МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономики

Некоторые задачи для волнового уравнения

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы

направление 01.04.02— Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института,колледжа

Урусова Евгения Павловича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.м.н., доцент		В.П. Курдюмов
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор		С.И.Дудов
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2023

Введение.

Цель работы - нахождения решений некоторых задач для волнового уравнения с нулевым потенциалом, а для случая произвольного непрерывного потенциала – смешанных задач с нулевой начальной функцией и ненулевой начальной скоростью для двух типов граничных условий: когда концы закреплены и когда каждое граничное условие содержит производную. Для решения этих смешанных задач использован новый подход в методе Фурье, базирующийся на контурном интегрировании резольвенты оператора, положенного спектральной задачей метода Фурье, впервые предложенного Хромовым А.П.. Этот подход позволяет получить классические решения задачи при минимальных требованиях гладкости начальных данных и обобщенное решение, вплоть до случая суммируемой скорости, без использования уточненной асимптотики собственных значений и без любой информации о собственных функциях. Данная работа носит реферативный характер по статьям Хромова А.П., Курдюмова В.П., Гуревича А.П.. Теоретический материал проиллюстрирован примерами, в которых для задачи Коши и смешанной задачи простейшего волнового уравнения с закрепленными концами строится статичная и анимационная графика, выполненная в MATLAB.

Работа состоит из введения, трех глав, приложения и списка использованных источников.

Основное содержание работы.

В этой работе рассматриваются задачи для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

где a- постоянный параметр.
и телеграфного уравнения(которое тоже называется волновым):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + q(x)u, \tag{2}$$

где q(x) c[0,1] - заданная функция.

Впервые уравнение (1) появилось почти одновременно в работах Даниила Бернулли (1700 – 1782), Жана Лерона Д'Аламбера (1717 – 1783) и Леонарда Эйлера (1707 – 1783), позднее — в работах Жана Батиста Фурье (1768 – 1830).

Бернулли получил решение уравнения в виде тригонометрического ряда, Д'Аламбер и Эйлер представили решение в виде прямой и обратной волн, перемещающихся со скоростью a, что и дало название уравнению. Фурье показал эквивалентность этих двух решений.

На примере одномерного волнового уравнения (1) в этой работе рассматривается процесс колебаний струны и методы решения задач, связанных с уравнением (1) или (2), которые широко применяются в математической физике.

В первой главе работы излагаются классические методы решения уравнения свободных колебаний струны: метод Д'Аламбера для бесконечной струны, метод продолжений для полубесконечной и конечной струны, а также метод Фурье для конечной струны, закрепленной на концах.

Теоретический материал проиллюстрирован примерами, в которых используется статичная и анимационная графика, выполненная в MATLAB. Во второй главе рассматривается смешанная задача для волнового уравнения (2):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x) \tag{4}$$

и граничными условиями двух следующих видов:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{5}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0 \tag{6}$$

где $q(x) \in c[0,1]$ и комплекснозначна, $\alpha_i, \beta_i \quad (i = 1,2)$ - комплекснозначные числа.

В этой работе используется резольвентный подход, впервые предложенный А.П. Хромовым в работе с использованием приема А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье. На основе данных результатов из было получено классическое решение (т. е. дважды непрерывно дифференцируемое) сформулированных задач для начальных условий $u(x,0) = \varphi(x), u'_t(x,0) = 0$ при минимальных требованиях гладкости на $\varphi(x)$, для начальных условий (4) при минимальных требованиях на $\psi(x)$. Исследовалось поведение формального решения рассматриваемых задач при ослаблении требований на $\varphi(x)$ в условиях $u(x,0) = \varphi(x), u'_t(x,0) = 0$. В настоящей работе понижаются требования гладкости на $\psi(x)$. Для случая, когда $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ $\big(W_2^1[0,1] = \{f(x) \mid f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $f'(x) \in L_2[0,1]\}$), мы построим классическое решение этих задач (в этом случае уравнение (2) выполняется почти всюду (п. в.)). В случае, когда $\psi(x) \in L[0,1]$, получается, что для задачи с закрепленными концами ряд формального решения сходится равномерно в любой ограниченной области, а для второй задачи он сходится лишь всюду, и для обеих задач является обобщенным решением в равномерной метрике. Рассматривается также случай, когда $\psi(x) \in L_2[0,1]$. При этом свойства обобщенного решения улучшаются: для обеих задач формальный ряд сходится равномерно, удовлетворяет начальным и граничным условиям, являясь обобщенным решением в равномерной метрике.

