

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории  
упругости и биомеханики

**Моделирование взаимодействия пьезоупругого актуатора  
с тонкой пластиной с учетом погранслоев**

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 2 курса 237 группы

направления 01.04.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Холодовой Надежды Алексеевны

Научный руководитель  
профессор, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

подпись, дата

М.В. Вильде

Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Л.Ю. Коссович

Саратов 2023

**Введение.** Пьезоэлектрические материалы получили широкое распространение в экспериментальных установках, предназначенных для изучения различных видов колебаний. С их помощью мы можем сообщить телу нужную форму механической нагрузки. Тема данной работы возникла из экспериментов по наблюдению упругих краевых волн в пластинах. Данные волны широко исследовались теоретически, однако экспериментальные работы, подтверждающие существование краевых волн, появились только в недавнее время. Для наиболее эффективного возбуждения краевых волн на торце пластины располагался пьезоэлектрический актуатор (рисунок 1). С помощью функционального генератора на актуатор подавалось электрическое напряжение, которое приводило к его деформации, возбуждающей колебания алюминиевой пластины.

**Актуальность темы.** Численное моделирование результатов данного эксперимента необходимо для разработки методов применения краевых волн в практических целях, например, в области неразрушающего контроля. При этом, в дополнение к задаче о распространении волн вдоль торца пластины, возникает задача о взаимодействии актуатора с торцом пластины, которая ранее не исследовалась. На достаточно низких частотах распространение планарной краевой волны хорошо описывается теорией растяжения-сжатия пластин. В связи с этим представляет интерес построение двумерной модели, описывающей действие актуатора на торец пластины в области применимости этой теории.

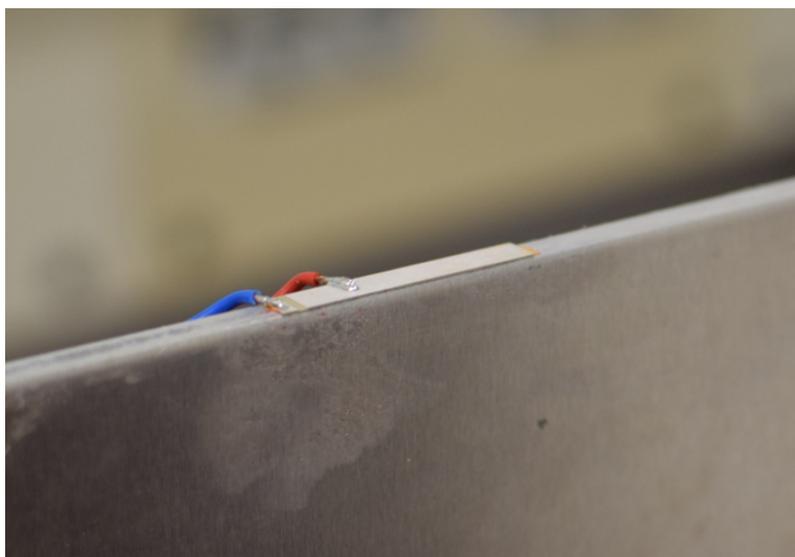


Рисунок 1 — Пластина с актуатором на торце в экспериментальной установке

**Целью** данной работы является разработка приближенной модели, описывающей статическое взаимодействие пьезоупругого актуатора с торцом пластины, а также численное решение задачи в точной трехмерной постановке методом конечных элементов.

Основой для построения указанной модели является теория растяжения-сжатия пластин (обобщенное плоское напряженное состояние). Основную трудность при этом представляет формулировка граничных условий, поскольку на краю пластины, где располагается актуатор, напряженно-деформированное состояние (НДС) представляет собой сумму медленно изменяющегося двумерного решения и трехмерных решений, быстро затухающих при удалении от края — т.н. погранслоев.

**Материалами** исследования являются математические модели, а также механические и геометрические характеристики используемых в экспериментальной установке компонентов.

**Научная новизна** работы состоит в построении погранслоев для случая края, подкрепленного тонкой пластиной, испытывающей собственную деформацию, и выводе уточненных граничных условий теории растяжения-сжатия пластин для этого случая.

**Практическая значимость** работы состоит в возможности использования построенной приближенной модели для обработки экспериментальных данных о распространении краевых волн. Результаты работы также могут найти применение в других практических задачах, связанных с расчетом растяжения-сжатия пластин с подкрепленным краем.

