

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

**Приближенное аналитическое решение задачи о**

**сходящейся ударной волне**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Ветрова Никиты Сергеевича

Научный руководитель  
старший преподаватель

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой  
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2023

**Введение.** В настоящее время задача о сходящейся ударной волне является актуальной для многих областей науки и техники, таких как аэродинамика, гидродинамика, физика плазмы, микроэлектроника и другие. Сложность данной задачи заключается в том, что решение уравнений, описывающих движение тела в газовой среде, требует сложных вычислений и приближений.

Теория автомодельности является одним из основных подходов к решению задачи о сходящейся ударной волне. Она основывается на приближении кинетической теории газов на основе законов сохранения массы, импульса и энергии.

Задачу о сходящейся ударной волне можно решить с помощью метода Чизнелла и последующей его модификации для увеличения точности определения приближенного значения показателя автомодельности  $\alpha$ . Метод Чизнелла – это метод приближенного аналитического решения задачи о сходящейся ударной волне, который основывается на теории автомодельности. Он является аналогом метода последовательных приближений и, как и последний, используется для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Однако, в отличие от метода последовательных приближений, метод Чизнелла позволяет получить решение в явном аналитическом виде. Это позволяет существенно упростить вычисления и повысить точность решения задачи о сходящейся ударной волне.

**Целью** данной бакалаврской работы является исследование задачи о сходящейся ударной волне и получение ее приближенного аналитического решения методом Чизнелла, с последующей его модификации.

**Структура бакалаврской работы.** Бакалаврская работа содержит введение, три раздела, заключение, список использованной литературы и одно приложение. Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи.

В первом разделе содержится теоретическая часть теории автомодельности.

Во втором разделе рассмотрена постановка задачи о сходящейся ударной волне, исследованы уравнения и результаты решения.

В третьем разделе приведено приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне методом Чизнелла и его модификация, а также разобрано численное решение задачи с применением Maple.

**Основное содержание работы.** За начало отсчета времени  $t = 0$  нужно принять момент фокусировки, когда  $R = 0$ . Тогда время до момента фокусировки оказывается отрицательным. В связи с этим определение автомодельной переменной следует несколько изменить, положив:

$$R = A(-t)^\alpha, \quad \xi = \frac{r}{R} = \frac{r}{A(-t)^\alpha}.$$

Формально решение, которое нужно найти, охватывает все пространство, вплоть до бесконечности, так что интервалы изменения переменных таковы:

$$-\infty < t \leq 0, \quad R \leq r < \infty, \quad 1 \leq \xi < \infty.$$

На фронте ударной волны  $\xi = 1$ . Скорость распространения фронта направлена к центру, т. е. отрицательна,  $D \equiv \dot{R} = \alpha R/t = -\alpha R|t| < 0$ .

Подставим в следующие уравнения газовой динамики

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \rho}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + (v-1) \frac{u}{r} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \ln p \rho^{-\gamma} + u \frac{\partial}{\partial r} \ln p \rho^{-\gamma} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

решение в автомодельной форме

$$p = \rho_0 \dot{R}^2 \pi(\xi), \quad \rho = \rho_0 g(\xi), \quad u = \dot{R} v(\xi). \quad (2)$$

Система (1) сведена к уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} + \frac{\dot{R}}{R} \left[ v' + (v - \xi)(\ln g)' + (\nu - 1)\frac{v}{\xi} \right] = 0, \\ \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}v + (v - \xi)v' + \frac{\pi'}{g} = 0, \\ \frac{R}{\dot{R}} \frac{d}{dt} (\ln \rho_0^{1-\gamma} \dot{R}^2) + (v - \xi)(\ln \pi g^{-\gamma})' = 0, \end{cases} \quad (3)$$

в которых  $\nu = 3$ , в соответствии со сферической симметрией движения. Масштаб плотности в задаче постоянный,  $\rho_0 = \text{const}$ . Поэтому член  $\dot{\rho}_0/\rho_0$  в первом из уравнений (3) исчезает и квадратная скобка обращается в нуль. Множители, зависящие от масштабов, в уравнениях (3) сводятся к следующим константам:

$$\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad \frac{R}{\dot{R}} \frac{d}{dt} (\ln \rho_0^{1-\gamma} \dot{R}^2) = \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha}.$$

Получилась система уравнений для автомодельных представителей:

$$\begin{cases} (v - \xi)(\ln g)' + v' + \frac{(\nu - 1)v}{\xi} = 0, \\ (\alpha - 1)\alpha^{-1}v + (v - \xi)v' + g^{-1}\pi' = 0, \\ (v - \xi)(\ln \pi g^{-\gamma})' + 2(\alpha - 1)\alpha^{-1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В целях упрощения системы необходимо проделать ряд преобразований. Для начала следует перейти к новым функциям — представителям  $P$ ,  $G$ ,  $V$ . Далее, ввести вместо давления новую неизвестную функцию квадрат скорости звука и соответственно перейти к представителю квадрата скорости звука.

После введения новых переменных система (4) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d \ln \xi} + (V - \alpha) \frac{d \ln G}{d \ln \xi} &= -3V, \\ (V - \alpha) \frac{dV}{d \ln \xi} + \frac{Z}{\gamma} \frac{d \ln G}{d \ln \xi} + \frac{1}{\gamma} \frac{dZ}{d \ln \xi} &= -\frac{2}{\gamma} Z - V(V - 1), \\ (\gamma - 1)Z \frac{d \ln G}{d \ln \xi} - \frac{dZ}{d \ln \xi} &= 2 \left[ \frac{\alpha - 1}{\alpha(V - \alpha)} + 1 \right] Z. \end{aligned} \quad (5)$$

Это есть система трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех неизвестных функций  $V, G, Z$  от независимой переменной  $\xi$ , с граничными условиями при  $\xi = 1$ :

$$V(1) = \frac{2}{\gamma + 1}\alpha, \quad G(1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad Z(1) = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}\alpha^2 \quad (6)$$

и при  $\xi = \infty$ :

$$V(\infty) = 0, \quad Z(\infty) = 0. \quad (7)$$

Граничных условий (6) достаточно для того, чтобы начать интегрирование уравнений (5) от точки  $\xi = 1$  в сторону  $\xi > 1$ , задавшись каким-то значением числа  $\alpha$ .

Однако исследование уравнений показывает, что получить однозначное решение и прийти в точку (7) нельзя при произвольном значении  $\alpha$ . Это оказывается возможным только при некотором избранном значении  $\alpha$ , что и определяет выбор показателя автомодельности.

При решении уравнений (5) можно найти показатель автомодельности. Для этой цели следует прежде всего произвести исследование уравнений.

Нужно решить систему (5) относительно производных  $dV/d \ln \xi$ ,  $d \ln G/d \ln \xi$ ,  $dZ/d \ln \xi$ . Вместо того, чтобы выписывать получающиеся громоздкие выражения, можно записать результат решения алгебраической системы в символической форме, через детерминанты:

$$\frac{dV}{d \ln \xi} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{d \ln G}{d \ln \xi} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{dZ}{d \ln \xi} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (8)$$

где определитель системы  $\delta$  равен:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & V - \alpha & 0 \\ V - \alpha & \frac{Z}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \\ 0 & (\gamma - 1)Z & -1 \end{vmatrix} = -Z + (V - \alpha)^2. \quad (9)$$

Детерминанты  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  получаются после замены соответствующих столбцов в детерминанте (9) правыми частями уравнений (5).

Коэффициенты при производных и правые части в уравнениях (5) зависят только от  $V$  и  $Z$ , но не зависят от  $G$  и  $\xi$ , так что все величины  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  являются функциями только  $V$  и  $Z$ . Разделив третье из уравнений (8) на первое, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{\Delta_3(Z, V)}{\Delta_1(Z, V)}. \quad (10)$$

После того, как найдено решение этого уравнения  $Z(V)$ , его можно подставить в первое уравнение (8) и путем интегрирования определить функцию  $V(\xi)$ , а затем, подставляя  $V(\xi)$  и  $Z[V(\xi)]$  во второе уравнение, путем интегрирования найти функцию  $G(\xi)$ .

Основная задача сводится к решению уравнения (10) с граничными условиями (6), (7).

Необходимо рассмотреть, как проходит искомая интегральная кривая на плоскости  $V, Z$ . На фронте ударной волны при  $\xi = 1, V = V(1), Z = Z(1)$ . На плоскости эта точка будет обозначаться буквой  $\Phi$ . На бесконечности, при  $\xi = \infty, V(\infty) = 0, Z(\infty) = 0$ , т. е. интегральная кривая  $Z(V)$  идет из точки  $\Phi$  в начало координат  $O$  в соответствии с рисунком 1.

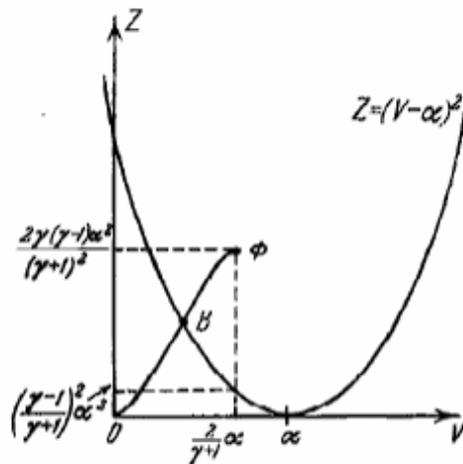


Рисунок 1 — Ход интегральной кривой на плоскости  $V, Z$

Чтобы решение уравнений газовой динамики имело физический смысл, оно должно быть однозначным. Каждому значению независимой переменной  $\xi$  должны соответствовать единственные значения  $V$  и  $Z$ . Это значит, что функции от  $\xi$  от  $V$  и  $\xi$  от  $Z$  или  $\ln \xi$  от  $V$  и  $\ln \xi$  от  $Z$ , не должны иметь

экстремумов. Производные  $d \ln \xi / dV = \Delta / \Delta_1$  и  $d \ln \xi / dZ = \Delta / \Delta_3$  в области изменения переменной  $1 < \xi < \infty$ ,  $0 < \ln \xi < \infty$  в истинном решении нигде не должны обращаться в нуль.

Однако детерминант  $\Delta = -Z + (V - \alpha)^2$  равен нулю на параболе  $Z = (V - \alpha)^2$ , проведенной на плоскости  $V, Z$  в соответствии с рисунком 1. Легко проверить путем непосредственного вычисления, что точка  $\Phi$  лежит выше параболы, т. е. искомая интегральная кривая вдоль своего пути от точки  $\Phi$  до точки  $O$  непременно должна пересечь параболу. Для того, чтобы при этом производные  $d \ln \xi / dV$  и  $d \ln \xi / dZ$  не обратились в нуль, необходимо, чтобы в точке пересечения обращались в нуль определители  $\Delta_1$  и  $\Delta_3$ . Таким образом, точка пересечения истинной интегральной кривой  $Z(V)$  и параболы есть особая точка уравнения (10) ( $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_3 = 0$ ,  $dZ/dV = 0/0$ ).

Если задаться каким-то произвольным значением показателя автомоделности  $\alpha$  и начать интегрировать уравнение (10) от точки  $\Phi$ , то интегральная кривая либо вообще не пересечет параболу, либо пересечет ее в какой-то обыкновенной точке, и эта кривая не будет отвечать истинному решению.

Только при специальном, избранном значении  $\alpha$  интегральная кривая пересечет параболу, пройдя через нужную особую точку уравнения (10), и устремится к своей конечной точке  $O$ . Это условие обязательного прохождения истинной интегральной кривой через определенную особую точку уравнения (10) и определяет показатель  $\alpha$ . Особая точка  $B$  и схематический ход истинной интегральной кривой показаны в соответствии с рисунком 1.

Практически решение и показатель автомоделности находят методом попыток. Задаваясь каким-то значением  $\alpha$ , численно интегрируют уравнение (10) от начальной точки  $\Phi$  ( $\xi = 1$ ) и проверяют, как идет интегральная кривая. Исправляя значение  $\alpha$ , путем последовательных приближений добиваются того, чтобы интегральная кривая пересекла параболу в нужной особой точке и устремилась к конечной точке  $O$ . После того как найдены показатель  $\alpha$  и функция  $Z(V)$ , отыскание функций  $V(\xi)$ ,  $Z(\xi)$ ,  $G(\xi)$  не составляет труда.

Чтобы описать автомоделное течение жидкости с отношением удельных теплоемкостей  $\gamma$  за ударную волну в задаче о сжатии цилиндрической ( $\nu = 2$ ) или сферической ( $\nu = 3$ ) ударной волны, необходимо решить краевую задачу для системы трех ОДУ относительно трех функций  $V = V(\xi)$ ,  $G =$

$G(\xi)$ ,  $Z = Z(\xi)$ :

$$\xi \frac{dV}{d\xi} = \frac{\Delta_1(V, Z)}{\Delta(V, Z)}, \quad \frac{\xi}{G} \frac{dG}{d\xi} = \frac{\Delta_2(V, Z)}{\Delta(V, Z)}, \quad \xi \frac{dZ}{d\xi} = \frac{\Delta_3(V, Z)}{\Delta(V, Z)}. \quad (11)$$

С граничными условиями на поверхности УВ при  $\xi = 1$ :

$$V(1) = V_s = \frac{2a}{\gamma + 1}, \quad G(1) = G_s = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad Z(1) = Z_s = \frac{2\gamma(\gamma - 1)\alpha^2}{(\gamma + 1)\alpha^2}. \quad (12)$$

Так как независимая переменная  $\xi$  входит в (11) лишь как коэффициент при производных, а искомая переменная  $G$  не встречается в функциях  $\Delta, \Delta_i, (i = 1, \dots, 3)$ , то система (11) может быть сведена к одному ОДУ:

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \quad (13)$$

и двум квадратурам:

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dV} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dV} = \frac{\Delta}{\Delta_1}. \quad (14)$$

Для реализации метода Чизнелла необходимо задать начальное нулевое приближение для функции  $Z(V)$ :

$$Z_T(V) = \lambda V^2, \quad \lambda = \left( \frac{\alpha}{V_A - 1} \right)^2; \quad (15)$$

подставить (15) в систему (13), (14), что упрощает последнюю и дает возможность ее проинтегрировать. Решение упрощенной системы (13), (14), удовлетворяющее граничным условиям (12), имеет вид:

$$\begin{aligned}
\xi &= \left(\frac{V_S}{V}\right)^\alpha \left(\frac{V+q}{V_S+q}\right)^F, & \frac{G}{G_S} &= \left(\frac{V-\alpha}{V_S-\alpha}\right)^\eta \left(\frac{V+q}{V_S+q}\right)^D, \\
\frac{Z}{Z_S} &= \left(\frac{V}{V_S}\right)^2 \left(\frac{V_S-\alpha}{V-\alpha}\right)^\eta \left(\frac{V+q}{V_S+q}\right)^B, & \eta &= \frac{\varkappa}{\nu\alpha - \varkappa}, \\
q &= -\frac{\alpha}{(1-\nu\lambda)V_A}, & F &= \alpha - \frac{1-\lambda}{1-\nu\lambda}, & D &= \frac{\nu-1}{1-\nu\lambda} - \eta, \\
B &= \eta + \frac{(\nu-1)(2\lambda+\gamma-1)}{1-\nu\lambda}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Для приближенного вычисления значения показателя автомодельности  $\alpha$  получается нелинейное алгебраическое уравнение:

$$Z_S \left(\frac{V_A}{V_S}\right)^2 \frac{(V_S-\alpha)^\eta}{(V_A-\alpha)^{\eta+2}} \left(\frac{V_A+q}{V_S+q}\right)^B - 1 = 0. \tag{17}$$

Модификация метода Чизнелла заключается в замене приближения Чизнелла (15) на более общую функцию  $Z_{TM}(V)$ :

$$\begin{aligned}
Z_{TM}(V) &= LV^2 + MV, \\
L &= l \left(\frac{\alpha}{V_A} - 1\right)^2 - (1-l) \left(\frac{\alpha}{V_A} - 1\right) + m, \\
M &= (1-l) \left(\frac{\alpha}{V_A} - 1\right) \alpha - mV_A.
\end{aligned} \tag{18}$$

С целью упрощения демонстрации модификации положим свободный параметр  $l$  равным единице, то есть нужно рассматривать функцию вида:

$$Z_{TM}(V) = LV^2 + MV, \quad L = \left(\frac{\alpha}{V_A} - 1\right)^2 + m = \lambda + m, \quad M = -mV_A.$$

Далее нужно построить приближенную зависимость  $m^* = m^*(\gamma)$ . Этого можно добиться путем вычисления точных значений  $m_k$ , соответствующих  $\gamma_k$  и дальнейшего построения этой функции по точкам  $N_k(m_k, \gamma_k)$  с применением интерполяционных формул Тиле. После этого необходимо вычислить значения показателя автомодельности  $\alpha_i^*$  в точках  $\gamma_i$  по модифицированному

методу Чизнелла и вычислить величину максимальной относительной погрешности по формуле:

$$\varepsilon^* = \sum_i \frac{|\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i^*|}{\bar{\alpha}_i}.$$

После этого осуществляется серия попыток, в каждой из которых сначала базовым значениям  $\gamma_k$  даются некоторые вариации, а затем снова выполняются действия описанные выше. Попытки должны повторяться до момента, когда значение величины  $\varepsilon^*$  достигнет удовлетворительного минимума (порядка  $0.5 \cdot 10^{-7}$ ).

Ниже представлены результаты расчетов для случая, когда особая точка  $A(V_A, Z_A)$  является седлом. Для  $\nu = 2$  это значения  $\gamma$  из интервала  $(1, 1.9092)$ , а для  $\nu = 3$  – из интервала  $(1, 1.8698)$ .

Приближенные зависимости  $m^* = m^*(\gamma)$  для цилиндрически и сферически симметричной УВ на установленных интервалах значений предлагаются соответственно в виде дробей:

$$m^* = \frac{1.199120382\gamma^3 - 5.171869219\gamma^2 + 7.100023713\gamma - 3.124935193}{6.541863903\gamma^3 - 9.885263855\gamma^2 + 14.012323675\gamma - 9.312901503}, \quad (19)$$

$$m^* = \frac{1.464857537\gamma^3 - 6.166787640\gamma^2 + 8.329615338\gamma - 3.625092501}{9.649876905\gamma^3 - 26.960850085\gamma^2 + 32.979852058\gamma - 14.628528093}. \quad (20)$$

Графики относительных погрешностей  $\varepsilon_j = (\alpha - \alpha_j/\alpha)$  при  $j = 1, 2$  вычисления значений показателя автомодельности с помощью приближенных методов показаны в соответствии с рисунком 2.

В наибольшей степени эффективность модификации проявляется на интервалах значений  $\gamma$   $(1.1, 1.9092)$  для  $\nu = 2$  и  $(1.1, 1.8698)$  для  $\nu = 3$ . В этих интервалах максимальная относительная погрешность вычисления  $\alpha_2$  не превышает  $0.117 \cdot 10^{-7}$  и  $0.186 \cdot 10^{-7}$ .

Посредством программной реализации можно, например, получить значения показателя автомодельности  $\alpha_2$  по модифицированному методу Чизнелла в соответствии с рисунком 3 и сравнить их с теми же значениями  $\alpha_2$ , но полученные аналитическим решением задачи о сходящейся ударной волне в соответствии с таблицей 1.

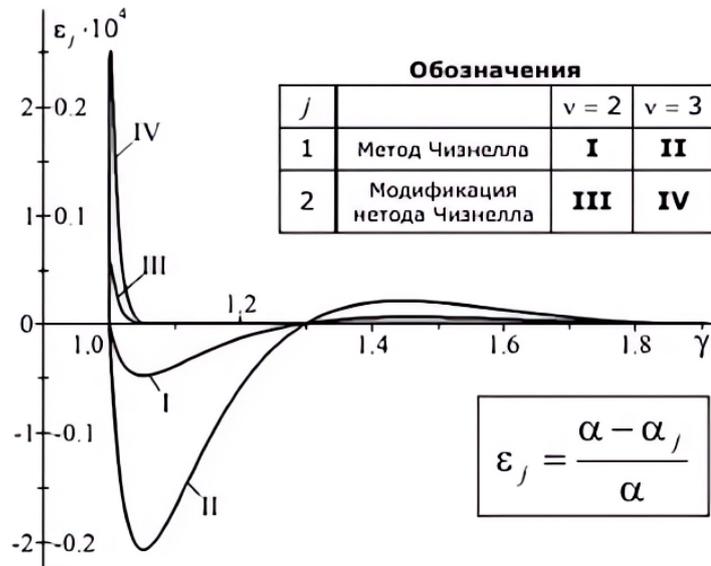


Рисунок 2 — Графики относительных погрешностей  $\varepsilon_j$

Таблица 1 — Сравнение значений показателей автомодельности для сферической УВ

$\gamma$	$\nu = 3$		
	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
1.1	0.7959697783	0.7961041193	0.7960039893
1.2	0.7571418148	0.7571858675	0.7571418148
9/7	0.7365975008	0.7366012865	0.7365975008
1.3	0.7337767349	0.7337765649	0.7337767349
7/5	0.7171745015	0.7171607264	0.7171745015
1.5	0.7044280717	0.7044145907	0.7044280717
1.6	0.6941895155	0.6941808339	0.6941895155
5/3	0.6883768229	0.6883714921	0.6883768229
1.7	0.6857165215	0.6857126448	0.6857165215
1.8	0.6785536857	0.6785528439	0.6785536857
1.9	—	—	—

```
alpha_Mod_ex1 := 0.79600398929276069431
alpha_Mod_ex2 := 0.75714181478068532101
alpha_Mod_ex3 := 0.73659750083781853049
alpha_Mod_ex4 := 0.73377673489631636963
alpha_Mod_ex5 := 0.71717450148908152442
alpha_Mod_ex6 := 0.70442807166027282015
alpha_Mod_ex7 := 0.69418951545655532276
alpha_Mod_ex8 := 0.68837682292251765456
alpha_Mod_ex9 := 0.68571652148494761551
alpha_Mod_ex10 := 0.67855368571974517591
```

Рисунок 3 — Приближенные значения показателя автомодельности по модифицированному методу Чизнелла  $\alpha_2$

**Заключение.** В ходе проделанной работы были рассмотрены ключевые аспекты задачи о сходящейся ударной волне, включая теорию автомодельности. Был представлен метод Чизнелла и его модификация.

Исходя из теоретических сведений была поставлена задача о сходящейся ударной волне и построено ее приближенное аналитическое решение. Было проведено сравнение значений показателей автомодельности, вычисленные по оригинальному и модифицированному методу Чизнелла, с точными значениями, а также построен график относительных погрешностей. Реализована программа с помощью Maple, решающая задачу о сходящейся ударной волне оригинальным и модифицированным методом Чизнелла.