключении сформулированы общие выводы по бакалаврской работе, отражены наиболее значимые результаты проведенного исследования.

1. Постановка задачи

Рассмотрим обобщенную начально-граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = 0 \quad u_x(1, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (1.3)$$

где $(x, t) \in Q$, где $Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функции φ, ψ, f комплекснозначные, $\varphi, \psi \in L_1[0, 1]$, $f \in L_1(Q_T)$ для любого фиксированного $T > 0$, $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ при $T > 0$.

Задача состоит в нахождении конечной формулы для обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3).

Предполагается, что уравнение (1.1) гиперболического типа, то есть выполняется следующее условие:

$$p_1^2 - 4p_2 > 0, \quad (1.4)$$

то есть корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0, \quad (1.5)$$

являются вещественными и различными.

Возможны только две принципиально разные ситуации

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \quad (1.6)$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (1.7)$$

В случае (1.6) соответствующая спектральная задача является регулярной по Биргхофу, а в случае (1.7) нерегулярной. Был рассмотрен только случай (1.6). Далее используем определения и факты из [1] не оговаривая особо.

2. Краткая история вопроса

Восстановить полную историю исследования начально-граничной задачи (1.1)-(1.3) довольно трудно, так как очень много математиков рассматривали такую задачу на протяжении долгого времени под разными углами зрения и использовали разные методы.

Тем не менее, для полноты картины приведём некоторые исторические факты, которые в какой-то мере близки к обсуждаемым проблемам.

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Также уравнение актуально для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна).

Исследования таких колебаний началось около 60 лет назад в работах [2]-[4].

А.П. Хромов дополнил резольвентный метод подходом, связанным с расходящимися рядами формальных решений. Расходящиеся ряды рассматриваются в понимании Л. Эйлера [5]-[6], который является основоположником суммирования расходящихся рядов. Такой подход был первоначально рассмотрен в [7], а затем получил развитие в работах [8]-[9]. Иногда такой подход называют аксиоматическим.

Важно то, что резольвентный подход позволил привлечь ряды Фурье по тригонометрической системе вместо рядов по собственным функциям.

Дальнейшее направление развития метода связано с расходящимися рядами формальных решений. Такой случай может иметь место в силу известного примера А. Н. Колмогорова расходящегося ряда Фурье по тригонометрической системе для функций из $L_1 [0, 1]$.

3. Единственность классического решения начально-граничной задачи и формула для решения в виде ряда

С задачей (1.1)-(1.3) тесно связана оператор-функция

$$L(\lambda) : l(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y, \quad (3.1)$$

$$y(0) = y'(1) = 0. \quad (3.2)$$

Далее была рассмотрена следующая задачу

$$L(\lambda)y = 0. \quad (3.3)$$

Была линеаризованна задача (3.1)-(3.2), также как это сделано в [2]. Пусть $z_1 = y$; $z_2 = \lambda z_1$, тогда была получена задача уже для линейного оператора \hat{L} , но в пространстве вектор-функций для $z = (z_0, z_1)^T$: $\hat{L}(z) = \lambda z$, где формула

$$\hat{L}(z) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2} \frac{d^2}{dx^2} & -\frac{p_1}{p_2} \frac{d}{dx} \end{pmatrix} z. \quad (3.25)$$

Найдём резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{R} - \lambda \epsilon)^{-1}$ и пусть $\mathcal{R}_\lambda F = (z_1, z_2)^T$, где $F = (f_1, f_2)^T$. Таким образом первая компонента вектора $\mathcal{R}_\lambda F$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} z_1'' + \lambda p_1 z_1' - \lambda^2 p_2 z_1 = f_\lambda, \\ z(0) = z'(1) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $f_\lambda := -p_2 f_2 - p_1 f_1' - \lambda p_2 f_1$.

Утверждение 1. *Задаче (3.3) соответствуют следующие собственные значения и собственные функции*

$$\lambda_k = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \ln \frac{|\omega_1|}{\omega_2} + \frac{(2k+1)\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k \in Z, \quad (3.30)$$

$$y_k(x, \lambda_k) = \left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2} \right)^{\frac{x\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}} e^{\frac{(2k+1)\pi i x \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}} - \left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2} \right)^{\frac{x\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} e^{\frac{(2k+1)\pi i x \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}}. \quad (3.31)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Формула*

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)\Delta} \left(\omega_2 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + \right. \\ \left. + \omega_1 e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right) + M_+(x, \xi, \lambda),$$

где

$$M_+(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_1(x-\xi)}, & x \geq \xi; \\ -\frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-\xi)}, & x \leq \xi. \end{cases}$$

является функцией Грина задачи (3.3).