В работе предполагается, что в задаче (3)-(5) $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L :

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, с асимптотикой

$$\lambda_n = \rho_n^2 \quad (\operatorname{Re}\rho_n \geqslant 0)\,, \quad \rho_n = n\pi + (1).$$

обозначим $\tilde{\gamma}_n = \{\rho || \rho - n\pi \ |= \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geqslant n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geqslant n_0$ внутрь $\tilde{\gamma}_n$ попадает лишь по одному ρ_n. Пусть γ_n- образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ-плоскости $\big(\lambda = \rho^2, \operatorname{Re}\rho \geqslant 0\big)$. обозначим через

$R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора $L(\lambda-$ спектральный параметр, $E-$ единичный оператор).

Формальное решение задачи (3)-(5) по методу Фурье представим в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)(x)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda, \tag{7}$$

где $r>0$ фиксировано, на контуре $|\lambda|=r$ нет собственных значений, все γ_n при $n\geqslant n_0$ находятся вне $|\lambda|=r$. Представление (7) не ново. Главное сейчас для нас, что радиус $\tilde{\gamma}_n$ один и тот же для всех $n\geqslant n_0$. Приступаем к преобразованию (7), используя идею А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье.

обозначим через $z_1(x,\rho), z_2(x,\rho)$ решения уравнения

$$y''(x) - q(x)y(x) + \rho^2 y(x) = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = z_2'(0,\rho) = 1, \quad z_1'(0,\rho) = z_2(0,\rho) = 0$$

Теорема 1. Имеет место формула:

$$R_\lambda f = z_2(x,\rho) - v(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x), \tag{8}$$

где

$$v(x,\rho) = \frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}, (f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad (M_\rho f)(x) = \int_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt$$

,

$$M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \end{vmatrix}$$

Лемма 1. Имеет место формула

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)v(x,\rho)(\psi,z_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda. \tag{10}$$

Доказательство очевидно, поскольку первое и последнее слагаемые в (8) являются целыми по λ.

Нужное нам преобразование дается следующей теоремой.

Теорема 2. Для формального решения имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) \tag{11}$$

где

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right) v^0(x,\rho)\,(\psi, z_2)\,\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda \tag{12}$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left[v(x,\rho) - v^0(x,\rho)\right](\psi, z_2)\,\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda \tag{13}$$

$v^0(x,\rho) = \frac{z_2^0(x,\rho)z_1^0(1,\rho)}{z_2^0(1,\rho)}$ – то же, что и $v(x,\rho)$, но взятое теперь для оператора $L_0 : L_0 y = -y''(x), y(0) = y(1) = 0$. Таким образом, $z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x, z_2^0(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho}$.

Исследование $u(x,t)$ по формуле (11) опирается на следующую терему.

Теорема 3. Для $z_2(x,\rho)$ имеет место формула

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x K(x,\tau)\frac{\sin\rho\tau}{\rho}d\tau \tag{14}$$

где $K(x,\tau)$ непрерывно дифференцируема по x и τ, причем $K(x,0)\equiv 0$.

Формула (14) хорошо известна как формула оператора преобразования.

Лемма 2. Имеют место формулы

$$(\psi, z_2) = \left(\psi_1, z_2^0\right) \tag{15}$$

$$(\psi, z_2) = \frac{1}{\rho^2}\left[(\psi_1'(\xi)\cos\mu\xi, \cos n\pi\xi) - (\psi_1'(\xi)\sin\mu\xi, \sin n\pi\xi)\right] \tag{16}$$

где

$$\rho = n\pi + \mu, \psi_1(\xi) = \psi(\xi) + \int_\xi^1 K(\tau,\xi)\psi(\tau).$$

Лемма 3. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi\right) \sin n\pi x \sin n\pi t \tag{17}$$

Лемма 4. Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau)d\tau$$

где $\tilde{\psi}(x) = -\tilde{\psi}(-x), \tilde{\psi}(x+2) = \tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0,1]$.

Лемма 5. Производные $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} u \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2}$ существуют п. в. в $Q_T = [0,1]\times$ $\times[-T,T]$ при любом $T > 0$ и для таких x, t они совпадают.