**Структура и объем работы.** Выпускная квалификационная работа разделена на 3 главы:

1. Решение задачи методом конечных элементов.
2. Построение уточненных граничных условий теории растяжения-сжатия пластин.
3. Аналитическое решение задачи о взаимодействии актуатора с пластиной.

Список используемых источников содержит 20 наименований. Работа изложена на 65 листах машинописного текста, содержит 21 рисунок.

**Основное содержание работы.** Во введении описывается актуальность поставленной задачи, формулируется цель исследования и ставятся задачи.

**Решение задачи методом конечных элементов.** В первой главе выпускной квалификационной работы приводится краткое описание свойств пьезоэлектрических материалов и особенности постановки смешанной задачи электро-упругого взаимодействия в конечно-элементном пакете. Была рассмотрена статическая задача о взаимодействии упругой пластины и пьезоупругого актуатора, расположенного на торце (рисунок 1). Поскольку влияние актуатора в случае статики локализовано в окрестности места его прикрепления, нет необходимости полностью моделировать пластину, применяемую в эксперименте. В данной работе моделирование выполнено для пластины размерами  $300 \times 200 \times 5$  мм<sup>3</sup>. Для актуатора приняты реальные размеры  $30 \times 5 \times 0.25$  мм<sup>3</sup>, соответствующие полосовым актуаторам, производимыми фирмой PI Ceramic GmbH (Германия).

Актуатор располагался на длинном краю пластины в центре. Противоположный край пластины закреплялся с помощью команды Fixed Support. Взаимодействие актуатора и пластины моделировалось с помощью типа контакта Bonded. Жесткость контакта выбиралась заданной по умолчанию. Остальные поверхности пластины и актуатора считались свободными от напряжений. К поверхностям актуатора прикладывалось электрическое напряжение 70 В, вызывающее его расширение в направлении осей  $x$  и  $y$ .

Анализ результатов конечно-элементного решения показал, что интенсивность погранслоев под актуатором значительно больше, чем в остальной части пластины. Это говорит о том, что при формулировке граничных условий на торце в двумерной теории растяжения-сжатия пластин, моделирующих взаимодействие с актуатором, следует учитывать погранслои.

**Построение уточненных граничных условий теории растяжения-сжатия пластин.** Во второй главе были получены уточненные граничные условия сначала для случая края, нагруженного заданными нагрузками, а затем и граничные условия для случая взаимодействия актуатора с пластиной. Для этого рассматривалась трехмерная задача

теории упругости (Рисунок 2). Для облегчения распространения результатов данной работы на динамические задачи, в данной главе рассматривались динамические уравнения.

Трехмерные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial x_3} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x_3} - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0, \\ i, j &= 1, 2; \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}, \sigma_{zi}, \sigma_{zz}$  - напряжения;

$u_i, u_3$  - перемещения;

$\rho$  - плотность материала, из которого изготовлена пластина.

Граничные условия на краю пластины примем в виде

$$x_1 = 0 : \sigma_{11} = T(x_2, x_3, t), \quad \sigma_{12} = S(x_2, x_3, t), \quad \sigma_{13} = Q(x_2, x_3, t), \quad (2)$$

где  $T, S, Q$  – заданные нагрузки, в общем случае зависящие от двух пространственных координат и времени. Примем, что  $T, S, \sigma_{ij}, \sigma_{zz}, u_i$  – четные функции относительно  $x_3$ ,  $Q, \sigma_{zi}, u_3$  – нечетные. Тогда длинноволновая деформация пластины будет соответствовать растяжению-сжатию без искривления срединной плоскости.

Лицевые поверхности пластины будем считать свободными от напряжений:

$$x_3 = \pm h : \sigma_{zi} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Здесь  $h$  – полутолщина пластины.

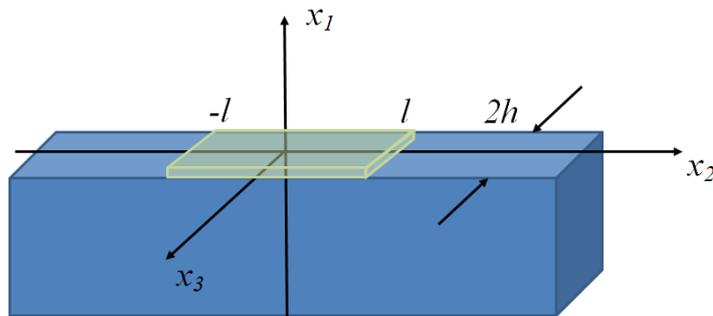


Рисунок 2 – Геометрия трехмерной задачи

Решение трехмерной задачи можно представить в виде линейной комбинации частных решений с различным асимптотическим поведением:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_b + \mathfrak{S}_p + \mathfrak{S}_a. \quad (4)$$