Обозначим

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f_\lambda(\xi) d\xi d\lambda, \quad (3.67)$$

где Γ_n , $n \in \mathcal{N}$, есть кусочно круговые контуры, отстоящие от числа λ_k на расстояние не меньшее некоторого достаточно малого фиксированного числа $\delta > 0$ между соседними контурами лежит ровно одно число и имеют место оценки:

$$c_1 n < \Gamma_n < c_2 n \quad (0 < c_1 < c_2 < +\infty); \quad (3.68)$$

Γ_n^+ , Γ_n^- , есть части Γ_n , лежащие в правой и левой полуплоскости соответственно.

С использованием утверждения методом контурного интеграла была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если $f_1 \in W_p^1[0, 1]$, ($p > 1$), $f_2 \in L_p[0, 1]$, $f_1(0) = f_1'(1) = 0$, то

$$I_n(x) = f_1(x) + o_n(1), \quad (3.80)$$

где $o_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, равномерно по $x \in [0, 1]$.

Теорема 1 существенно используется при получении формулы для классического решения в виде ряда из контурных интегралов.

Определение 1. Под классическим решением будем понимать функцию $u(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$, которая:

а) непрерывна вместе с $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, при этом $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ абсолютно непрерывны и по x и по t , и почти всюду в Q выполняется равенство

$$u_{xt} = u_{tx}; \quad (3.117)$$

б) удовлетворяет условиям (1.2)-(1.3) на границе множества Q и уравнению (1.1) почти всюду в Q .

Теорема 2. Если $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)-(2), $f \in L_1(Q_T)$ и дополнительно выполняется условие $u_{tt} \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau - p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} \varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi \right) d\lambda, \quad (3.118)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0, 1)$ при любом фиксированном $t > 0$.

4. Обобщенное решение и конечная формула для обобщенного решения

Теорема 2 говорит о том, что формальный ряд (3.118) и начально-граничная задача (1.1)-(1.3) тесно связаны, а именно, если эта задача имеет классическое решение, то для него справедлива формула (3.118).

Ряд (3.118) имеет смысл для любой функции $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$. Будем считать, что этот ряд является формальным решением задачи (1.1)-(1.3), когда $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$.

Задачу (1.1)-(1.3) в случае $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ мы называли ранее *обобщенной начально-граничной задачей*. Назовём ряд справа в (3.118) *обобщенным решением* этой задачи [12].

Будем трактовать ряд справа в (3.118) изначально как расходящийся (даже если он и сходится) и соответствующим образом определить (или назначить) «сумму» этого ряда («сумму» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда).

Далее покажем, что ряд справа в (3.118) сводится к сумме конечного числа рядов вида

$$\sum_k a_k e^{2k\pi i x}, \quad \text{где } a_k = \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi, \quad (4.1)$$

а функции $f(x) \in L_1[0, 1]$ выражаются простыми формулами через функцию $\varphi(x)$ и суммируемы в том и только в том случае, когда суммируема функция $\varphi(x)$ [12].

Таким образом, чтобы найти формулу для обобщенного решения, необходимо определить «сумму» ряда (4.1)

Основным результатом настоящей бакалаврской работы является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\varphi \in L_1[0, 1]$ и выполняется условие (1.6). Тогда функция $u(x, t)$ определенная для почти всех $(x, t) \in Q$ формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\hat{\varphi} \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \hat{\varphi} \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right), \quad (4.2)$$

является решением обобщенной задачи (1.1)-(1.3). Здесь

$$\hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \omega_2 \varphi \left(\frac{\xi}{a} \right), & \xi \in [0, a); \\ -\frac{\omega_1^2}{\omega_2} \varphi \left(\frac{\xi-1}{a-1} \right), & \xi \in [a, 1]; \end{cases} \quad (4.3)$$

$a = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$ и $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Для доказательства теоремы 3 были доказаны следующие леммы.

Лемма 2. Если (4.1) есть ряд Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 1]$, то «сумма» ряда (4.1) есть функция $f(x)$.

Лемма 3. Справедливы формулы

$$r_k(x, \xi) = \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} G(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1) \left(\ln \frac{|\omega_1|}{\omega_2} + (2k+1)\pi i \right)} (e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x}) \times \\ \times (e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_2 \xi}), \quad (4.7)$$

$$r_{1k}(x, \xi) = \operatorname{res}_{\lambda_k} G_\xi(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} (e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x}) (\omega_1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi}). \quad (4.8)$$

Лемма 4. Если $f(x) \in L_1[0, 1]$, то

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} f(\xi) d\xi = -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2} \right)^{1-\xi_1} e^{-\pi i \xi_1} e^{-2k\pi i \xi_1} f^*(\xi_1) d\xi_1, \quad (4.21)$$