Из лемм 4 и 5 получается

Теорема 4. Функция $u_0(x,t)$ есть классическое решение эталонной задачи, т.е. и $u_0(x,t)$ удовлетворяют условиям (3)-(5) с функцией $\psi_1(x)$ вместо $\psi(x)$, когда уравнение (3) с $q(x) = 0$ удовлетворяется п.в.

Для исследования ряда $u_1(x,t)$ обозначим

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \left[v(x,\rho) - v^0(x,\rho)\right] (\psi, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda$$

Тогда $u_1(x,t) = \sum_n u_{1n}(x,t)$, где $u_{1n}(x,t) = a_n(x,t)$ и суммирование ведется по $n = 0, n_0, n_0+1, \ldots$ и γ_0 есть $|\lambda| = r$.

Лемма 6. При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место асимптотические формулы

$$v_{x^j}^{(j)}(x,\rho) = v_{x^j}^{0(j)}(x,\rho) + \left(\rho^{j-1}\right), \quad j = 0,1,2$$

и оценки $(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$.

Лемма 7. обозначим через $\theta(x)$ любую из функций $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$ u $f(x,\mu) = f(x)\theta(\mu x)$, где $\mu \in \tilde{\gamma}_0 u \beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \theta(n\pi x))$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant c\left(\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$$

где постоянная c не зависит от n_1, n_2 и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$

Лемма 8. Ряд $u_1(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференциированием до второго порядка по x u t, сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T>0$.

Теорема 5. Функция $u(x,t)$ есть решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u(x,t)-u_0(x,t))=-q(x)u(x,t) \tag{19}$$

при условиях (4), (5).

Из полученных фактов следует

Теорема 6. Если $\psi(x)\in W_2^1[0,1],\psi(0)=\psi(1)=0$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (3)-(5) является классическим решением этой задачи, когда уравнение (3) выполняется п.в.

Теперь $\psi(x)\in L_2[0,1]$. И в этом случае сохраняется представление (11) формального решения.

Лемма 9. Ряд $u_1(x,t)$ и ряд, получающийся из него почленным дифференцированием по t, сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T>0$.

Исследуем ряд $u_0(x,t)$.

Лемма 10. Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его суммы имеет место формула

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x-t)-\Phi(x+t)] \tag{20}$$

где $\Phi(x)=\Phi(-x),\Phi(x+2)=\Phi(x),\Phi(x)=\int_x^1\psi_1(\tau)d\tau$ на $[0,1]$. Кроме того, существует $u_{0t}'(x,0)$ для п. в. $x\in[0,1]u$

$$u_{0t}'(x,0)=\psi_1(x) \tag{21}$$

Из леммы 10 следует

Лемма 11. Функция $u_0(x,t)$ из (62) удовлетворяет условиям (5) и $u_0(x,0)=0$; $u_0(x,t)$ абсолютно непрерывна по t, n. в. на $[0,1]$ существует $u_{0t}'(x,0)$ и $u_t'(x,0)==\psi_1(x)$

Лемма 12. сумма ряда и(x,t) удовлетворяет условиям (5) и и(x,0)=0;u(x,t) абсолютно непрерывна по t п. в. на [0, 1]], существует $u'_{0t}(x,0)$ и $u'_t(x,0) = \psi(x)$.

Далее видно, что сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (3)-(5) является обобщенным решением этой задачи для любой $\psi(x) \in L_2[0,1]$.

Лемма 13. Для (x,t) имеет место оценка

$$\max_{Q_T} |u(x,t)| \leqslant c_T \|\psi\|_2$$

где постоянная c_T зависит только от T u $\|\cdot\|_2$ - норма в $L_2[0,1]$.

Теорема 7. Если $\psi(x) \in L_2[0,1]u$ $\|\psi_h - \psi\|_2 \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится $\kappa u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (3)-(5).

Пусть теперь $\psi(x) \in L[0,1]$. Покажем, что формальное решение задачи (3)-(5), которое также берем в виде (51), и в этом случае является обобщенным решением этой задачи.

Так же, как в лемме 13 получается

Лемма 14. Ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и справедлива оценка

$$\max_{Q_T} |u_1(x,t)| \leqslant c_T \|\psi\|_1$$

где постоянная c_T зависит только от T u $\|\cdot\|_1$ - норма в $L[0,1]$.

Лемма 15. Ряд $u_0(x,t)$ сходится равномерно в Q_T и для его суммы справедлива формула (62).