Здесь основное НДС  $\mathfrak{S}_b$  – соответствует длинноволновому низкочастотному приближению трехмерных уравнений теории упругости. Составляющие  $\mathfrak{S}_p$  и  $\mathfrak{S}_a$  являются пограничными слоями, быстро убывающими при  $x_1 \rightarrow -\infty$ . В данной работе неизвестные константы частных решений, представляющие собой пограничные слои, выражаются через краевые значения напряжений в длинноволновом приближении, а затем исключаются из граничных условий двумерной теории. Для получения указанных выражений мы представляем краевые напряжения в виде обобщенных разложений Фурье, используя ортогональную систему полиномов Лежандра.

В результате было показано, что граничные условия (2) в рамках погрешности теории растяжения-сжатия пластин соответствуют условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{pl} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T dx_3, \\ \sigma_{12}^{pl} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h S dx_3 + \frac{\nu}{2h} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h}^h Q x_3 dx_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что (5) отличаются от классических граничных условий наличием поправки, связанной с поперечным касательным напряжением  $Q(x_2, x_3, t)$ .

Далее выводятся уточненные граничные условия для случая актуатора на торце пластины. Актуатор моделируется тонкой пьезоупругой пластиной, уравнения состояния для которой имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22,a} &= \frac{1}{Y_a} \sigma_{22,a} - \frac{\nu_a}{Y_a} \sigma_{33,a} + d_{12} E_1, \\ \varepsilon_{33,a} &= \frac{1}{Y_a} \sigma_{33,a} - \frac{\nu_a}{Y_a} \sigma_{22,a} + d_{13} E_1, \\ \varepsilon_{23,a} &= \frac{1 + \nu_a}{Y_a} \sigma_{23,a}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{22,a}, \varepsilon_{23,a}, \varepsilon_{33,a}, \sigma_{22,a}, \sigma_{23,a}, \sigma_{33,a}$  - деформации и напряжения в актуаторе;

$\nu_a$  - коэффициент Пуассона актуатора;

$Y_a$  - модуль Юнга актуатора;

$d_{12}, d_{13}$  - пьезоконстанты материала актуатора;

$E_1$  - напряженность электрического поля.

Для материала актуатора, рассматриваемого в данной работе,  $d_{12} = d_{13}$ . Напряженность электрического поля принята постоянной, определяемой по формуле  $E_1 = \frac{V}{h_a}$ , где  $V$  – разность потенциалов, поданная на актуатор. Таким образом, пьезоэффект приближенно моделировался как собственная деформация актуатора  $\varepsilon_0 = d_{12}E_1$ .

На основании (6) и уравнения равновесия для актуатора с учетом действия пластины, приходим к соотношениям, которые должны выполняться на торце  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 0, \\ \sigma_{12} &= \frac{Y_a h_a}{1 - \nu_a^2} \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{1 - \nu_a}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{1 + \nu_a}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2} \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{Y_a h_a}{1 - \nu_a^2} \left[ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \frac{1 - \nu_a}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{1 + \nu_a}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (7) можно рассматривать как трехмерные граничные условия, моделирующие подкрепление края тонкой пластиной. Представляя напряжения и перемещения, входящие в (7), в виде (4) и исключая погранслои, приходим к двумерным граничным условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{pl} &= 0, \\ \sigma_{12}^{pl} &= \frac{h_a Y_a}{\beta_a} \frac{\partial^2 u_2^{pl}}{\partial x_2^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

которые должны выполняться при  $x_1 = 0$  в области, занятой актуатором. Здесь  $\beta_a$  – константа, зависящая от упругих параметров актуатора и пластины, выражение для которой получено в работе. Значение этой константы близко к единице. Также в работе получены дополнительные условия, которые должны выполняться на концах актуатора.

**Аналитическое решение задачи о взаимодействии актуатора с пластиной.** В третьей главе рассматривается получение аналитического решения задачи о статической деформации полубесконечной пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. На торце  $x_1 = 0$  ставятся условия свободного края, за исключением области прикрепления актуатора  $x_2 \in [-l, l]$ , в которой задаются граничные условия (8). Дополнительные условия на концах актуатора имеют вид

$$x_2 = \pm l : \frac{\partial u_2^{pl}}{\partial x_2} = \varepsilon_0. \quad (9)$$

Задача решается с использованием преобразования Фурье по координате  $x_2$  и разложения искомого решения по полиномам Чебышева. В результате получено решение двумерной задачи в аналитической форме в виде рядов, коэффициенты которых определяются из системы линейных алгебраических уравнений. На основании (4) и выражений для погранслоев, полученных в главе 2, можно восстановить трехмерные поля напряжений и перемещений во всей области, занятой пластиной.