где

$$f^*(\xi_1) = \begin{cases} 0, & \xi_1 \in [0, \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}), \\ f(\frac{(\omega_2 - \omega_1)(\xi_1 - 1)}{\omega_1}), & \xi_1 \in [\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, 1]; \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} f(\xi) d\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2}\right)^{-\xi_2} e^{-\pi i \xi_2} e^{-2k\pi i \xi_2} f_*(\xi_2) d\xi_2, \quad (4.23)$$

где

$$f_*(\xi_2) = \begin{cases} f(\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_2} \xi_2), & \xi_2 \in [0, \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}], \\ 0, & \xi_2 \in (\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, 1]; \end{cases} \quad (4.24)$$

5. Визуализация полученных результатов

Была написана программа на языке Python 3.9 для сравнения решений, полученных формулами

$$u(x, t) = \frac{\omega_2 \Phi(x + \frac{t}{\omega_2}) - \omega_1 \Phi(x + \frac{t}{\omega_1})}{\omega_2 - \omega_1}, \quad (5.1)$$

$$\Phi(x) = -\tau \Phi(-\frac{1}{\tau}x), \quad x \in (-\infty, 0), \quad (5.2)$$

$$\Phi(x) = -\frac{1}{\tau} \Phi((1 + \tau) - \tau x), \quad x \in (1, +\infty). \quad (5.3)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\hat{\varphi}\left(\left\{\frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}\right\}\right) - \hat{\varphi}\left(\left\{\frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}\right\}\right) \right), \quad (5.4)$$

$$\hat{\varphi} = \begin{cases} \omega_2 \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a); \\ \omega_1 \varphi\left(\frac{1 - \xi}{1 - a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (5.5)$$

Формулы (5.1)-(5.5) были выведены в [11] и [13], формулы в (5.4)-(5.5) аналогичны формулам (22)-(23), а формулы (5.1)-(5.3), являются другим представлением формул (22)-(23).

Пользователь на вход задаёт значение коэффициентов p_1 и p_2 . Программа разбивает координатную плоскость на сетку размером 600 на 600, считает

значения по заданным формулам в узлах сетки, вносит полученные значения в массив и по данным значениям строит график. После проходится по массиву и выбирает максимальный, считает погрешность путём вычитания модулей максимальных элементов, полученных по формулам (5.1)-(5.3) и (5.4)-(5.5). Таким образом на выходе мы получаем трёхмерные графики и погрешность решений.

Проведём несколько численных экспериментов, взяв разные начальные данные. Для более наглядного результата была задана единая начальная функция $\varphi(x) = \sin(\pi x)$.

1. В качестве входных данных были выбраны следующие параметры $p_1 = -1$, $p_2 = -2$. В результате были получены следующие трёх-мерные графики:

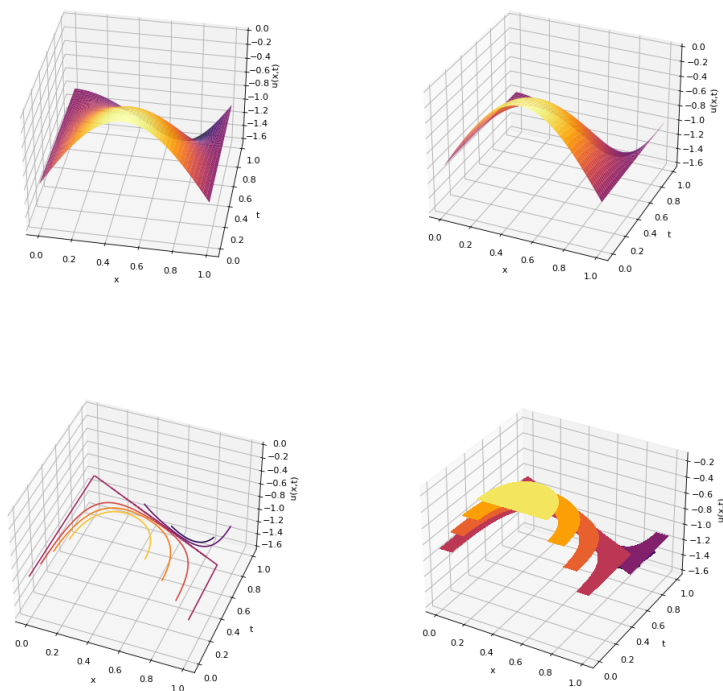


Рисунок 1 — Результаты визуализации решений

2. В качестве входных данных были выбраны следующие параметры $p_1 = -4$, $p_2 = -5$. В результате были получены следующие трёх-мерные графики:

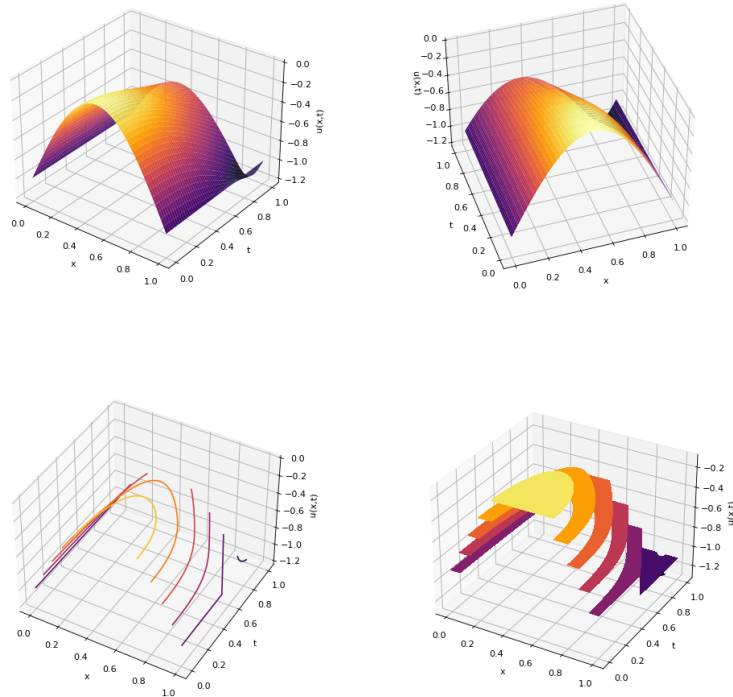


Рисунок 2 — Результаты визуализации решений

Рассмотрим погрешности вычислений в первом и во втором случаях.

<pre>0.9999999999999993 1.0 Погрешность: 6.661338147750939e-16 Process finished with exit code 0</pre>	<pre>0.9999999999999996 1.0 Погрешность: 4.440892098500626e-16 Process finished with exit code 0</pre>
--	--

Рисунок 3 — Погрешность в первом и во втором случаях

Таким образом, формулы (5.1)-(5.5) полученные в статьях [11] и [13], выдают практически идентичные результаты.

Заключение

В бакалаврской работе была рассмотрена начально-граничная задача гиперболического типа.

Доказана единственность классического решения данной задачи и выведена формула для классического решения, также в бакалаврской работе даётся

определение обобщенного решения рассматриваемой начально-граничной задачи и доказывается теорема о формуле для обобщенного решения.

Была написана программа на языке Python для визуализации аналогичных результатов, полученных в [11] и [13].

Результаты полученные в бакалаврской работе докладывались на Воронежской весенней математической школе и на студенческой конференции СГУ и опубликованы в [15] и [16].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.
- 2 Archibald F.R., Emslie A.G. The vibration of a string having a uniform motion along its length // Journal of Applied Mechanics. — 1958. — V. 25. — Iss. 1. — p. 347-348.
- 3 Mahalingam S. Transverse vibrations of power transmission chains. British Journal of Applied Physics. — 1957. — V.8. — № 4. — p. 145-148.
- 4 Sack R.A. Transverse oscillations in traveling strings // British Journal of Applied Physics. — 1954. — V. 5. — № 6. — p. 224-226.
- 5 Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. — 580 с.
- 6 Харди Г. Расходящиеся ряды. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. — 505 с.
- 7 Хромов А.П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии — Современные методы теории краевых задач: материалы междун. конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения—XXX. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 291-300.
- 8 Хромов А.П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью — Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф.. — 2019. — Т. 19. — № 3. — С. 280-288.
- 9 Хромов А.П. Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения // В сб.: Математик.Механика / Вып. 21. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2019. — С. 62-67.
- 10 Рыхлов В.С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильнонерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка — Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф.. — 2013. — Т. 13. — № 1. — С. 21-26.

- 11 Рыхлов В.С. О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной в уравнении. // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 999, 2022 г. – С. 1-18 – (в печати).
- 12 Рыхлов В.С. Обобщенное решение простейшей начально-граничной задачи для однородного гиперболического уравнения со смешанной производной // ТВИМ. 2022. №3. С. 1-15
- 13 Рыхлов В.С. О разрешимости регулярной смешанной задачи для одного класса гиперболических уравнений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 200, 2021 г. – С. 95-104
- 14 Натансон И. П. Теория функции вещественно переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с. URL: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Natanson1974ru.pdf>
- 15 Пастухов М.С., Рыхлов В.С. Разложение первой компоненты по собственным функциям квадратичного пучка дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами // Современные методы теории краевых задач Понтрягинские чтения. Материалы Международной конференции. 2023 г. – С. 284-286
- 16 Пастухов М.С. Обобщенное решение одной начально-граничной задачи для гиперболического уравнения – Студенческая конференция СГУ, 2023 г.