

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Точки либрации в ограниченной задаче трёх тел

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Ровачева Артема Алексеевича

Научный руководитель
доцент, к.т.н., доцент

И.А. Панкратов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2023

Введение. Ограниченная задача трёх тел является одной из наиболее сложных задач в механике. Она заключается в определении движения трёх тел, взаимодействующих друг с другом гравитационной силой, при условии отсутствия других тел в системе. Решение этой задачи находит применение во многих областях науки и техники, например, в астрономии, космической технике, аэрокосмической инженерии и других.

Актуальность работы. Эта задача имеет большое значение, поскольку в настоящее время одной из важнейших задач современной небесной механики является задача о движении искусственного тела (спутника, космического корабля или космической лаборатории) под действием сил этих самых тел. Поэтому эта задача весьма подробно изучается и численными, и аналитическими методами.

Цель данной бакалаврской работы: Исследовать решения ограниченной задачи трёх тел при условии того, что одно из тел будет пассивно действующим и не окажет влияния на два других. Для решения этой цели нужно решить следующие задачи: изучить теоритические сведения из небесной механики касающиеся задачи трёх тел, найти частные решения данной задачи, при которых возникают точки либрации и провести моделирование движения гравитирующих масс.

Структура бакалаврской работы. Бакалаврская работа содержит: введение, четыре раздела, заключение, список использованной литературы и три приложения.

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи.

В первом разделе даны постановка задачи и основные уравнения.

Во втором разделе рассматривается и моделируется движение тел с одним пассивно действующим.

В третьем разделе рассматриваются частные решения ограниченной задачи.

В четвёртом разделе моделируется движения тел для двух случаев из частных решений.

Основное содержание работы. Пусть выбрана некоторая прямоугольная система декартовых координат с началом в фиксированной точке O и с неизменными направлениями осей O_ξ , O_η и O_ζ . Обозначая координаты точки M_i в этой системе буквами ξ_i , η_i , ζ_i , можно написать дифференциальные уравнения движения трех точек следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 \ddot{\xi}_0 = f_{01} m_0 m_1 F_{01} \frac{\xi_1 - \xi_0}{\Delta_{01}} + f_{02} m_0 m_2 F_{02} \frac{\xi_2 - \xi_0}{\Delta_{02}}, \\ m_0 \ddot{\eta}_0 = f_{01} m_0 m_1 F_{01} \frac{\eta_1 - \eta_0}{\Delta_{01}} + f_{02} m_0 m_2 F_{02} \frac{\eta_2 - \eta_0}{\Delta_{02}}, \\ m_0 \ddot{\zeta}_0 = f_{01} m_0 m_1 F_{01} \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\Delta_{01}} + f_{02} m_0 m_2 F_{02} \frac{\zeta_2 - \zeta_0}{\Delta_{02}}, \\ m_1 \ddot{\xi}_1 = f_{10} m_1 m_0 F_{10} \frac{\xi_0 - \xi_1}{\Delta_{10}} + f_{12} m_1 m_2 F_{12} \frac{\xi_2 - \xi_1}{\Delta_{12}}, \\ m_1 \ddot{\eta}_1 = f_{10} m_1 m_0 F_{10} \frac{\eta_0 - \eta_1}{\Delta_{10}} + f_{12} m_1 m_2 F_{12} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\Delta_{12}}, \\ m_1 \ddot{\zeta}_1 = f_{10} m_1 m_0 F_{10} \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{\Delta_{10}} + f_{12} m_1 m_2 F_{12} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\Delta_{12}}, \\ m_2 \ddot{\xi}_2 = f_{20} m_2 m_0 F_{20} \frac{\xi_0 - \xi_2}{\Delta_{20}} + f_{21} m_2 m_1 F_{21} \frac{\xi_1 - \xi_2}{\Delta_{21}}, \\ m_2 \ddot{\eta}_2 = f_{20} m_2 m_0 F_{20} \frac{\eta_0 - \eta_2}{\Delta_{20}} + f_{21} m_2 m_1 F_{21} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\Delta_{21}}, \\ m_2 \ddot{\zeta}_2 = f_{20} m_2 m_0 F_{20} \frac{\zeta_0 - \zeta_2}{\Delta_{20}} + f_{21} m_2 m_1 F_{21} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\Delta_{21}}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} f_{ij} &\neq f_{ji} \\ \Delta_{ij} = \Delta_{ji} &\Rightarrow \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2}, \\ F_{ij} &= F_{ij} \left(t; \Delta_{ij}, \dot{\Delta}_{ij}, \ddot{\Delta}_{ij} \right) \quad (i, j = 0, 1, 2; j \neq i). \end{aligned} \quad (2)$$