На рисунке 3 приведено сравнение аналитического и численного решений для перемещения  $u_3$ . Здесь наблюдается весьма хорошее совпадение, за исключением узкой окрестности краев  $x_3 = \pm h$ . Анализ сходимости показал, что ряд для погранслоя в данном случае сходится. Погрешность может быть связана с тем, что в окрестности краев, где НДС является быстро изменяющимся, моделирование актуатора тонкой пластиной не применимо. В численном решении также возможны погрешности, связанные с сингулярным поведением напряжений. Отметим также, что исследование данных сингулярностей может иметь только теоретическое значение, поскольку на практике в этих областях будут играть роль факторы, не учтенные ни в конечноэлементной, ни в приближенной двумерной модели: сглаженность краев пластины, клеевая прослойка между пластиной и актуатором, различие в ширине актуатора и толщине пластины, и т. п. Отметим также, что без учета погранслоев получить правильное описание перемещения  $u_3$  невозможно.

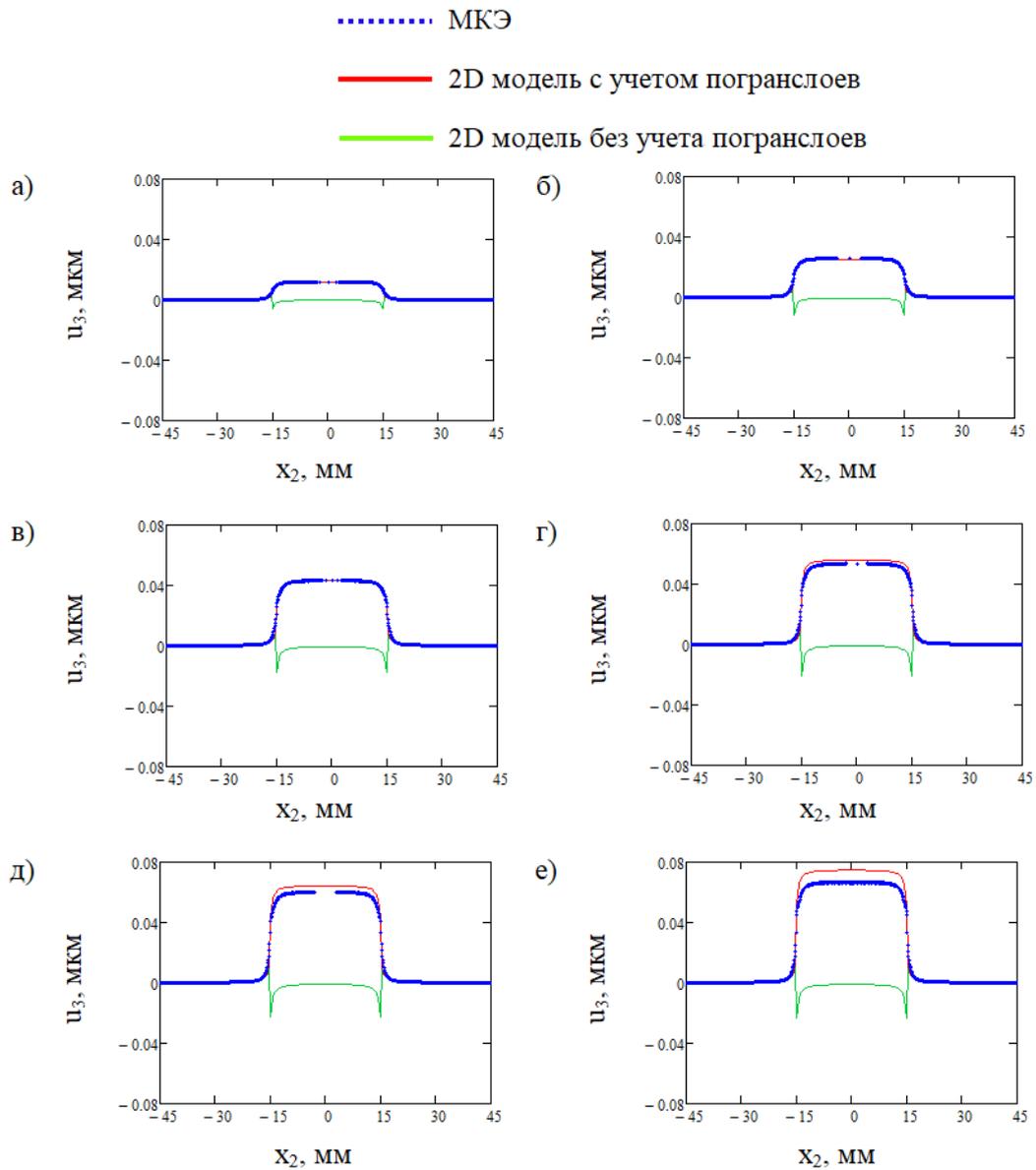


Рисунок 3 – Перемещение  $u_3$  вдоль линий: а)  $x_3 = 0.625$ , б)  $x_3 = 1.25$ , в)  $x_3 = 1.875$ , г)  $x_3 = 2.1875$ , д)  $x_3 = 2.34375$ , е)  $x_3 = 2.5$

Для нормального напряжения в продольном направлении  $\sigma_{22}$  (рисунок 4) также наблюдается хорошее совпадение на внутренних линиях, но значительные расхождения в окрестности краев. Очевидно, что эти расхождения также связаны с угловой сингулярностью, которая влияет на напряжения гораздо сильнее, чем на перемещения.

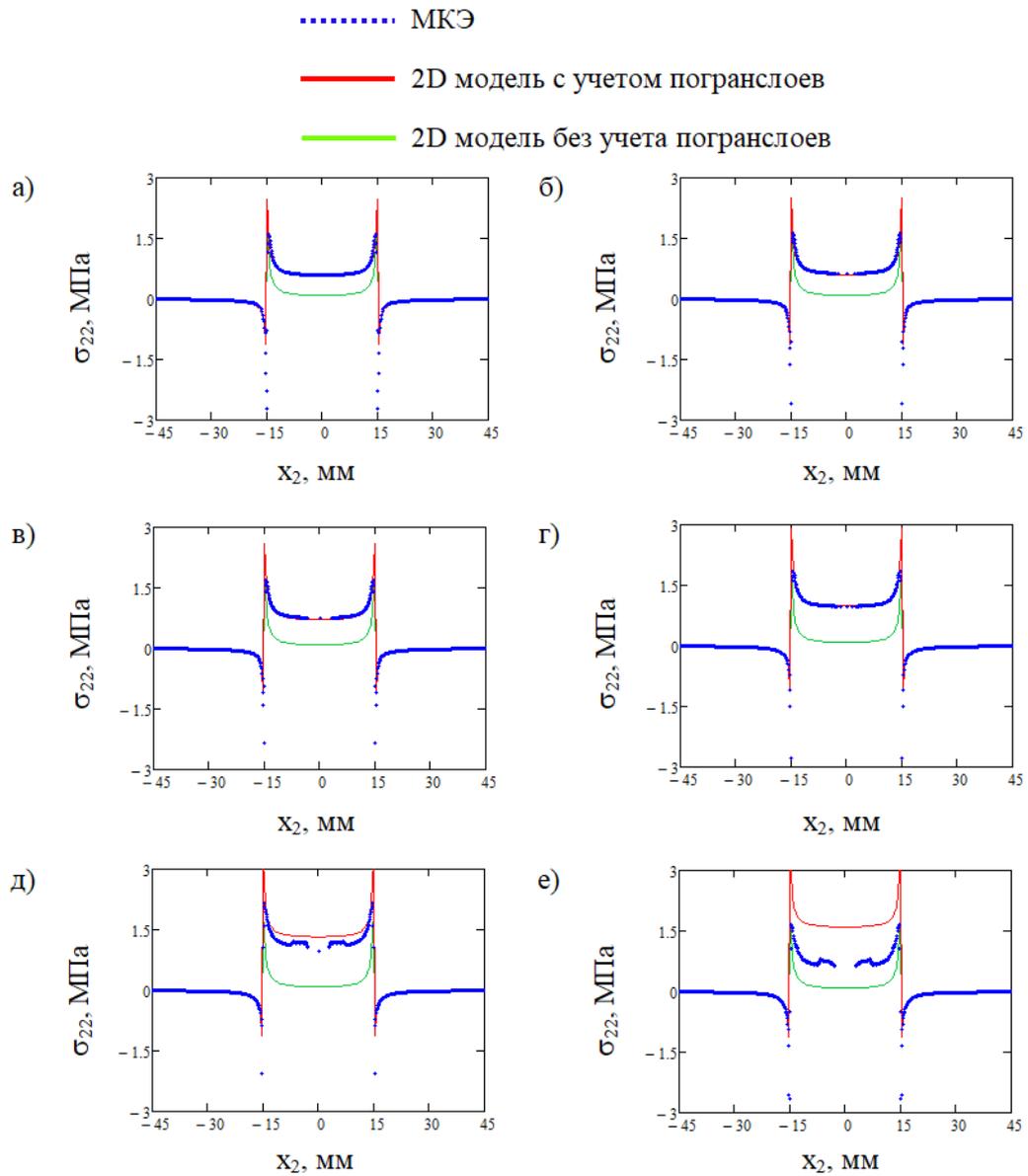


Рисунок 4 – Напряжение  $\sigma_{22}$  вдоль линий: а)  $x_3 = 0$ , б)  $x_3 = 0.625$ , в)  $x_3 = 1.25$ , г)  $x_3 = 1.875$ , д)  $x_3 = 2.1875$ , е)  $x_3 = 2.34375$

На рисунке 5 приведено сравнение для перемещения  $u_2$ . Представленные графики наглядно показывают, что результаты численного и аналитического решений совпадают с весьма малой погрешностью как в области под актуатором, так и вне её. При удалении от срединной линии погрешность остается малой, только на самом краю  $x_3 = h$  наблюдается небольшое расхождение. Поскольку по форме аналитического