

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

“САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО”

Кафедра Математической физики и вычислительной математики

Методы решения нелинейных волновых уравнений

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы

направление 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Ивановой Светланы Юрьевны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент

М.Ю. Игнатъев

Заведующий кафедрой

профессор, д.ф.-м.н.

В.А. Юрко

Саратов, 2023 год

Введение. Нелинейные волновые уравнения играют важную роль во многих областях науки и техники, включая физику, математику и биологию. Эти уравнения описывают поведение систем, которые не могут быть описаны линейными моделями. Исследование нелинейных волновых уравнений имеет большое значение для понимания фундаментальных принципов природы, разработки новых технологий, а также для решения практических задач. Таким образом, изучение нелинейных волновых уравнений имеет широкое применение и является важным направлением научных исследований.

В последнее время активно исследуются некоторые новые подходы к решению НУШ, основанные на решении обратной задачи рассеяния. Они дают возможность компенсировать нелинейность оптоволокна и выйти за пределы ограничений линейных методов передачи.

Для решения НУШ методом обратной задачи рассеяния используют систему Захарова-Шабата, которая представляет собой систему однородных дифференциальных уравнений. При этом требуется решить прямую и обратную задачу рассеяния. Для этого можно использовать различные численные алгоритмы: метод Бофкетты-Осборна, метод Абловица-Ладика и метод layer peeling.

Несмотря на то что НУШ может быть проинтегрировано точно методом обратной задачи рассеяния, точные аналитические решения оказываются полезны при решении лишь относительно узкого класса задач. Поэтому для практических приложений в различных областях для интегрирования НУШ, как правило, используются численные методы.

Широкое распространение для решения практических задач получили спектральные методы, использующие быстрое преобразование Фурье. Одним из наиболее широко используемых для интегрирования НУШ подклассов спектральных методов является метод расщепления по физическим процессам.

Целью настоящей квалификационной работы является исследование методов решения нелинейного уравнения Шредингера с помощью численного метода SSFM и, как перспективно развивающегося, МОЗР.

Основное содержание работы Магистерская работа состоит из четырех разделов.

В первом разделе приводятся теоретические сведения о методе обратной задачи рассеяния и история его развития.

Во втором разделе описаны численные методы для решения прямой и обратной задачи рассеяния для системы Захарова-Шабата.

В третьем разделе содержится информация о методе Фурье расщепления по физическим процессам.

В четвертом разделе представлен численный эксперимент.

Прямая задача рассеяния для системы Захарова-Шабата. Рассмотрим задачу Захарова-Шабата на собственные значения:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = -i\zeta v_1 + qv_2, \\ \frac{dv_2}{dx} = i\zeta v_2 + rv_1. \end{cases} \quad (1)$$

Потенциалы q и r достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Быстрое убывание позволяет определить собственные функции $\varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi}$ со следующими граничными условиями при $\zeta = \xi (\zeta = \xi + i\eta - \text{спектральный параметр})$:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{\varphi} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \end{array} \right\} \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{\psi} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{array} \right\} \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (3)$$

Это решение определено в фиксированный момент времени $t = 0$. Теперь, если $u(x, \xi)$ ($u(x, \xi)$ — это 2×1 вектор-столбец с компонентами $u_i(x, \xi), i = 1, 2$)

и $v(x, \xi)$ являются решениями (1), тогда получаем

$$\frac{d}{dx}W(u, v) = 0,$$

Из (2)-(3) видно, что $W(\varphi, \bar{\varphi}) = -1$ и $W(\psi, \bar{\psi}) = 1$. Решения $\psi, \bar{\psi}$ являются линейно независимыми; таким образом, получаем

$$\varphi = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi, \quad (4)$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi} \quad (5)$$

Матрица рассеяния определяется следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Используя (4)-(6) и $W(\varphi, \bar{\varphi}) = -1$, получим

$$a(\xi)\bar{a}(\xi) + b(\xi)\bar{b}(\xi) = 1$$

Обратная задача рассеяния для системы Захарова-Шабата.

Предположим, что данные рассеяния a, \bar{a}, b, \bar{b} являются целыми функциями.

