МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математической физики и вычислительной математики

Обратная спектральная задача для функционально-дифференциальных пучков с отклоняющимся аргументом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы

направление 01.04.02— Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Осипова Никиты Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.м.н., доцент ________________ С.А.Бутерин

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________ В.А.Юрко

Саратов 2023

Введение С середины прошлого века значительно вырос интерес к обратным задачам спектрального анализа, которые заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Задачи этого типа возникают в таких прикладных науках как: математика, физика, механика, геофизика, электроника, метеорология и т.д. В ходе исследований, было доказано, что спектры двух краевых задач для одного и того же классического уравнения Штурма-Лиувилля с одним общим граничным условием однозначно определяют потенциал вместе с коэффициентами граничных условий.

Приведём краевые задачи $L_j = L_j(q), j = 0, 1$, вида

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0,$$

где $q(x)$-комплекснозначная функция, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ и $q(x) = 0$ п.в. на $(0, a)$. Задачи $L_j, j = 0, 1$, имеют счётное множество собственных значений $\lambda_{n,j}, n \geq 1$,вида

$$\lambda_{n,j} = \left(n - \frac{j}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2. \tag{2}$$

Интерес к дифференциальным уравнениям с запаздыванием начал расти в связи с необходимостью их применений в естественных и технических науках, включая теорию автоматического управления, теорию автоколебательных систем, долгосрочное прогнозирование в экономике, биофизике и т.д.

Целью данной работы является исследование некоторых обратных спектральных задач, а именно:

1. Обратной задачи для операторов Штурма-Лиувилля с постоянным запаздыванием;
2. Обратной задачи для функционально-дифференциальных пучков второго порядка с двумя запаздываниями;

Основное содержание работы Работа состоит из 3 разделов. **Первый** раздел данной работы посвящен обратной задаче для операторов Штурма-Лиувилля с постоянным запаздыванием. Рассмотрим краевые задачи $L_j = L_j(q), j = 0, 1$, вида (1)-(2). В дальнейшем будем предполагать, что $a \in$

$[\pi/2, \pi)$. Пусть $S(x,\lambda)$ - решение типа синуса уравнения (1), т.е. удовлетворяющее начальным условиям $S(0,\lambda) = 0$, $S'(0,\lambda) = 1$. Собственные значения L_j совпадают с нулями её характерестической функции

$$\Delta_j(\lambda) := S^{(j)}(\pi, \lambda). \tag{3}$$

Имеют место следующие представления:

$$\Delta_0(\lambda) = \frac{\sin\rho\pi}{\rho} - \omega\frac{\cos\rho(\pi-a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\pi-a} w_0(x)\cos\rho x dx, \tag{4}$$

$$\Delta_1(\lambda) = \cos\rho\pi + \frac{\omega\sin\rho(\pi-a)}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{\pi-a} w_1(x)\sin\rho x dx, \tag{5}$$

где $\rho^2 = \lambda$, и

$$w_0(x) = v(-x) + v(x), \quad w_1(x) = v(-x) - v(x), \tag{6}$$

$$v(x) = \frac{1}{4}q\left(\frac{\pi + a - x}{2}\right), \quad \omega = \frac{1}{2}\int\limits_a^{\pi} q(x)dx = \int\limits_0^{\pi-a} w_0(x)dx. \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Спектры $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$ задач $L_j, j = 0$, имеют вид

$$\lambda_{n,j} = \rho_{n,j}^2, \quad \rho_{n,j} = n - \frac{j}{2} + \frac{\omega\cos(n - j/2)a}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \{\varkappa_n\}_{n\geq 1} \in l_2. \tag{8}$$

Пусть $\{n_k\}_{k\geq 1}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел и $n_0 := 0$. Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. Даны подспектры $\{\lambda_{n_k,j}\}_{k\geq 1}, j = 0, 1$, найти $q(x)$.