Из леммы 15 следует

Лемма 16. Имеет место оценка $\max_{Q_T} |u_0(x,t)| \leqslant c\|\psi\|_1$

Пусть $\psi_h(x)$ и $u_h(x,t)$ - те же, что и в теореме 7 , тогда из лемм $14 - 16$ получается следующий результат.

Теорема 8. Если $\psi(x) \in L[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (3)-(5) удовлетворяет условиям (5) и u (x,0) =0. Кроме того, если $\|\psi_h - \psi\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то и $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (3)-(5).

Таким образом, если $\psi(x) \in L[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (3)-(5) обладает более слабыми, по сравнению со свойствами обобщенного решения, когда $\psi(x) \in L_2[0,1]$.

Сначала считаем, что в задаче (3), (4), (6) $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Теперь оператор L такой:

$$\begin{gathered} Ly = -y'' + q(x)y \\ u_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \quad u_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0. \end{gathered} \tag{69}$$

собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и для них верна асимптотика из Главы 2. Контуры $|\lambda| = r, \gamma_n, \tilde{\gamma}_n$ - те же, что и в Главе 2. Формальное решение (7) сохраняется, а оператор L_0 тоже другой:

$$\begin{gathered} L_0 y = -y'', \\ y'(0) = y'(1) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Представляя $\psi(x)$ в виде $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, где $\psi_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0, \psi_2(x) \in c^2[0,1], \psi_2(x) \in D_L\,(D_L-$ область определения оператора L), формальное решение представим в виде $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda^0 \psi_1\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda \tag{23}$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda \tag{24}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda \psi_2\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)_{\lambda-\mu_0}\left(R_\lambda g\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda$$

R_λ^0– резольвента оператора $L_0, g = (L - \mu_0 E)\,\psi_2, \mu_0$ находится вне контуров $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \geqslant n_0$.

Теорема 9. Имеют место формулы

$$R_\lambda f = v_1(x,\rho)\,(f, z_1) + v_2(x,\rho)\,(f, z_2) - (M_\rho f)\,(x)$$

$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x,\rho)\left(f, z_1^0\right) + v_2^0(x,\rho)\left(f, z_2^0\right) - \left(M_\rho^0 f\right)(x)$$

где M_ρ - прежний оператор, M_ρ^0 определяется через $z_j^0(x,\rho)$ вместо $z_j(x,\rho)$ $(j = 1, 2)$,

$$v_j(x,\rho) = \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)}\left\{\left[-\beta_1 z_{3-j}(1,\rho) U_2\,(z_2) + \left(z_{3-j}'(1,\rho) + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho)\right) U_1\,(z_2)\right] z_1(x,\rho) + \right.$$

$$\left. + \left[\beta_1 z_{3-j}(1,\rho) U_2\,(z_1) - \left(z_{3-j}'(1,\rho) + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho)\right) U_1\,(z_1)\right] z_2(x,\rho)\right\} \quad (j = 1, 2),$$

$$\Delta(\rho) = U_1\,(z_1)\,U_2\,(z_2) - U_1\,(z_2)\,U_2\,(z_1)\,,$$

$$v_1^0(x,\rho) = -\frac{\cos\rho\cos\rho x}{\rho\sin\rho}, \quad v_2^0(x,\rho) = -\cos\rho x.$$

Так же, как и леммы 3,4 , получаются две следующие леммы.

Лемма 17. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = (\psi_1, 1)\,t + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\,(\psi_1(\xi), \cos n\pi\xi)\cos n\pi x \sin n\pi t$$

Лемма 18. Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau) d\tau$$

где $\tilde{\psi}(-x) = \tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(x+2) = \tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0,1]$

Лемма 5 и теорема 4 сохраняются, но теперь $u_0(x,t)$ есть решение (3), (4) с функцией $\psi_1(x)$ из (23) вместо $\psi(x)$ при $q(x) = 0$ с условиями $u_{0x}'(0,t) = u_{0x}'(1,t) = 0$. сохраняется также и лемма 8.

Лемма 19. Ряд $u_2(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием до второго порядка по x и t, сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$.

Теорема 10. Если $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$, то сумма ряда $\mathrm{u}(x,t)$ формального решения задачи (3), (4), (6) есть классическое решение этой задачи, когда уравнение (3) выполняется п.в.