Пусть q, r убывают быстрее любой экспоненты при $|x| \rightarrow \infty$.

Получим следующие интегральные представления для функций $\psi, \bar{\psi}$:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \int_x^\infty K(x, s) e^{i\zeta s} ds,$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, s) \bar{e}^{i\zeta s} ds,$$

где $\zeta = \xi + i\eta, \eta \geq 0$ и K, \bar{K} являются двухкомпонентными векторами, т. е.

$$K(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) \\ K_2(x, s) \end{pmatrix}.$$

Интегральное уравнение Гельфанда - Левитана - Марченко обратной задачи рассеяния имеет вид

$$K_1(x, y) \mp R^*(x + y) \pm \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x, z)R(z + s)R^*(s + y)dsdz = 0.$$

Когда $r = \mp q$, q вещественно, то $R(x)$, $K(x, z)$ также вещественны. Получим потенциалы

$$q(x) = -K_1(x, x)$$

$$r(x) = -2\bar{K}_2(x, x),$$

Связь НУШ и системы Захарова-Шабата. Нелинейное уравнение Шрёдингера

$$iq_t = q_{xx} + 2q^2|q|$$

связано с задачей рассеяния для некоторого линейного оператора. Используя идею прямой и обратной задачи рассеяния, можно решить это уравнение для заданных начальных данных $q(x, 0)$, достаточно быстро убывающих при $|x| \rightarrow \infty$.

Покажем связь системы (1) с НУШ. Наиболее общая временная зависимость (1), содержащая первые производные по t , имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = Av_1 + Bv_2, \\ \frac{dv_2}{dt} = Cv_1 + Dv_2, \end{cases} \quad (7)$$

где A, B, C, D — скалярные функции, не зависящие от v .

Функции A, \dots, D удовлетворяют следующим уравнениям:

$$A_x = qC - rB \quad (8)$$

$$B_x + 2i\zeta B = q_t - 2Aq \quad (9)$$

$$C_x - 2i\zeta = r_t + 2Ar \quad (10)$$

$$(-D)_x = qC - rB$$

Без потери общности в дальнейшем будем считать $A = -D$.

Простейшее разложение, приводящее к нелинейным уравнениям, имеет вид

$$\begin{aligned} A &= A_2\zeta^2 + A_1\zeta + A_0 \\ B &= B_2\zeta^2 + B_1\zeta + B_0 \\ C &= C_2\zeta^2 + C_1\zeta + C_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим (11) в (8)-(10) и приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях ζ . Тогда (9) и (10) в порядке ζ^0 дают уравнения

$$-\frac{1}{2}a_1q_{xx} = q_t - a_2q^2r, \quad (12)$$

$$-\frac{1}{2}a_2r_{xx} = r_t - a_2q^2r, \quad (13)$$

Это пара связанных нелинейных эволюционных уравнений, которые напоминают нелинейное уравнение Шрёдингера. Если положить, что $r = \mp q^*$, то, действительно, получится НУШ. При этом уравнения (12) и (13) будут совместными тогда и только тогда, когда $a_2 = i\alpha$, α вещественно. При $\alpha = 2$, то получим уравнение

$$iq_t = q_{xx} \pm 2q^2q^*.$$

Зависимость данных рассеяния от времени. Зная данные рассеяния

$$S(\zeta) = \left\{ \{\zeta_j\}_{j=1}^N, \quad \{C_j\}_{j=1}^N, \quad \rho(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \right\}$$

можно составить и решить линейные интегральные уравнения обратной задачи рассеяния, что позволяет восстановить рассеивающий потенциал. Это можно сделать для любого момента времени t .

Для построения совместного решения уравнений (1), (7) было показано, что требование $q, r \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow 0$ дает широкий класс уравнений, обладающих тем свойством, что $A \rightarrow A_-(\zeta)$, $D \rightarrow -A_-(\zeta)$, $B, C \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Зависящие от времени собственные функции определяются следующим спо-

собом:

$$\begin{aligned}\varphi^{(t)} &= \varphi e^{A_- t}, & \psi^{(t)} &= \psi e^{-A_- t} \\ \bar{\varphi}^{(t)} &= \bar{\varphi} e^{-A_- t}, & \bar{\psi}^{(t)} &= \bar{\psi} e^{A_- t},\end{aligned}$$

где $\varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi}$ удовлетворяют (1) с зафиксированными граничными условиями (2)-(3). Следует отметить, что уравнение временной эволюции (7) не удовлетворяется при зафиксированных граничных условиях.