Согласно Теореме 1 имеем

$$\lambda_{n_k,j} = \rho_{n_k,j}^2, \quad \rho_{n_k,j} = n_k - \frac{j}{2} + \frac{\omega\cos\left(n_k - j/2\right)a}{\pi n_k} + \frac{\varkappa_k}{n_k}, \tag{9}$$

где

$$\omega = \lim_{k\to\infty} \pi n_k \left(\rho_{n_k,1} - n_k + \frac{1}{2}\right) \sin n_k a \sin^{-1}\frac{a}{2}, \quad \lim_{k\to\infty} \cos n_k a = 0. \tag{10}$$

В противном случае, при нахождении ω можно использовать следующую формулу

$$\omega = \lim_{\nu\to\infty} \pi n_{k_\nu} \left(\rho_{n_{k_\nu},0} - n_{k_\nu}\right) \left(\lim_{\nu\to\infty} \cos n_{k_\nu} a\right)^{-1}, \tag{11}$$

где n_{k_ν} такое, что

$$\lim_{\nu\to\infty} \cos n_{k_\nu} a \neq 0.$$

Рассмотрим последовательности

$$\Lambda_0 := \{\mu_{k,0}\}_{k\geq 0}, \quad \Lambda_1 := \{\mu_{k,1}\}_{k\geq 1},$$

где $\mu_{0,0} = 0, \mu_{k,j} := \lambda_{n_k,j}, k \geq 1, j = 0,1$. Обозначим через $m_{k,j}$ кратность значения $\mu_{k,j}$ в последовательности Λ_j. Положим $S_j := \{j\} \cup \{k : \mu_{k,j} \neq \mu_{k-1,j}, k \geq j+1\}$ и рассмотрим две системы функций

$$\{c_n(x)\}_{n\geq 0}, \quad \{s_n(x)\}_{n\geq 1}, \tag{12}$$

где

$$c_{k+v}(x) = \frac{d^v}{d\lambda^v} \cos\rho x \bigg|_{\lambda=\mu_{k,0}}, \quad k \in S_0, v = \overline{0, m_{k,0}-1},$$
$$s_{k+v}(x) = n_k \frac{d^v}{d\lambda^v} \frac{\sin\rho x}{\rho}\bigg|_{\lambda=\mu_{k,1}}, \quad k \in S_1, \quad v = \overline{0, m_{k,1}-1}.$$

В частности, имеем $c_0(x) = 1$. Было доказано, что системы $\{c_n(x)\}_{n\geq 0}$ и $\{s_n(x)\}_{n\geq 1}$ являются полными (являются базисами Рисса) в $L_2(0,b)$ тогда и только тогда, когда и системы $\{\cos n_k x\}_{k\geq 0}$ и $\{\sin(n_k - 1/2)x\}_{k\geq 1}$ являются полными (являются базисами Рисса) в $L_2(0,b)$ соответственно.

Теорема 2. Подспектры $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\geq 1}$ и $\{\lambda_{n_k,1}\}_{k\geq 1}$ задач $L_0(q)$ и $L_1(q)$ однозначно определяет потенциал $q(x)$ тогда и только тогда, когда системы $\{\cos n_k x\}_{k\geq 0}$ и $\{\sin(n_k - 1/2)x\}_{k\geq 1}$ полны в $L_2(0, \pi - a)$.

Теорема 3. Для того, чтобы произвольные последовательности комплексных чисел $\{\mu_{k,j}\}_{k\geq 1}, j = 0, 1$, были подспектрами краевых задач $L_j(q), j = 0, 1$, соответственно, достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

(i) Последовательности $\{\mu_{k,j}\}_{k\geq 1}, j = 0, 1$, имеют асимптотику

$$\mu_{k,j} = \left(n_k - \frac{j}{2} + \frac{\omega\cos(n_k - j/2)\,a}{\pi n_k} + \frac{\varkappa_k}{n_k}\right)^2, \quad \{\varkappa_k\}_{k\geq 1} \in l_2, \tag{13}$$

где $\{n_k\}_{k\geq 1}$ возрастающая последовательность натуральных чисел;

(ii) Каждая из систем $\{\cos n_k x\}_{k\geq 0}$ и $\{\sin(n_k - 1/2)\,x\}_{k\geq 1}$ является базисом Рисса в $L_2(0, \pi - a)$.