Пусть в задаче (3), (4), (6) $\psi(x) \in L_2[0,1]$. В этом случае формальное решение берем в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) \tag{25}$$

где $u_0(x,t)$ и $u_1(x,t)$ есть (23) и (24) с функцией $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$.

Лемма 20. Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула

$$u_0(x,t) = (\psi,1)t + \frac{1}{2}[\Phi(x+t) - \Phi(x-t)] \tag{26}$$

где $\Phi(x) = -\Phi(-x), \Phi(x+2) = \Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_0^x [\psi(\tau) - (\psi,1)]d\tau \quad \textit{при} \quad x \in [0,1]. \tag{27}$$

Лемма 21. Имеют место формулы

$$u'_{0t}(x,0) = \psi(x) \quad \text{ п.в. на } [0,1] \tag{28}$$

$$u'_{0x}(0,t) = 0, \quad u'_{0x}(1,t) = 0 \quad \text{ п.в. на } (-\infty,\infty). \tag{29}$$

Из лемм 20 и 21 получаем следующий результат.

Лемма 22. Функция $u_0(x,t)$ абсолютно непрерывна по x, t и удовлетворяет условию $u_0(x,0) = 0$; п.в. на $[0,1]$ существует $u'_{0t}(x,0)$ и п.в. на $(-\infty,\infty)$ существуют $u'_{0x}(0,t), u'_{0x}(1,t)$, причем $u'_{0t}(x,0) = \psi(x), u'_{0x}(0,t) = u'_{0x}(1,t) = 0$.

Лемма 23. Ряд $u_1(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x u t один раз, сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$.

Лемма 24. Если $\psi(x) \in L_2[0,1]$, то сумма ряда и (x,t) абсолютно непрерывна по x, t и $u(x,0) = 0$; п.в. на $[0,1]$ существует $u'_t(x,0)$ и п.в. на $(-\infty,\infty)$ существуют $u'_x(0,t), u'_x(1,t)$; п.в. выполняются $u'_t(x,0) = \psi(x)$ и условия (6).

Пусть $\psi_h(x)$ - та же, что и $\psi(x)$ в Главе 2, и $u_h(x,t)$ - решение задачи (3), (4), (6) с функцией $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, представленное в теореме 10. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 13 (используя в них формулу (16) из [6]), получим следующий результат.

Теорема 11. Если $\psi(x) \in L_2[0,1] u \left\|\psi_h - \psi\right\|_2 \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (3), (4), (6).

Рассмотрим случай, когда в задаче $(3),(4),(6)\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение имеет вид (25). В этом случае лемма 14 сохраняется (доказательство следует из формулы

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\left(R_\lambda\psi - R^0_\lambda\psi\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\left(J_1(x,\rho) + J_2(x,\rho)\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

где

$$J_1(x,\rho) = \left(v_1(x,\rho) - v^0_1(x,\rho)\right)(\psi, z_1) + \left(v_2(x,\rho) - v^0_2(x,\rho)\right)(\psi, z_2)\,, J_2(x,\rho) =$$

$$= v^0_1(x,\rho)\left(\psi, z_1 - z^0_1\right) + v^0_2(x,\rho)\left(\psi, z_2 - z^0_2\right)$$

Лемма 25. Ряд $u_0(x,t)$ сходится всюду при $x \in [0,1]$ u $t \in (-\infty,\infty)$, причем

$$\max_{Q_T}|u_0(x,t)| \leqslant c_T\|\psi\|_1 \tag{30}$$

где постоянная c_T зависит только от T.

Теорема 12. Если $\psi(x) \in L[0,1]$, то ряд u(x,t) формального рещения задачи (3), (4), (6) сходится всюду при $x \in [0,1], t \in (-\infty,\infty)$ и u $u(x,0) = 0$. Более того, если $\left\|\psi_h - \psi\right\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи (3), (4), (6) сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$. Таким образом, $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (3), (4), (6) для $\psi(x) \in L[0,1]$.

Заключение.

В этой магистерской работе были рассмотрены несколько задач для волнового уравнения с нулевым и произвольным непрерывным потенциалом, основными их которых являются задачи с нулевой начальной функцией и двумя видами граничных условий: концы закреплены, каждое граничное условие имеет производную. Для этих задач методом контурного интегрирования резольвенты оператора спектральной задачи, впервые предложенного Хромовым А.П., дается обоснование метода Фурье при минимальных требованиях гладкости на начальную скорость. При этом существенно используется прием А.Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье.