



**Введение.** Методами нулевого порядка называются методы, в которых используются только значения функции и не используются ее производные. Различные алгоритмы нулевого порядка основаны на идее обследования окрестности выбранной точки путем пробных шагов в нескольких направлениях. Это могут быть, например, координатные направления. При этом последовательно меняется по одной координате исходной точки. Другая идея методов нулевого порядка состоит в отказе от последовательного поиска, то есть от вычисления новых точек по ранее полученным значениям функции, ее градиента или матриц Гессе. Это идея так называемого случайного поиска.

**Основное содержание работы.** Методы одномерной оптимизации. В некоторых случаях ограничения в задаче оптимизации позволяют через один из параметров оптимизации выразить остальные и исключить их из целевой функции. В результате задача будет сведена к поиску наибольшего или наименьшего (в зависимости от цели оптимизации) значения скалярной действительной функции  $f(x)$ ,  $x \in D(f) \subset R$ , выражающей критерий оптимальности. Выбирая тот или иной знак перед этой функцией, всегда можно ограничиться лишь поиском ее наименьшего значения в области определения  $D(f)$ , заданной с учетом ограничений на параметр оптимизации  $x$ . Поэтому далее в этой главе будем рассматривать задачу

$$f(x) \rightarrow \min, x \in D(f) \subset R$$

поиска наименьшего значения  $f_* = f(x)$  функции  $f(x)$  и точки  $x, \in D(f)$ , в которой  $f(x)$  принимает это значение. Для краткости будем говорить об одномерной минимизации, имея в виду нахождение наименьшего значения функции  $f(x)$  на множестве  $D(f)$  и точек, в которых это значение достигается.

Изучение методов одномерной минимизации важно не только для решения задачи, имеющей самостоятельное значение. Эти методы являются также существенной составной частью методов многомерной минимизации, при помощи которых находят наименьшее значение действительных функций многих переменных.

Если функция дифференцируема в промежутке, то, возможно использование необходимого и достаточного условий локального минимума. Однако в прикладных задачах нередки ситуации, когда трудно вычислить производные функции (например, если функция не задана в аналитическом виде). Более того, не исключено, что значения функции известны или могут быть вычислены только в отдельных точках. В таких ситуациях использование необходимого и достаточного условий локального минимума невозможно и следует применять другие методы решения задачи оптимизации. Методы минимизации функции одного переменного, в которых используют значения функции

в точках рассматриваемого промежутка и не используют значения ее производных, называют методами прямого поиска.

Пассивный и последовательный поиск. Рассмотрим задачу одномерной оптимизации  $\min_{x \in [a, b]} \{z = f(x)\}$ . Введем некоторые определения. Монотонность функции. Функция  $f(x)$  является монотонной на интервале, если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из этого интервала, таких, что  $x_1 < x_2$  выполняется неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ , если функция монотонно возрастающая или  $f(x_1) > f(x_2)$ , если функция монотонно убывающая.

Унимодальность. Функция  $f(x)$  является унимодальной на отрезке, если она монотонна по обе стороны от единственной на отрезке точки  $x_0$ , то есть функция  $f(x)$  в полуинтервале  $[a, x_0]$  убывает, а в полуинтервале  $(x_0, b]$  возрастает. Точка  $x_0$  может быть внутренней точкой отрезка  $[a, b]$  или совпадать с одним из его концов. Унимодальная функция не обязательно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

Определение глобального минимума. Функция  $f(x)$ , определённая на множестве  $D$  достигает глобального минимума в точке  $x^* \in D$ , если  $f(x^*) < f(x)$  для всех  $x \in D$ .

Определение локального минимума. Функция  $f(x)$ , определённая на множестве  $D$  имеет локальный минимум в точке  $x^* \in D$ , если существует такая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x^*$ , что для всех  $x$  из этой  $\varepsilon$ -окрестности  $f(x^*) < f(x)$ .

Если функция  $f(x)$  не унимодальна, то наименьший из локальных минимумов будет глобальным минимумом (аналогично - наибольший из локальных максимумов будет глобальным максимумом). Для нахождения аналитического оптимума необходимо найти стационарные или критические точки функции, использовать какое-либо из достаточных условий экстремума (изменение знака первой производной или определенного знака четной производной) и сравнить значения функции в точках локальных экстремумов и граничных значениях.

Пусть требуется найти наименьшее значение или точную нижнюю грань  $f_*$  скалярной действительной функции  $f(x)$  одного переменного на отрезке  $[a, b]$ . Допустим, задан алгоритм вычисления значения функции для любой точки  $x \in [a, b]$ . Можно выделить две группы методов прямого поиска, соответствующие двум различным случаям:

1. Все  $N$  точек  $x_k = \overline{1, N}$ , в которых будут вычислены значения функции, выбирают заранее (до вычисления функции в этих точках).

2. Точки  $x_k$  выбирают последовательно (для выбора последующей точки используют значения функции, вычисленные в предыдущих точках).

В первом случае поиск значения  $f_*$  называют пассивным, во втором называют последовательным.

В прикладных задачах вычисление каждого значения функции может

быть достаточно трудоемким, поэтому лучше выбрать такую стратегию поиска, чтобы значение  $f_*$  с заданной точностью было найдено наиболее экономичным путем. Считаем, что стратегия поиска определена, если:

1. Определен алгоритм выбора точек  $x_k, k = \overline{1, N}$ .
2. Определено условие прекращения поиска. Условие, при выполнении которого значение  $f_*$  считают найденным с заданной точностью.

Оптимальный пассивный поиск. Пусть требуется путем пассивного поиска найти точку  $x_* \in [0, 1]$ , в которой унимодальная функция  $f(x)$  достигает наименьшего значения  $f_* = f(x_*)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Минимаксный метод поиска, в котором информация о значениях функции, вычисленных в предшествующих точках, не может быть использована, называют оптимальным пассивным поиском.

Оптимальный пассивный поиск состоит в выборе точек, равномерно расположенных на отрезке  $[a, b]$ , координаты которых

$$x_k = \frac{(b-a)k}{N+1}, k = 1, 2, \dots, N.$$

При этом длина  $l_N$  интервала, содержащего минимум  $l_N = \frac{2(b-a)}{N+1}$  дает оценку скорости сходимости пассивного поиска с ростом числа  $N$  точек, так как скорость сходимости любого метода прямого поиска можно характеризовать скоростью уменьшения интервала неопределенности с возрастанием  $N$ . Вычисляются значения целевой функции в каждой точке  $f_k = f(x_k)$ , находится наименьшее значение  $f_j$  и, тогда точка оптимума  $x^* \in (x_{j-1}, x_{j+1})$  и можно считать, что  $x^* \equiv x_j \pm \varepsilon$  с точностью  $\varepsilon$ .

Методы последовательного поиска. Предположение об унимодальности функции позволяет разработать адаптивные (или последовательные) алгоритмы поиска оптимального значения. При этом используется понятие интервала неопределенности, как интервала содержащего точку минимума, хотя ее точное положение неизвестно. Важной характеристикой данных методов является количество вычислений значений оптимизируемой функции для получения конечной величины интервала неопределенности, не превышающей заданной величины. Методы ориентированы на нахождение точки оптимума внутри заданного интервала и основаны на свойстве унимодальности функции и не используют информацию о производной функции.

В алгоритмах этих методов вычисляются значения функции в промежуточных точках  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  ( $\lambda_k < \mu_k$ ) интервала неопределенности: если  $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ , то в качестве границ нового интервала рассматривается интервал  $[\lambda_k, \mu_k]$  если  $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$  это будет интервал  $[\lambda_k, \mu_k]$  если  $f(\lambda_k) = f(\mu_k)$ , то оставим интервал  $[\lambda_k, \mu_k]$ .

Такой подход позволяет построить последовательность вложенных интервалов, удовлетворяющей теореме о вложенных отрезках.

Теорема. Пусть даны монотонно возрастающая переменная  $x_n$ , и монотонно убывающая переменная  $y_n$ , причем всегда  $x_n < y_n$ . Если их разность  $x_n - y_n$  стремится к нулю, то обе переменные имеют общий конечный предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$ .

То есть все вложенные интервалы имеют одну общую точку, где достигается минимум функции. Что обеспечивает сходимость методов интервалов. Все алгоритмы различаются только способом определения промежуточных интервалов  $\lambda_k$  и  $\mu_k$ .

Метод дихотомии. Рассмотрим последовательный поиск точки  $x^* \in [0, 1]$  в которой унимодальная функция достигает наименьшего значения  $f_* = f(x)$ . Метод прямого поиска, основанный на делении отрезка пополам, на котором находится точка  $x^*$ , называют методом дихотомии.

Идея метода состоит в вычислении на каждой очередной итерации двух значений целевой функции в точках, отстоящих на величину  $\alpha$  в обе стороны от середины интервала неопределенности. Величина  $\alpha$  в этом методе называется константой различимости, такова, что, с одной стороны, величина  $2\alpha$  была близка к желаемому конечному значению интервала неопределенности, с другой, значения оптимизируемой функции на краях интервала  $2\alpha$  были различимы.

Введем обозначения:  $\varepsilon$  - конечная длина интервала, определяющая точность,  $[a_1, b_1]$  - начальный интервал неопределенности,  $k$  - номер итерации. Пусть на  $k$ -м шаге  $x^* \in [a_k, b_k]$ . На этом отрезке  $[a_k, b_k]$  выберем две точки  $\lambda_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \alpha$ ,  $\mu_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \alpha$  (рис. 7). Вычислим значения в этих точках.  $f(\lambda_k)$ ,  $f(\mu_k)$  и выполним процедуру исключения отрезка, то есть если  $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ , то  $a_{k+1} = \lambda_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ , иначе  $a_{k+1} = a_k$  и  $b_{k+1} = \mu_k$ . Таким образом, построим новый отрезок  $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ . Длина интервала неопределенности после  $k$ -ой итерации

$$|b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{1}{2^k} (b_1 - a_1) + 2\alpha \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

Отсюда можно вычислить число итераций для достижения необходимой точности  $\varepsilon$ , потребуется  $n \geq \frac{\ln((b_1 - a_1)/\varepsilon)}{\ln 2}$  итераций. На каждой итерации минимизируемая функция вычисляется дважды.

Метод золотого сечения. Известно, что золотым сечением отрезка называют такое его деление на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей.

Термин "Золотое сечение" было введено Леонардо да Винчи. Золотое сечение широко применяли при композиционном построении многих произведений мирового искусства, в том числе в античной архитектуре в эпоху Возрождения.

Идея метода состоит в использовании на каждой итерации для сокращения интервала неопределенности одной из внутренних точек предыдущей итерации. Рассмотрим  $k$ -й шаг последовательного поиска. Чтобы выполнить процедуру исключения отрезка на этом шаге, отрезок

$$[a_k, b_k]$$

необходимо двумя внутренними точками  $x_{k1}, x_{k2}, x_{k1} < x_{k2}$ , разделить на три части. Эти точки выберем симметрично относительно середины отрезка  $[a_k, b_k]$ . В этом случае отрезок  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$  внутри будет содержать одну из точек (другая будет одним из концов отрезка), причем эта точка будет производить золотое сечение отрезка  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ . Это вытекает из равенства длин отрезков  $[a_k, x_{k1}]$  и  $[x_{k2}, b_k]$ . Таким образом, на  $(k + 1)$ -м шаге в одной из точек  $x_{k+1,1}, x_{k+1,2}$  значение функции вычислять не нужно. При этом отношение  $l_k/L_{k+1}$  длин отрезков сохраняется от шага к шагу:

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \frac{l_{k+1}}{l_{k+2}} = \tau = \text{const}$$

Число  $\tau$  называют отношением золотого сечения.

Последовательный поиск, в котором на  $k$ -м шаге каждая из симметрично выбранных на отрезке  $[a_k, b_k]$  точек  $x_{k1}, x_{k2}$  осуществляет золотое сечение этого отрезка, называют методом золотого сечения. В этом методе каждое исключение отрезка уменьшает оставшийся отрезок в  $\tau$  раз.

Алгоритмы методов золотого сечения и дихотомии аналогичны. Различие состоит лишь в том, что в методе дихотомии расстояние  $2\delta$  между внутренними точками  $x_{k1}, x_{k2}$  отрезка  $[a_k, b_k]$  на каждом  $k$ -м шаге остается неизменным, а в методе золотого сечения оно зависит от номера шага поиска и уменьшается с уменьшением длины  $l_k$  отрезка по мере возрастания номера шага. Действительно, в методе золотого сечения на  $k$ -м шаге поиска внутренними точками отрезка  $[a_k, b_k]$  будут  $x_{k1} = a_k + (1 - 1/\tau)l_k$  и  $x_{k2} = a_k + l_k/\tau$ , а расстояние между ними равно  $x_{k2} - x_{k1} = (2/\tau - 1)l_k = (\sqrt{5} - 2)l_k \approx 0,236068l_k$ .

Метод Фибоначчи. Метод аналогичен методу золотого сечения. Отличие состоит в том, что коэффициент сжатия интервала неопределенности меняется от итерации к итерации согласно последовательности Фибоначчи.

Построение алгоритма такого метода удобнее начать с последнего шага, но предварительно уточним задачу. Располагая возможностью вычислить в  $N$  точках  $x_k \in [0, 1], k = \overline{1, N}$  значения унимодальной на отрезке функции  $f(x)$ , необходимо как можно точнее, т.е. с наименее возможной длиной интервала неопределенности, отыскать точку  $x$  наименьшего значения этой функции на отрезке  $[0, 1]$

При выполнении процедуры исключения отрезка на последнем,  $(N-1)$ -м шаге имеем отрезок  $[a_{N-1}, b_{N-1}]$  длины  $l_{N-1}$  с двумя внутренними точками

$x_{N-1}$  и  $x_N$ , симметрично расположенными относительно середины отрезка на достаточно малом расстоянии  $2\delta$  друг от друга. В этих точках вычислены значения  $f(x_{x_{-1}})$  и  $f(x_N)$  функции  $f(x)$ . Пусть для определенности  $f(x_N) < f(x_{N-1})$ , тогда для нового отрезка  $[a_N, b_N]$  длины  $l_N = l_{N-1}/2 + \delta$  внутренней будет точка  $x_N$ , а точка  $x_{N-1}$  совпадет с одним из его концов. В такой ситуации при выборе  $x_* = x_{N-1}$  длина интервала неопределенности равна пока неизвестной длине  $l_N$  отрезка  $[a_N, b_N]$ . Через  $l_N$  можно выразить длину  $l_{N-1} = 2l_N - 2\delta$  отрезка  $[a_{N-1}, b_{N-1}]$ . Далее в соответствии с получаем

$$\begin{aligned} l_{N-2} &= l_{N+1} + l_N = 3l_N - 2\delta, \quad l_{N-3} = l_{N-2} + l_{N-1} = 5l_N - 4\delta, \\ l_{N-4} &= l_{N-3} + l_{N-2} = 8l_N - 6\delta, \quad l_{N-5} = l_{N-4} + l_{N-3} = 13l_N - 10\delta, \end{aligned}$$

и в общем виде

$$l_{N-K} = F_{K+2}l_N - 2F_K\delta, \quad K = \overline{0, N-1}$$

где коэффициенты  $F_n$  определены рекуррентным соотношением

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, \quad m = \overline{3, N-1}, \quad F_1 = F_2 = 1.$$

Так как при  $K = N-1$  длина  $l_{N-K} = l_1 = 1$  отрезка  $[0, 1]$  известна, то можно найти длину интервала неопределенности

$$l_N^\gamma = \frac{l_1}{F_{N+1}} + 2\delta \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}},$$

Существует алгоритм прямого поиска, удовлетворяющий соотношению. Все коэффициенты  $F_m$  принадлежат множеству  $\mathbb{N}$  натуральных чисел, и их называют числами Фибоначчи.

Метод, использующий числа Фибоначчи для выбора длин отрезков  $l_k$ , а значит, и точек  $x_k \in [0, 1]$ ,  $k = \overline{1, N}$ , в которых вычисляются значения минимизируемой функции, называют методом Фибоначчи или оптимальным последовательным поиском. Если на первом шаге поиска ( $k-1, K = N-1$ ) интервал неопределенности имеет длину  $l_1$ , то в соответствии с (3.12) и (3.14) длина  $l_2$  нового отрезка  $[a_2, b_2]$  равна

$$\begin{aligned} l_2 &= F_N l_N - 2l_{N-2} = \frac{F_N}{F_{N+1}} l_1 + 2\delta \frac{F_N F_{N-1} - F_N F_{N-2}}{F_{N+1}} = \\ &= \frac{F_N}{F_{N+1} l_1 + (-1)^{N+1} \frac{2\delta}{F_{N+1}}}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что реализация метода Фибоначчи предполагает априорное задание требуемого количества  $N$  вычисляемых значений функции (или количества шагов поиска). Этот параметр необходим для реализации первого

шага алгоритма при выборе точек  $x_{11}$  и  $x_{12}$  деления отрезка  $[a_1, b_1]$ . Если параметр  $N$  по каким-либо причинам не может быть задан заранее, следует использовать другие методы, например дихотомии или Золотого сечения.

Методы многомерной оптимизации. Пока что были рассмотрены одномерные задачи оптимизации, в которых целевая функция зависела только от одного аргумента. Однако подавляющее число реальных задач оптимизации, представляющих практический интерес, являются многомерными: в них целевая функция зависит от нескольких аргументов, причем иногда их число может быть весьма большим.

Математическая постановка таких задач аналогична их постановке в одномерном случае: ищется наименьшее (наибольшее) значение целевой функции, заданной на некотором множестве  $G$  возможных значений ее аргументов.

Как и в одномерном случае, характер задачи и соответственно возможные методы решения существенно зависят от той информации о целевой функции, которая нам доступна в процессе ее исследования. В одних случаях целевая функция задается аналитической формулой, являясь при этом дифференцируемой функцией. Тогда можно вычислить ее частные производные, получить явное выражение для градиента, определяющего в каждой точке направления возрастания и убывания функции, и использовать эту информацию для решения задачи. В других случаях никакой формулы для целевой функции нет, а имеется лишь возможность определить ее значение в любой точке рассматриваемой области (с помощью расчетов, в результате эксперимента и т.д.). В таких задачах в процессе решения мы фактически можем найти значения целевой функции лишь в конечном числе точек, и по этой информации требуется приближенно установить ее наименьшее значение для всей области.

Метод покоординатного спуска. Рассмотрим еще один простой метод безусловной оптимизации, идея которого состоит в том, чтобы свести оптимизацию в многомерном пространстве к многократно повторяемой одномерной оптимизации. Метод состоит в следующем:

1. В начальной точке  $x^0$  фиксируем все координаты, кроме  $x_j$
2. Определяем такое значение  $x_j$  при котором целевая функция достигает минимума. Это одномерная задача, так как все переменные, кроме  $x_j$ , фиксированы.
3. Фиксируем найденную координату  $x_j$  и все остальные, кроме  $x_2$ .
4. Определяем  $x_2$  из условия минимума целевой функции и т. д., пока не переберем все координаты.
5. Проверяем условия окончания счета и, если они не выполнены, возвращаемся к пункту 1, приняв полученную точку за  $x^0$ . В качестве условия прекращения счета можно взять малое изменение функции после поочередного

изменения всех координат или малые изменения всех координат. Геометрический смысл метода состоит в движении в направлениях, параллельных координатным осям.

При движении вдоль координатной оси идем до точки минимума, то есть до касания некоторой линии (в многомерном случае поверхности) уровня. Ясно, что число шагов зависит от начального приближения и, самое главное, от ориентации линий уровня относительно координатных осей. Так, в задаче минимизации квадратичной формы при ориентации осей эллипсов (в двумерном случае) вдоль координатных осей достаточно однократного изменения всех координат. В овражных случаях при произвольной ориентации оврага относительно координатных осей даже в квадратичной задаче метод работает плохо, тем более в общем случае при искривленном дне оврага.

Метод Нелдера-Мида. Нелдер и Мид предложили метод поиска, сложнее по сравнению с прямым поиском Хука-Дживса, но он оказался весьма эффективным и достаточно легко осуществляем в плане кода. Метод Нелдера-Мида является развитием симплексного метода Спендли, Хекста и Химсворта.

Метод Нелдера-Мида, также известный как метод деформируемого многогранника и симплекс-метод, – метод безусловной оптимизации функции от нескольких переменных.

Вычисляя значения целевой функции в вершинах симплекса, получаем информацию о характере изменения этой функции в области расположения симплекса.

Поиск точки минимума целевой функции с помощью правильных симплексов производится следующим образом:

- На каждой итерации происходит вычисление целевой функции во всех точках симплекса и их упорядочивание по возрастанию значений.

- Затем осуществляется последовательная попытка построить новые симплексы с лучшими значениями целевых функций, путем отражения точек с худшими значениями.

- Если последовательная попытка отражения двух худших вершин оканчивается неудачей, то производится сжатие симплекса к точке с наименьшим значением и осуществляется новая итерация.

- Поиск завершается, как только разность между значениями функции в точках симплекса становится достаточно малой.

При реализации алгоритма используются следующие процедуры: - Процедура отражения:

$$\tilde{x}^{(k)} = 2x_c - x^{(k)}$$

- Процедура сжатия вовнутрь ( $0 < \alpha < 1$ ):

$$\tilde{x}^{(k)} = x_c - \alpha (x_c - x^{(k)}) .$$

Метод Гаусса - Зейделя. В качестве направлений поиска используются координатные векторы

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , где  $e_j = \{0, 0, \dots, 1, \dots, 0\}$ . Таким образом, в поиске по направлению меняется только переменная  $x_j$ , остальные переменные фиксируются. Задаем начальную точку  $x^0$ . Рассматриваем направление поиска  $\vec{S}_1 = \vec{e}_1$ . Находим параметр  $\lambda_1$  из условий одномерной минимизации  $\min_{\lambda} f(x^0 + \lambda \vec{e}_1)$ . Обозначим промежуточную точку  $\vec{y}^{(1)} = x^0 + \lambda_1 \vec{e}_1$ . Перейдем ко второму направлению  $\vec{e}_2$ . Находим параметр  $\lambda_2$  из условия одномерной оптимизации  $\min_{\lambda} f(y^{(1)} + \lambda \vec{e}_2)$ , обозначим  $y^{(2)} = y^{(1)} + \lambda_2 \vec{e}_2$ , проходим по всем направлениям координатных осей, определяя  $y^{(j+1)} = y^{(j)} + \lambda_{j+1} \vec{e}_{j+1}$ , где  $\lambda_j$  находим из условия  $\min_{\lambda} f(y^{(j)} + \lambda \vec{e}_{j+1})$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ . Следующая точка  $x^{(1)} = y^{(n)}$ . Рассматриваем ее как стартовую, далее повторяем процесс поиска по направлениям координатных осей. Процесс поиска останавливаем при выполнении условия  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$  или  $|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная точность. В качестве оптимального решения выбираем  $x^* = x^{(k+1)}$ ,  $f^* = f(x^*)$ .

Метод Хука - Дживса. Метод был разработан в 1961 году, но до сих пор является весьма эффективным и оригинальным. На разработку методов прямого поиска для определения минимума функций и переменных было затрачено много усилий. Методы прямого поиска являются методами, в которых используются только значения функции. Практика показала, что этот метод эффективен и применим для широкого числа приложений. Рассмотрим функцию двух переменных.

Простейшим методом поиска является метод покоординатного спуска. Из точки А мы производим поиск минимума вдоль направления оси  $x_1$ , таким образом, находим точку В, в которой касательная к линии постоянного уровня параллельна оси  $x_1$ . Затем, производя поиск из точки В в направлении оси  $x_2$ , получаем точку С, производя поиск параллельно оси  $x_1$ , получаем точку D, и т. д. В выбранном направлении осуществляют спуск до тех пор, пока значение функции уменьшается. После того как в данном направлении не удастся найти точку с меньшим значением функции, уменьшают величину шага спуска. Если последовательные дробления шага не приводят к уменьшению функции, от выбранного направления спуска отказываются и осуществляют новое обследование окрестности и т. д.

Эффективность прямого поиска точки минимума ограниченной снизу целевой функции можно повысить, если на каждом  $k$ -м шаге поиска соответствующим образом выбирать направление спуска. Для этого на каждом  $k$ -м шаге выделяют предварительный этап исследующего поиска. Целью этого этапа является выбор направления спуска путем исследования поведения целевой функции  $f(\vec{x})$  в окрестности точки  $x^{(k-1)}$ , найденной на предыдущем

шаге. В результате выполнения этапа исследующего поиска находится точка  $\tilde{x}^{(k)}$ , для которой  $f(\tilde{x}^{(k)}) < f(x^{(k-1)})$ . Направление спуска, завершающего  $k$ -й шаг поиска, определяется вектором  $\tilde{x}^{(k)} - x^{(k-1)}$ . Такая стратегия поиска, предложенная в 1961 г., получила название метода Хука - Дживса, который состоит из двух этапов: исследующего поиска и поиска по образцу.