Если в уравнениях (1) положить

$$f_{ji} = f_{ij} = f = \text{const}, \quad F_{ji} = F_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}^2},$$

то получим обычные уравнения движения классической задачи трех тел (материальных точек) в абсолютной системе координат.

Законы сил F_{ij} в уравнениях (1) являются заданными функциями, удовлетворяющими тем общим требованиям, которые обеспечивают существование и единственность решения системы (1) при произвольно заданных начальных

значениях

$$\xi_i^{(0)}, \eta_i^{(0)}, \zeta_i^{(i)}, \dot{\xi}_i^{(0)}, \dot{\eta}_i^{(0)}, \dot{\zeta}_i^{(0)} \quad (i = 0, 1, 2),$$

для которых ни одно из начальных трех взаимных расстояний не равно нулю.

Возьмём начало новой системы координат в точке M_0 , оставляя новые координатные оси Ox, Oy, Oz , соответственно параллельными абсолютным осям. Обозначая через $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ координаты точек M_1 и M_2 в новой системе, тогда

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 - \xi_0, y_1 = \eta_1 - \eta_0, z_1 = \zeta_1 - \zeta_0, \\ x_2 = \xi_2 - \xi_0, y_2 = \eta_2 - \eta_0, z_2 = \zeta_2 - \zeta_0, \end{cases} \quad (3)$$

в результате получены новые уравнения движения в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{m_0 F_{10} + m_1 F_{01}}{r_1} x_1 - m_2 F_{02} \frac{x_2}{r_2} + m_2 F_{12} \frac{x_2 - x_1}{\Delta}, \\ \ddot{y}_1 = -\frac{m_0 F_{10} + m_1 F_{01}}{r_1} y_1 - m_2 F_{02} \frac{y_2}{r_2} + m_2 F_{12} \frac{y_2 - y_1}{\Delta}, \\ \ddot{z}_1 = -\frac{m_0 F_{10} + m_1 F_{01}}{r_1} z_1 - m_2 F_{02} \frac{z_2}{r_2} + m_2 F_{12} \frac{z_2 - z_1}{\Delta}, \\ \ddot{x}_2 = -\frac{m_0 F_{20} + m_2 F_{02}}{r_2} x_2 - m_1 F_{01} \frac{x_1}{r_1} + m_1 F_{21} \frac{x_1 - x_2}{\Delta}, \\ \ddot{y}_2 = -\frac{m_0 F_{20} + m_2 F_{02}}{r_2} y_2 - m_1 F_{01} \frac{y_1}{r_1} + m_1 F_{21} \frac{y_1 - y_2}{\Delta}, \\ \ddot{z}_2 = -\frac{m_0 F_{20} + m_2 F_{02}}{r_2} z_2 - m_1 F_{01} \frac{z_1}{r_1} + m_1 F_{21} \frac{z_1 - z_2}{\Delta}, \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим более удобно:

$$\begin{cases} r_1 = \Delta_{01} = \Delta_{10} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ r_2 = \Delta_{02} = \Delta_{20} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \\ \Delta = \Delta_{12} = \Delta_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, F_{01} и F_{10} суть функции $t, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1$; F_{02} и F_{20} – функции $t, r_2, \dot{r}_2, \ddot{r}_2$; наконец, F_{12} и F_{21} – функции $t, \Delta, \dot{\Delta}, \ddot{\Delta}$.

Уравнения (4) составляют систему 12-го порядка с шестью неизвестными функциями, определяющую движения точек M_1 и M_2 относительно точки M_0 и неизменных осей.

Далее был рассмотрен случай с одним пассивно действующим центром, где уравнения движения приняли вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{m_0 F_{10} + m_1 F_{01}}{r_1} x_1 \\ \ddot{y}_1 = -\frac{m_0 F_{10} + m_1 F_{01}}{r_1} y_1 \\ \ddot{z}_1 = -\frac{m_0 F_{10} + m_1 F_{01}}{r_1} z_1, \end{cases} \quad (6)$$

что составляет независимую систему трех уравнений с тремя неизвестными, определяющую движение точки M_1 относительно M_0 , и

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = -\frac{m_0 F_{20}}{r_2} x_2 - \frac{m_1 F_{01}}{r_1} x_1 + \frac{m_1 F_{21}}{\Delta} (x_1 - x_2), \\ \ddot{y}_2 = -\frac{m_0 F_{20}}{r_2} y_2 - \frac{m_1 F_{01}}{r_1} y_1 + \frac{m_1 F_{21}}{\Delta} (y_1 - y_2), \\ \ddot{z}_2 = -\frac{m_0 F_{20}}{r_2} z_2 - \frac{m_1 F_{01}}{r_1} z_1 + \frac{m_1 F_{21}}{\Delta} (z_1 - z_2). \end{cases} \quad (7)$$

Промоделируем движение M_1 относительно M_0 по формулам (7), а также по первым и вторым производным от расстояния (5).

Массу тела M_0 возьмём равной 10, массу тела M_1 равной 100.

Системы сил F_{10} , F_{01} , F_{20} , F_{21} , которые потребуются для моделирования движения будут считаться по следующим формулам:

$$\begin{cases} F_{01} = \frac{f_2 \cos(t)}{\sqrt{x^2 y^2 z^2}}, \\ F_{10} = \frac{f_1 \sin(t)}{\sqrt{x^2 y^2 z^2}}, \\ F_{20} = \frac{f_2}{\sqrt{x^2 y^2 z^2}}, \\ F_{21} = \frac{f_2}{\sqrt{x^2 y^2 z^2}} \end{cases}$$

Начальные точки тел - $M_0 : x = 0, y = 0, z = 0$; $M_1 : x = 0, y = 0, z = 0$.

После было изменено значение массы тела, движение которого рассматривается, то есть M_1 (которое отображается на графике оранжевым цветом), на 200, увеличив массу в два раза. Далее изменили начальные положения тел.

В соответствии с 1, рассматривая его относительно рисунка 2 можно сделать вывод, что масса тела влияет только на крутость поворота совершаемого

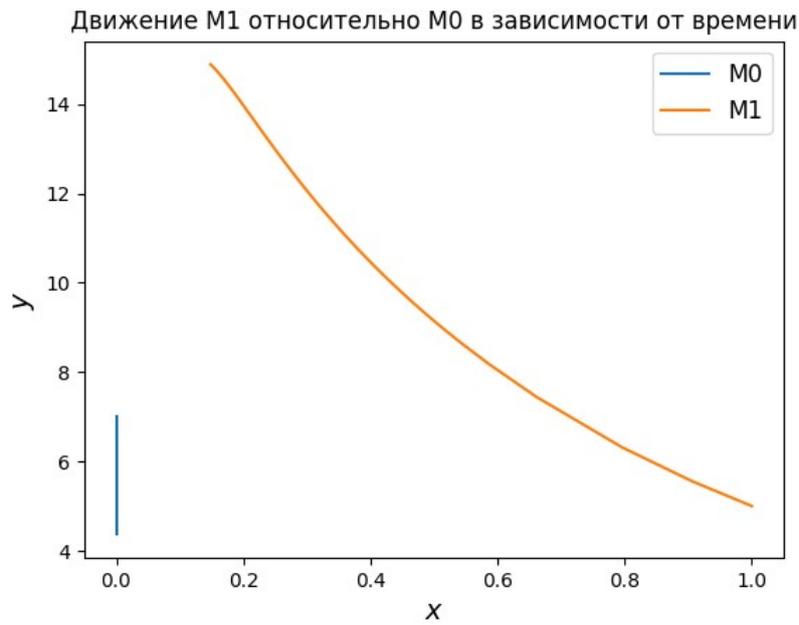


Рисунок 1

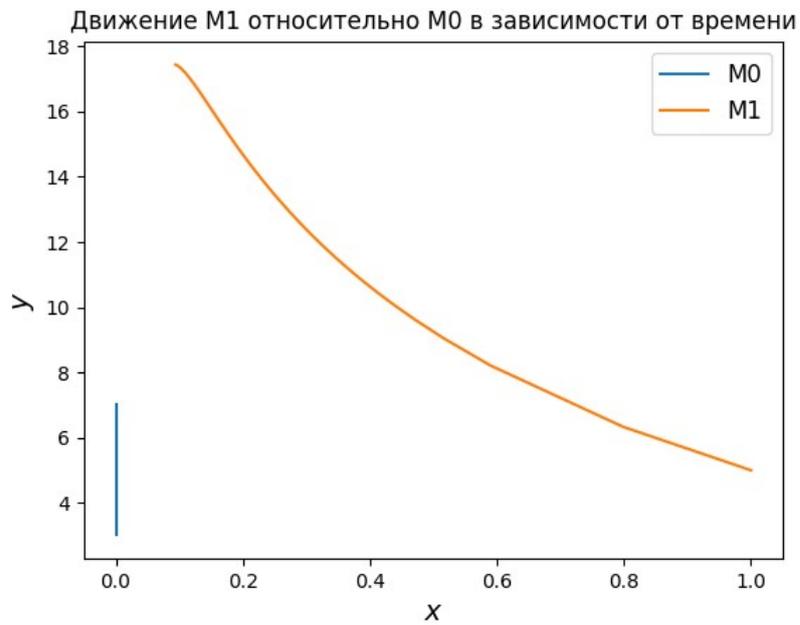


Рисунок 2

телом M_1 . Каких-то сильных различий больше не имеется. В соответствии с рисунком 3, сравнивая его с рисунком 2 можно сделать вывод, что чем ближе изначальное положение тел друг к другу, тем сильнее рассматриваемое тело M_1 отдаляется от тела M_0 .

Движение M1 относительно M0 в зависимости от времени

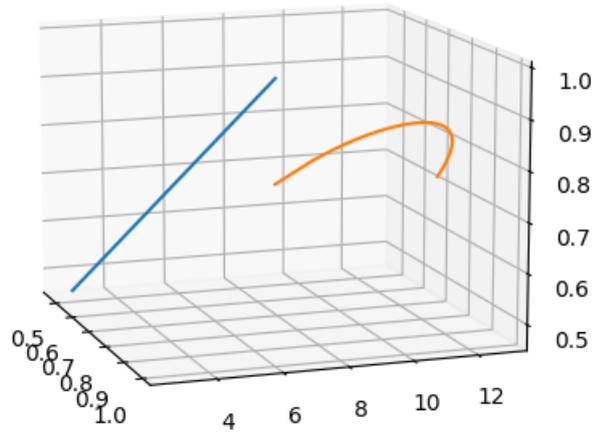


Рисунок 3

Уравнения (6) как раз и являются уравнениями общей (или обобщенной) ограниченной задачи трех тел (трех материальных точек). Отметим при этом, что масса m_2 пассивной точки M_2 не входит в эти уравнения и может быть какой угодно. Просто эта масса не оказывает никакого действия на две другие массы. Можно считать, так же как это делается часто в математических классических исследованиях, что m_2 равна нулю, и в результате такого предположения, получаем те же самые уравнения (7).

Далее рассматривается преобразование Нехвила. Преобразование Нехвила заключается в замене координат пассивной точки x, y, z новыми переменными посредством формул

$$x = r_1\xi, \quad y = r_1\eta, \quad z = r_1\zeta,$$

где радиус-вектор r_1 точки M_1 есть известная функция времени, а в замене независимой переменной t новой независимой переменной - полярным углом v - посредством интеграла площадей

$$cdt = r_1^2 d\vartheta$$

Преобразованные уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{dv^2} - 2\frac{d\eta}{dv} = \frac{r_1^3}{c^2}[F \cdot \xi + \Xi] \\ \frac{d^2\eta}{dv^2} + 2\frac{d\xi}{dv} = \frac{r_1^3}{c^2}[F \cdot \eta + \text{H}] \\ \frac{d^2\zeta}{dv^2} + \zeta = \frac{r_1^3}{c^2}[F \cdot \zeta + \text{Z}]. \end{cases} \quad (8)$$

Для определения постоянных ξ_0 и η_0 , мы будем иметь следующие два уравнения:

$$\begin{cases} \Phi(t; \xi, \eta) = F \cdot \xi + \Xi = 0, \\ \Psi(t; \xi, \eta) = F \cdot \eta + \text{H} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

В уравнения (9) не будут входить производные от координат Нехвила, равно как и от величин $\bar{\rho}$, $\bar{\Delta}$, так как при постоянных значениях ξ , η , ζ величины $\bar{\rho}$ и $\bar{\Delta}$ также будут некоторыми постоянными, а поэтому все производные от перечисленных величин будут равны нулю.

Однако время t входит явно в уравнения (9) посредством функции r_1 , которая вообще есть функция времени.

Несмотря на это, уравнения (9) могут иметь, при выполнении некоторых дополнительных условий, решения, в которых ξ и η имеют постоянные значения.

Если такие решения существуют, то каждое из них определяет на плоскости ($\xi O \eta$) некоторую постоянную точку, каждую из которых можем назвать, по установившейся традиции, точкой либрации.

Известно, что в плоской, круговой классической задаче мы знаем пять точек либрации, три из которых лежат на прямой, проходящей через точки M_0 и M_1 , а две остальные являются вершинами равностороннего треугольника, основанием которого В неклассической задаче, которая здесь рассматривается, также могут существовать аналогичные решения. Рассматривая сначала случай в котором существуют решения, соответствующие вершинам равностороннего треугольника, допустив, что такие решения существуют, уравнения (9) должны удовлетворяться тождественно при

$$\xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

будем иметь

$$\bar{\rho}_0 = \bar{\Delta}_0 = 1,$$

откуда следует также, что в этом случае

$$r = \Delta = r_1,$$

т. е. треугольник $(M_0M_1M_2)$ действительно окажется равносторонним. Та его вершина которая находится в положительной части плоскости, имеет координаты $\xi_0 = \frac{1}{2}, \eta_0 = +\frac{\sqrt{3}}{2}$, и мы будем обозначать ее (так и в классической задаче) (L_4) , а противоположную ей точку с координатами $\xi_0 = -\frac{1}{2}, \eta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ обозначим (L_5) . Соответствующие решения системы (5.20) будем называть Лагранжевыми решениями (или треугольными). Эти Лагранжевы решения существуют только при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} F_{10}(t; r_1, \dot{r}_1, \vec{r}_1) = F_{20}(t; r_1, \dot{r}_1, \vec{r}_1), \\ F_{01}(t; r_1, \dot{r}_1, \vec{r}_1) = F_{21}(t; r_1, \dot{r}_1, \vec{r}_1). \end{cases} \quad (10)$$

Эти условия показывают, что точка M_0 действует на точки M_1 и M_2 по одному и тому же закону и что точка M_1 также действует на точки M_0 и M_2 тоже по одному закону, вообще отличному от предыдущего.