Замечание 1. Согласно Теореме 2, при условии (ii) Теоремы 3, решение Обратной задачи 1 единственно.

Во **втором** разделе работы исследуется обратная задача для функционально-дифференциальных пучков второго порядка с двумя запаздываниями. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение с нелинейной зависимостью от спектрального параметра ρ :

$$y''(x) + \rho^2 y(x) = q_0(x)y(x - a_0) + 2\rho q_1(x)y(x - a_1), \quad 0 < x < \pi, \tag{14}$$

которое обобщает уравнение (1).

Предположим, что $a_0 \in [\pi/3, \pi), a_1 \in [\pi/2, \pi)$ и $a_0 + a_1 \geq \pi$. При $\nu = 0, 1$ пусть $q_\nu(x)$ - комплекснозначная функция из $W_2^\nu[a_\nu, \pi]$, $q_\nu(x) = 0$ на $(0, a_\nu)$ и

$$\int_{a_1}^{\pi} q_1(x)dx = 0. \tag{15}$$

Переобозначим через $\{\rho_{n,j}\}$, $j = 0, 1$ спектры краевых задач $\mathcal{L}_j := \mathcal{L}_j(q_0, q_1)$ которые состоят из уравнения (14) вместе с граничными условиями (2). Положим $\mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ и $\mathbb{Z}_1 := \mathbb{Z}$. .

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 2. По спектрам $\{\rho_{n,j}\}_{n\in\mathbb{Z}_j}, j = 0, 1$ найти $q_0(x)$ и $q_1(x)$.

Пусть $y = S(x, \rho)$ - решение типа синуса уравнения (14). В силу его единственности, собственные значения задачи $\mathcal{L}_j$, $\quad j = 0, 1$, совпадают с нулями целой функции

$$\Delta_j(\rho) := S^{(j)}(\pi, \rho), \tag{16}$$

которую называют характеристической функцией $\mathcal{L}_j$. Введём обозначения

$$Q_\nu(x) := \int\limits_{a_\nu}^{x} q_\nu(t)dt, \quad \nu = 0, 1, \quad c_0(x) := \cos x, \quad c_1(x) := \sin x.$$

Лемма 1. Имеет место следующее представление:

$$S(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} - Q_1(x) \frac{\cos \rho\,(x - a_1)}{\rho} + \sum_{\nu=0}^{1} \int\limits_{a_\nu}^{x} K_\nu(x, t) \frac{c_{1-\nu}(\rho(x - t))}{\rho} dt, \tag{17}$$

где $0 \leq x \leq \pi$ и $K_\nu(x, t) = 0$ во внешней части треугольника $a_\nu \leq t \leq x \leq \pi$ при $\nu = 0, 1$ и

$$K_1(x, t) = \frac{1}{2} \left(q_1 \left(x - \frac{t - a_1}{2} \right) + q_1 \left(\frac{t + a_1}{2} \right) \right), \quad a_1 \leq t \leq x \leq \pi, \tag{18}$$

а ядро $K_0(x, t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$K_0(x, t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{t+a_0}{2}}^{x - \frac{t - a_0}{2}} q_0(\tau)d\tau + \frac{A(x, t)}{2}, \quad a_0 \leq t \leq x \leq \pi. \tag{19}$$

В частности, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered} K_0(x, x) = 0, K_0\,(x, a_0) = \frac{Q_0(x)}{2}, K_1\,(x, a_1) = \frac{q_1(x)}{2} + \alpha, \\ A\,(\pi, 2a_0) = A(\pi, \pi) = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Лемма 2. Справедливы следующие представления для характеристических функций:

$$\Delta_0(\rho) = \frac{\sin \rho\pi}{\rho} - \omega \frac{\cos \rho\,(\pi - a_0)}{\rho^2} + \alpha_0 \frac{\sin \rho\,(\pi - a_1)}{\rho^2} + \\ + \sum_{\nu=0}^{1} \int\limits_0^{\pi - a_\nu} w_{0,\nu}(x) \frac{c_\nu(\rho x)}{\rho^2} dx, \tag{21}$$

$$\Delta_1(\rho) = \cos \rho\pi + \omega \frac{\sin \rho\,(\pi - a_0)}{\rho} + \alpha_1 \frac{\cos \rho\,(\pi - a_1)}{\rho} + \\ + \sum_{\nu=0}^{1} \int\limits_0^{\pi - a_\nu} \omega_{1,\nu}(x) \frac{c_{1-\nu}(\rho x)}{\rho} dx, \tag{22}$$

где $w_{j,\nu}(x) \in L_2\,(0, \pi - a_\nu)\,, \quad j, \nu = 0, 1,$ и

$$\int\limits_0^{\pi - a_0} w_{0,0}(x) dx = \omega, \int\limits_0^{\pi - a_1} x w_{0,1}(x) dx = \alpha_0\,(a_1 - \pi)\,, \\ \int\limits_0^{\pi - a_1} w_{1,1}(x) dx = -\alpha_1. \tag{23}$$

Более того,

$$w_{0,\nu}(x) = (-1)^{\nu+1} K_{\nu,2}(\pi, \pi - x), \quad w_{1,\nu}(x) = P_\nu(\pi, \pi - x), \quad \nu = 0, 1, \tag{24}$$

где

$$K_{\nu,1}(x,t) := \frac{\partial}{\partial x} K_\nu(x,t), K_{\nu,2}(x,t) := \frac{\partial}{\partial t} K_\nu(x,t), \\ P_\nu(x,t) := K_{\nu,1}(x,t) + K_{\nu,2}(x,t). \tag{25}$$

Сформулируем теорему о асимптотике спектров.

Теорема 4. Для $j = 0, 1$ и $n \in \mathbb{Z}_j$ справедлива следующая асимптотика:

$$\rho_{n,j} = \rho^0_{n,j} + \frac{\omega}{\pi n} \cos \rho^0_{n,j} a_0 + \frac{\alpha_j}{\pi n} \sin \rho^0_{n,j} a_1 + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \alpha_0, \alpha_1, \omega \in \mathbb{C}, \tag{26}$$

где $\rho_{n,j}^0 = n - j/2$. Более того,

$$\alpha_j = \alpha + (-1)^j \beta, \quad \alpha = \frac{q_1(a_1)}{2}, \quad \beta = \frac{q_1(\pi)}{2}, \quad \omega = \frac{1}{2}\int\limits_{a_0}^{\pi} q_0(x)dx. \tag{27}$$

Соотношения в (24) можно рассматривать как систему уравнений относительно функций $q_0(x)$ и $p(x) := q_1'(x)$, которую называем основным (векторным) уравнением Обратной задачи 2 . Это уравнение можно разбить на две независимые подсистемы для $\nu = 0$ и $\nu = 1$:

$$w_{0,0}(x) = -K_{0,2}\left(\pi, \pi - x; q_0\right), \quad w_{1,0}(x) = P_0\left(\pi, \pi - x; q_0\right), \tag{28}$$

$$w_{0,1}(x) = K_{1,2}(\pi, \pi - x; p), \quad w_{1,1}(x) = P_1(\pi, \pi - x; p), \tag{29}$$

соответственно.

После решения подсистемы (29) имеем

$$p(x) = 2\begin{cases} \left(w_{1,1} + w_{0,1}\right)\left(\pi + a_1 - 2x\right), & a_1 < x < \frac{a_1+\pi}{2}, \\ \left(w_{1,1} - w_{0,1}\right)\left(2x - \pi - a_1\right), & \frac{a_1+\pi}{2} < x < \pi. \end{cases} \tag{30}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $a_1 \in [\pi/2, \pi)$. Тогда $\forall\ w_{0,1}(x), w_{1,1}(x) \in L_2\left(0, \pi - a_1\right)$ линейная подсистема (29) имеет единственное решение $p(x) \in L_2\left(a_1, \pi\right)$, которое может быть построено по формуле (30). Более того:

$$\begin{gathered} \int\limits_{a_1}^{\pi} p(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\pi-a_1} w_{1,1}(x)dx, \\ \int\limits_{a_1}^{\pi} xp(x)dx = \frac{\pi + a_1}{2}\int\limits_{a_1}^{\pi} p(x)dx - \int\limits_{0}^{\pi-a_1} xw_{0,1}(x)dx. \end{gathered} \tag{31}$$

Продифференцировав (19), принимая во внимание (25) и проведя замену переменных имеем

$$2\left(w_{0,0}-w_{1,0}\right)\left(\pi+a_0-2x\right)=\begin{cases} q_0(x), & a_0\le x\le \frac{3a_0}{2},\\ q_0(x)+2v(x), & \frac{3a_0}{2}<x\le \frac{a_0+\pi}{2},\end{cases} \tag{32}$$

$$2\left(w_{0,0}+w_{1,0}\right)\left(2x-\pi-a_0\right)=\begin{cases} q_0(x)+2v(x), & \frac{a_0+\pi}{2}\le x<\pi-\frac{a_0}{2},\\ q_0(x), & \pi-\frac{a_0}{2}\le x\le \pi,\end{cases} \tag{33}$$

где (заметим, что $u_1(0)=0$)

$$v(x)=\begin{cases} \left(u_0-u_1\right)\left(\pi+a_0-2x\right), & \frac{3a_0}{2}<x\le \frac{a_0+\pi}{2},\\ \left(u_0+u_1\right)\left(2x-\pi-a_0\right), & \frac{a_0+\pi}{2}<x<\pi-\frac{a_0}{2}.\end{cases} \tag{34}$$

Очевидно, что формулы (32) и (33) дают решение $q_0(x)$ подсистемы (28) на $I_2:=[a_0,3a_0/2]\cup[\pi-a_0/2,\pi]$.

Следующее следствие говорит о условии разрешимости подсистемы (28) на всем интервале (a_0,π).

Следствие 1. $v|_{I_3}$ не зависит от $q_0|_{I_3}$ тогда и только тогда, когда $a_0\ge 2\pi/5$.

Согласно Следствию 1, формулы (32), (33) дают представление

$$\begin{aligned} v(x)&=2\int\limits_{x+\frac{a_0}{2}}^{\pi}\left(w_{0,0}+w_{1,0}\right)\left(2\tau-\pi-a_0\right)d\tau\int\limits_{\tau-x+\frac{a_0}{2}}^{x-\frac{a_0}{2}}\left(w_{0,0}-w_{1,0}\right)\\ &\left(\pi+a_0-2\zeta\right)d\zeta=\frac{1}{2}\int\limits_{2x-\pi}^{\pi-a_0}\left(w_{0,0}+w_{1,0}\right)(\tau)d\tau\\ &\int\limits_{\pi+2a_0-2x}^{2x-a_0-\tau}\left(w_{0,0}-w_{1,0}\right)(\zeta)d\zeta,\quad \frac{3a_0}{2}<x<\frac{a_0+\pi}{2},\end{aligned} \tag{35}$$

$\forall\ a_0\in[2\pi/5,\pi/2)$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $a_0\in[2\pi/5,\pi)$. Тогда для любых функций $w_{0,0}(x),w_{1,0}(x)\in L_2\left(0,\pi-a_0\right)$ подсистема (28) имеет единственное решение

$q_0(x) \in L_2\,(a_0,\pi)$, которое может быть построено по формуле

$$q_0(x) = 2\begin{cases} (w_{0,0}-w_{1,0})\,(\pi+a_0-2x)\,, & a_0 < x < \frac{3a_0}{2}, \\ (w_{0,0}-w_{1,0})\,(\pi+a_0-2x)-v(x), & \frac{3a_0}{2} < x < \frac{a_0+\pi}{2} \\ (w_{0,0}+w_{1,0})\,(2x-\pi-a_0)-v(x), & \frac{a_0+\pi}{2} < x < \pi-\frac{a_0}{2}, \\ (w_{0,0}+w_{1,0})\,(2x-\pi-a_0)\,, & \pi-\frac{a_0}{2} < x < \pi, \end{cases} \tag{36}$$

где функция $v(x)$ определяется по формуле (35). Более того,

$$\int\limits_{a_0}^{\pi} q_0(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\pi-a_0} w_{0,0}(x)dx. \tag{37}$$

Справедливы следующие асимптотические формулы

$$\omega\cos na_0 = \frac{\gamma_{n,0}+\gamma_{-n,0}}{2}+o(1), \quad \alpha_j \sin\rho^0_{n,j}a_1 = \frac{\gamma_{n,j}-\gamma_{j-n,j}}{2}+o(1), \tag{38}$$

где $|n|\to\infty$,и

$$\gamma_{n,j} := \pi n\left(\rho_{n,j}-\rho^0_{n,j}\right), \quad n\in\mathbb{Z}_j, \quad j=0,1. \tag{39}$$

Выберем возрастающие последовательности натуральных чисел $\{m_{k,l}\}\,, l = \overline{1,3}$, так что

$$r_1 := \lim_{k\to\infty}\cos m_{k,1}a_0 \neq 0, \quad r_l := \lim_{k\to\infty}\sin\rho^0_{m_{k,l},l-2}a_1 \neq 0, \quad l=2,3. \tag{40}$$

В соответствии с (38) и (40) вычислим значения ω,α_0 и α_1по формулам

$$\omega = \lim_{k\to\infty}\frac{\gamma_{m_{k,1},0}+\gamma_{-m_{k,1},0}}{2r_1}, \quad \alpha_j = \lim_{k\to\infty}\frac{\gamma_{m_{k,j+2},j}-\gamma_{j-m_{k,j+2},j}}{2r_{j+2}}, \quad j=0,1, \tag{41}$$

Приведём теорему единственности решения данной задачи в наших условиях.

Теорема 7. Пусть заданы оба спектра $\{\rho_{n,j}\}_{n\in\mathbb{Z}_j}\,, j = 0,1$. Тогда функция $q_0(x)$ однозначно определяется п.в. на объединении интервалов $I_1 := (a_0, 3a_0/2)\cup(\pi-a_0, 2a_0)\cup(\pi-a_0/2,\pi)$, тогда как функция $q_1(x)$ однозначно определяется на всём сегменте $[a_1, \pi]$, то есть

$$q_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \int_{a_1}^{x} p(t)dt, \quad a_1 \leq x \leq \pi. \tag{42}$$

Теорема 8. Пусть $a_0 \geq 2\pi/5$. Тогда для любых произвольных последовательностей комплексных чисел $\{\rho_{n,0}\}_{|n|\in\mathbb{N}}$ и $\{\rho_{n,1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ для того чтобы являться спектрами некоторых краевых задач $\mathcal{L}_0\left(q_0, q_1\right)$ и $\mathcal{L}_1\left(q_0, q_1\right)$ соответственно, необходимо и достаточно удовлетворять следующим двум условиям:

1. При $j = 0, 1$ последовательность $\{\rho_{n,j}\}_{n\in\mathbb{Z}_j}$ имеет вид (26);
2. Для $j, \nu = 0, 1$ порядок целой функции $g_{j,\nu}(\rho)$ не превышает $\pi - a_\nu$, где

$$g_{j,\nu}(\rho) = \theta_j(\rho) + (-1)^{j+\nu}\theta_j(-\rho), \tag{43}$$

$$\theta_0(\rho) = \rho^2\Delta_0(\rho) - \rho\sin\rho\pi + \omega\cos\rho\left(\pi - a_0\right) - \alpha_0\sin\rho\left(\pi - a_1\right), \tag{44}$$

$$\theta_1(\rho) = \rho\Delta_1(\rho) - \rho\cos\rho\pi - \omega\sin\rho\left(\pi - a_0\right) - \alpha_1\cos\rho\left(\pi - a_1\right). \tag{45}$$

в то время как функции $\Delta_j(\rho)$ определяются по формуле

$$\Delta_j(\rho) = \pi^{1-j}\prod_{n\in\mathbb{Z}_j}\frac{\rho_{n,j}-\rho}{\rho^0_{n,j}}\exp\left(\frac{\rho}{\rho^0_{n,j}}\right), \quad j = 0, 1. \tag{46}$$

Третий раздел посвящен более сложному случаю обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с постоянным запаздыванием. Приведём теорему аналогичную Теореме 8 для задачи $\mathcal{L}_j(q), j = 0, 1$, соответствующей (1)-(2).

Обратная задача 3. Зная $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$, $j = 0, 1$, найти потенциал $q(x)$.

Обратная задача 3 является переопределённой. Установлено, что при $a \in [\pi/2, \pi)$ для нахождения потенциала q по $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$, $j = 0, 1$ необходимо и достаточно, чтобы $\{\cos n_k x\}_{k\geq 1}$ и $\{\sin\left(n_k - 1/2\right)x\}_{k\geq 1}$ были полны в $L_2(0, \pi - a)$. Более того, соответствующая асимптотика в совокупности с базисностью Рисса этих двух систем достаточна для разрешимости обратной задачи .

Несмотря на переопределенность Обратной задачи 3 были получены необходимые и достаточные условия её разрешимости при заданных полных спектрах, как частный случай Теоремы 8.

Теорема 9. Пусть $a \in [2\pi/5, \pi)$. Тогда для того, чтобы последовательности комплексных чисел $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$, $j = 0, 1$ были спектрами соответствующих краевых задач $\mathcal{L}_j(q)$, $j = 0, 1$, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли условиям:

1. При $j = 0, 1$, имеет место асимптотика:

$$\lambda_{n,j} = \left(n - \frac{j}{2} + \frac{\omega \cos(n - j/2)a}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}\right)^2, \quad \omega \in \mathbb{C},$$

   где, как и ранее, один и тот же символ $\{\varkappa_n\}$ обозначает разные последовательности в l_2;

2. Порядок целой функции $\theta_j(\rho)$, $j = 0, 1$ не превышает $\pi - a$, где

$$\begin{aligned} \theta_0(\rho) &= \rho^2 \Delta_0(\rho) - \rho \sin \rho\pi + \omega \cos \rho(\pi - a), \\ \theta_1(\rho) &= \rho \Delta_1(\rho) - \rho \cos \rho\pi - \omega \sin \rho(\pi - a), \end{aligned} \tag{47}$$

$$\Delta_j(\rho) = \pi^{1-j} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n,j} - \rho^2}{(n - j/2)^2}, \quad j = 0, 1. \tag{48}$$

Заключение В данной магистерской работе исследовались обратные спектральные задачи с запаздыванием. В ходе работы были рассмотрены две задачи спектрального анализа, а именно обратная задача для операторов Штурма-Лиувилля с постоянным запаздыванием и обратная задача для функционально- дифференциальных пучков второго порядка с двумя запаздываниями, а так же приведена соответствующая теория:

1. Приведена асимптотика спектров $\lambda_{n,j}, n \geq 1$, сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях разрешимости задачи для операторов Штурма-Лиувилля, так же был сформулирован алгоритм её решения, и приведена теорема о необходимых и достаточных условиях разрешимости более сложного случая данной задачи;
2. Была обоснованна непротиворечивость обратной задачи для функционально-дифференциальных пучков второго порядка с двумя запаздываниями, получена асимптотика соответствующих спектров, доказаны теоремы единственности решения данной задачи, а так же необходимые и достаточные условия её разрешимости, и приведён соответствующий алгоритм её решения;