Если мы воспользуемся соотношением

$$\varphi = a\bar{\psi} + b\psi \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x},$$

то при $x \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{pmatrix} a_t & e^{-i\zeta x} \\ b_t & e^{i\zeta x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2A_-(\zeta)be^{i\zeta x} \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}b(\xi, t) &= b(\zeta, 0)e^{-2A_-(\zeta)t} \\ a(\xi, t) &= a(\zeta, 0).\end{aligned}\tag{14}$$

Из (14) следует, что собственные значения ζ_k не зависят от времени. Аналогичным образом, воспользовавшись определением нормировочных констант

$$C_j(t) = C_{j,0}e^{-A_-(\zeta_j)t}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где $C_{j,0} \equiv C_j(t = 0)$. В том случае, когда данные рассеяния могут быть продолжены в верхнюю полуплоскость, из соотношения $C_j = b_j/a'_j$ получаем

$$C_j(t) = \frac{b_j(\zeta, t)}{a'_j(\zeta, t)} = \frac{b_j(\zeta, 0)}{a'_j(\zeta, 0)}e^{-2A_-(\zeta_j)t} = C_{j,0}e^{-2A_-(\zeta_j)t}$$

Для НУШ получаем, что

$$A_-(\zeta) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} A(\zeta) = 2i\zeta^2$$

Метод Боффетты-Осборна Его идея заключается в том, что используя дискретизацию комплексного потенциала $q(x, 0)$ за $2M + 1$ шагов со значением q_n в точках $x_n = n\Delta x$, $\Delta x = L/M$. Мы получаем спектральные собственные функции ψ на каждом интервале Δx :

$$\psi(x_n + \Delta x) \approx U(q_n) \psi(x_n), \quad (15)$$

где $U(q_n, \Delta x)$ имеет вид

$$U(q) \approx \exp \left(\Delta x \begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ \mp q^* & i\zeta \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(k\Delta x) - \frac{i\zeta}{k} \sinh(k\Delta x) & \frac{q}{k} \sinh(k\Delta x) \\ \frac{q^*}{k} \sinh(k\Delta x) & \cosh(k\Delta x) + \frac{i\zeta}{k} \sinh(k\Delta x) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$k^2 = \mp |q|^2 - \zeta^2$ - постоянная величина внутри интервала Δx .

Для расчета дискретного спектра $q(x, t = 0)$, требуется вычислить его производную $a'(\zeta) = \frac{\partial(a)}{\partial(\zeta)}$

$$\rho(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a'(\zeta)}$$

Формула для расчета коэффициента отражения

$$\rho(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)}$$

Теперь вводим четырехкомпонентное поле, содержащее ψ и его производную:

$$\Xi(x, \zeta) = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix},$$

где $\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}$.

Для поля Ξ применяя уравнение (16) получаем:

$$\psi(x_n + \Delta x) \approx T(q_n) \psi(x_n),$$

где

$$T(q_n) = \begin{pmatrix} U(q_n) & 0 \\ U'(q_n) & U(q_n) \end{pmatrix}.$$

Дискретизация $q(x, 0)$:

$$q(x, 0) = q_n, \quad x \in \left(x_n - \frac{\Delta x}{2}; x_n + \frac{\Delta x}{2} \right]$$

позволяет записать решения для задачи рассеяния в виде

$$\Xi(x_n) = \prod_{j=n-1}^{-M} T(q_j) \Xi(x_{-M}).$$

Для получения данных рассеяния необходимо найти матрицу рассеяния $S(\zeta)$

$$S(\zeta) = \prod_{j=-M-1}^{-M} T(q_j) = \begin{pmatrix} \Sigma(\zeta) & 0 \\ \Sigma'(\zeta) & \Sigma(\zeta) \end{pmatrix},$$

где

$$\Sigma = \prod_{j=-M-1}^{-M} U(q_j), \quad \Sigma' = \frac{\partial \Sigma}{\partial \zeta}$$

Матрица $S(\zeta)$ содержит численные решения задачи на собственные значения (4)-(5) в интервале $[-L; L]$:

$$\begin{pmatrix} \psi(L, \zeta) \\ \psi'(L, \zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma(\zeta) & 0 \\ \Sigma'(\zeta) & \Sigma(\zeta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(-L, \zeta) \\ \psi'(-L, \zeta) \end{pmatrix},$$

В итоге, получаем коэффициенты перехода и их производные:

$$\begin{aligned} a(\zeta) &= S_{11}(\zeta) e^{2i\zeta L}, \\ b(\zeta) &= S_{21}(\zeta), \\ \frac{\partial a(\zeta)}{\partial \zeta} &= [S_{31} + iL(S_{11} + S_{33})] e^{2i\zeta L}, \\ \frac{\partial b(\zeta)}{\partial \zeta} &= S_{41} + iL(S_{43} - S_{21}). \end{aligned}$$

Метод Боффетты-Осборна имеет второй порядок точности $O(M^2)$.

Метод Абловица-Ладика. При дискретизации $q(x, 0)$ получаем спектральные собственные функции ψ на каждом интервале Δx , которые задаются (15), а функция $U(q)$ принимает вид:

$$U(q) \approx \frac{1}{\sqrt{1 \pm \Delta x^2 |q_m|^2}} \begin{bmatrix} Z & \Delta x q_m \\ \mp \Delta x q_m^* & Z^{-1} \end{bmatrix}, \quad Z = e^{i\zeta \Delta x}$$

Для определения нулей $a(\zeta)$ можно снова применить метод Ньютона. Метод Абловица-Ладика демонстрирует несколько лучшую производительность при применении к вычислению коэффициента отражения, чем метод Боффетты-Осборна. Данный метод имеет второй порядок точности $O(M^2)$.

Метод layer peeling. Алгоритмы LP сравнительно быстры и имеют сложность $O(M^2)$. Некоторые из них дают глобальную ошибку пропорциональную M^{-2} .

Рассмотрим метод LP для алгоритма Абловица-Ладика. Введём обозначение

$$U_{m_1 \rightarrow m_2}(q) = U_{m_2(q)} U_{m_2-1(q)} \times \dots \times U_{m_1(q)}, \quad m_1 \leq m_2,$$

где $U_m(\zeta)$, $U_{1 \rightarrow m}(\zeta)$ являются полиномом Лорана степени m , обладающим свойством, при котором q_m может быть восстановлен из двух наибольших коэффициентов

$$\mp \Delta x \bar{q}_m = \frac{\left[U_{1 \rightarrow m}^{(m-1)} \right]_{21}}{\left[U_{1 \rightarrow m}^{(m)} \right]_{11}}.$$

Таким образом, q_1, \dots, q_m , могут быть восстановлены при помощи $U(\zeta) = U_{1 \rightarrow m}(\zeta)$ следующим шагом:

$$q_m = \pm \Delta x^{-1} \frac{\left[U_{1 \rightarrow m}^{(m-1)} \right]_{21}}{\left[U_{1 \rightarrow m}^{(m)} \right]_{11}}, \quad U_{1 \rightarrow m-1}(\zeta) = U(q_m)^{-1} U_{1 \rightarrow m}(\zeta),$$

где $m = M, M - 1, \dots, 1$ и

$$U(q_m)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta x^2 |q_m|^2}} \begin{bmatrix} Z^{-1} & -q_m \\ \bar{q}_m & Z \end{bmatrix}$$

Метод Фурье расщепления по физическим процессам. Рассмотрим метод Фурье расщепления по физическим процессам (SSFM). Чтобы понять принцип метода, уравнение НУШ удобно записать в виде

$$i \frac{\partial q}{\partial t} = (\hat{D} + \hat{N})q,$$

где $\hat{D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ - дифференциальный оператор, а $\hat{N} = -|q|^2$ - нелинейный оператор.

Метод расщепления по физическим процессам основан на предположении, что распространение с t до $t + h$ происходит в два шага. На первом шаге есть только \hat{N} при $\hat{D} = 0$, а на втором - только \hat{D} при $\hat{N} = 0$. Математически это можно описать так:

$$q(x, t + h) \approx \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N})q(x, t).$$

Экспоненциальный оператор $\exp(h\hat{D})$ может быть вычислен

$$\exp(h\hat{D})B(x, t) = F_x^{-1} \exp[h\hat{D}(-i\omega)]F_x B(x, t), \quad (17)$$

где F_x обозначает преобразование Фурье, $\hat{D}(-i\omega)$ получается из \hat{D} заменой дифференциального оператора $\partial/\partial x$ на $-i\omega$, где ω - частота в спектральном представлении. Использование алгоритма БПФ делает решение уравнения (17) относительно быстрым. SSFM имеет точность до второго порядка по шагу h .

Численный эксперимент. Воспользуемся вышеописанными МОЗР и SSFM к сгенерированному 16-QAM сигналу и применим к нему RRC фильтр. Далее реализуем метод обратной задачи рассеяния, для этого решаем прямую задачу методом Абловица-Ладика и находим коэффициенты рассеяния $a(\zeta)$

и $b(\zeta)$. После используя полученные результаты решаем обратную задачу рассеяния методом layer peeling и находим сигнал $q(x, t)$.

Теперь к сигналу применим метод Фурье расщепления по физическим процессам, описанный выше.

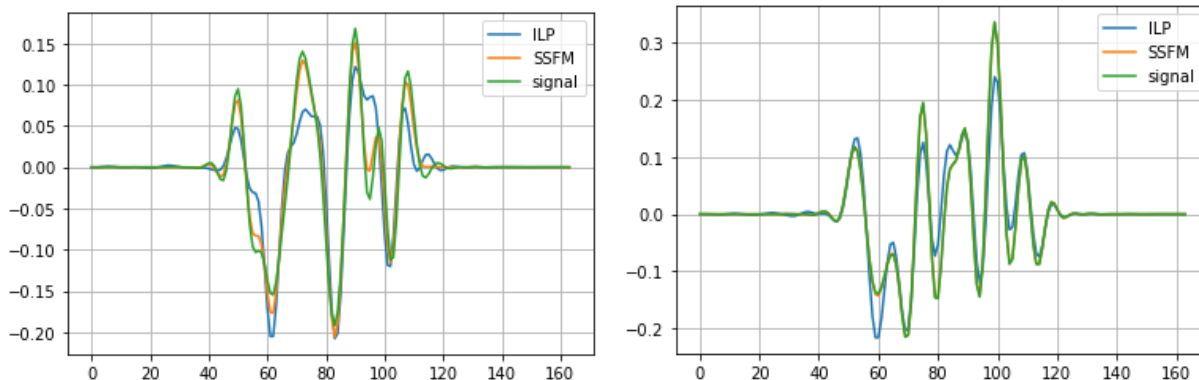


Рисунок 1 — Сравнение МОЗР и SSFM на сигнале при $t = 0.005$ и $t = 0.0005$.

В результате на рисунке 1 видно, что оба метода имеют похожий результат, но с увеличением t метод обратной задачи рассеяния начинает отклоняться от сигнала, в отличие от метода SSFM.

Заключение. В рамках магистерской работы были рассмотрены методы решения нелинейного уравнения Шрёдингера, которое имеет широкое применение в различных областях физики, например, в нелинейной оптике, физике плазмы, теории сверхпроводимости, физике низких температур. Одним из изученных методов был перспективно развивающийся метод обратной задачи рассеяния, для его реализации требуется решение прямой и обратной задачи рассеяния с помощью различных численных алгоритмов. Другим более распространенным численным методом является SSFM, который обладает высокой точностью и быстродействием.

Численный эксперимент показал, что МОЗР хорошо справляется с восстановлением сигнала и обладает большим потенциалом для решения нелинейных волновых уравнений, но SSFM является более точным.