Условия (10) являются необходимыми и достаточными для существования Лагранжевых решений и выполняются, например, всегда, если в рассматриваемой механической системе царствует один единственный закон, т. е. если

$$F_{01} = F_{10} = F_{20} = F_{21} = F,$$

в частности, если

$$F = F(r_1),$$

причем активные массы m_0 и m_1 совершенно произвольны. Если условие (10) не выполняется, то не допускается Лагранжево решение в форме равностороннего треугольника, но это не значит, что не существуют решения другого

типа. Например, если $m_0 = m_1$, то при выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} F_{10}(t; r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1) &= F_{01}(t; r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1), \\ F_{20}(t; r, \dot{r}, \ddot{r}) &= F_{21}(t; r, \dot{r}, \ddot{r}) \end{aligned} \right\}$$

существует решение в форме равнобедренного треугольника с основанием (M_0M_1) и с вершинами в точках с координатами

$$\xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta = \pm\eta_0,$$

причем η_0 остается совершенно произвольной, равной высоте равнобедренного треугольника, а боковые стороны одинаковы, так как:

$$\bar{\rho}_0 = \bar{\Delta}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\bar{\eta}_0^2}.$$

Результаты моделирования движения тел для этих случаев показаны в соответствии с рисунком 4.

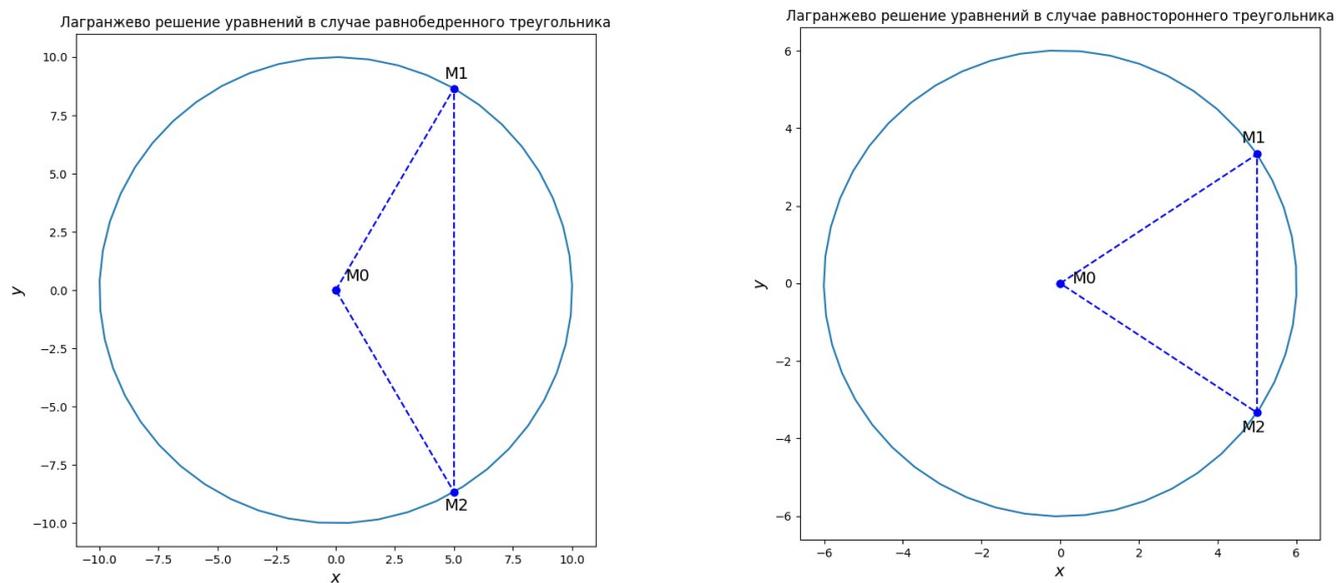


Рисунок 4

Заключение. В ходе исследования ограниченной задачи трёх тел были рассмотрены различные методы её решения. Также были исследованы особенности движения системы трёх тел при различных начальных условиях, а также влияние параметров масс на её поведение. В результате проведённой работы были промоделированы движения тел, при различных условиях, с помощью Matplotlib. На основе графиков, сделаны выводы и описаны особенности движения тел.