Исследующий поиск заключается в поиске базовой точки. Перебираем точки вдоль координатных направлений, аналогично методу Гаусса Зейделя. Если значение целевой функции в пробной точке не превышает значения в исходной, то шаг поиска рассматривается как успешный. В противном случае необходимо вернуться в предыдущую точку и сделать шаг в противоположном направлении. После перебора всех  $N$  координат исследующий поиск заканчивается. Полученная точка называется базовой. Поиск по образцу: заключается в реализации единственного шага из полученной базовой точки вдоль прямой, соединяющей её с предыдущей базовой точкой.

Метод вращающихся направлений. Существует еще один альтернативный подход к решению задач минимизации овражных функций, основанный на итеративной перестройке системы ортогональных направлений таким образом, чтобы они определяли движение вдоль дна оврага. Такие методы получили название методов вращающихся направлений или методы Розенброка.. Метод, реализующий эту стратегию поиска, также предусматривает проведение исследующего поиска на каждом  $k$ -м шаге. Целью исследующего поиска является выбор текущего направления спуска с учетом информации о поведении целевой функции в окрестности точки  $x^{(k-1)}$ , найденной на предыдущем шаге.

Отличие этого метода от метода Хука - Дживса состоит в способе выбора направлений исследующего поиска. Если в методе Хука - Дживса они фиксированы и коллинеарны направлениям векторов стандартного базиса, то в рассматриваемом методе выбор этих направлений проводят в процессе минимизации целевой функции путем построения на каждом  $k$ -м шаге поиска нового ортонормированного базиса методом Грамма - Шмидта.

Экспериментальное сравнение алгоритмов Хука - Дживса и Розенброка по числу вычислений целевой функции в процессе оптимизации говорит в пользу алгоритмов вращающихся направлений, это выигрыш растет при увеличении размерности. Но необходимо учитывать более существенные вычислительные затраты на пересчет системы ортогональных направлений. Для минимизации овражных функций с извилистыми оврагами, у которых крутизна склонов намного больше, чем крутизна дна оврага, возможно применение комбинированных алгоритмов. На первом этапе - простые алгоритмы (покоординатного спуска), на втором более сложные.

Условием перехода на второй этап может служить соотношение

$f(x_k) \leq \Theta f(x_1)$ , где  $x_1$  — начальная точка поиска,  $0 \leq \Theta \leq 1$  подбирается в зависимости от характера и размерности вектора оптимизационных переменных. Например, для  $n = 2$ ,  $\Theta \in [0, 6; 0, 8]$ , при  $n = 4$ ,  $\Theta \in [0, 65; 0, 75]$ , при  $n = 6$ ,  $\Theta \in [0, 1; 0, 2]$

Методы сопряженных направлений. Разработан целый ряд методов безусловной оптимизации, использующих понятие сопряженности векторов, которые определяют направление поиска на смежных итерациях. Важность рассмотрения этого вида методов заключается в том, что для функций, имеющих квадратичный вид, они обеспечивают сходимость к точке минимума за число шагов, не более размерности задачи. Данный метод подходит также и для других функций после разложения в ряд Тейлора в окрестности точки оптимума.

Основная идея: если квадратичную функцию  $n$  переменных привести к виду суммы полных квадратов, то её оптимум может быть найден в результате  $n$  одномерных поисков по преобразованным координатным направлениям. Процедура преобразования квадратичной функции  $q(x) = a + bx + \frac{1}{2}(Qx, x)$  к виду суммы полных квадратов эквивалентна нахождению такой матрицы преобразования  $U$ , которая приводит матрицу квадратичной формы  $(Qx, x)$  к диагональному виду. Квадратичная форма  $(Qx, x)$  путём преобразования  $x = Uy$  приводится к виду:  $(Dy, y)$ , где  $D$  — диагональная матрица. Вместо координат вектора  $x$  в стандартной координатной системе, используются его координаты в новой системе, задаваемой векторами  $y_j$ . Поскольку  $y_j$  совпадают с главными осями квадратичной формы, то матрица  $D$  — диагональная. Таким образом, с помощью преобразования переменных квадратичной функции строится новая система координат, совпадающая с главными осями квадратичной функции, следовательно, одномерный поиск точки оптимума в преобразованных координатах эквивалентен поиску вдоль каждой из осей квадратичной функции.

**Заключение.** В работе изучены различные методы нулевого порядка: метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод Недлера-Мида, метод Хука-Дживса, метод покоординатного спуска. Были написаны алгоритмы методов дихотомии, золотого сечения, Хука-Дживса и Недлера-Мида.