решения видно, что все искомые величины пропорциональны заданной собственной деформации  $\epsilon_0$ , то можно сделать вывод, что предположение 3 в данном случае полностью подтверждается, то есть задача о собственной деформации актуатора

позволяет получить те же результаты, что и численное решение связанной задачи пьезоупругости. Сопоставляя численное и аналитическое решение для остальных напряжений и перемещений, можно сделать вывод, что предположения 1 и 2 также подтверждаются.

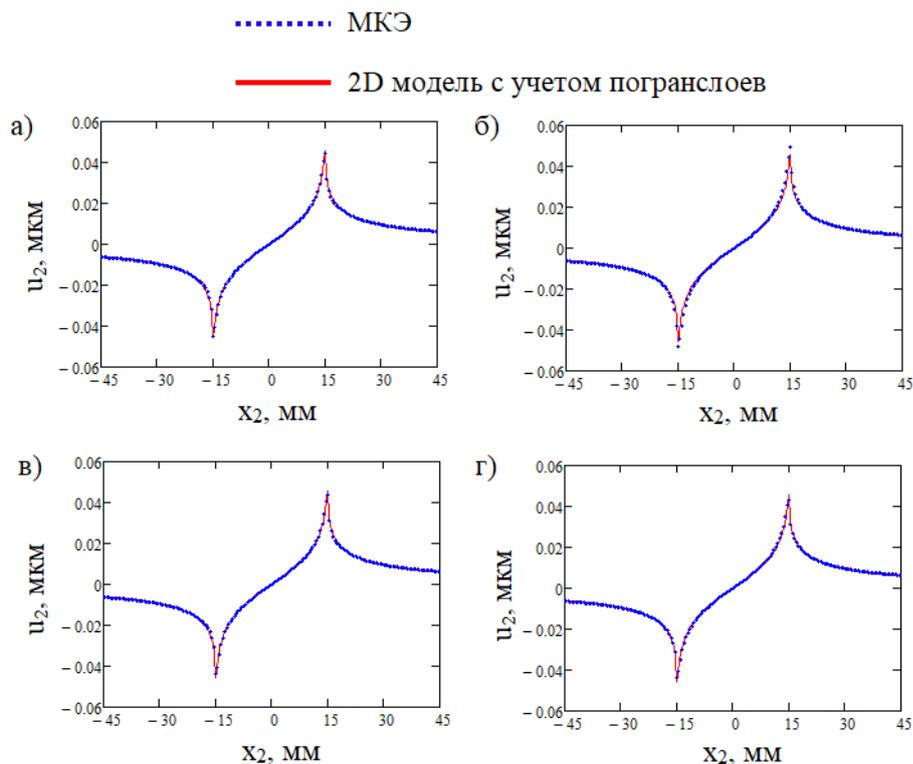


Рисунок 5 – Перемещение  $u_2$  вдоль линий: а)  $x_3 = 0$ , б)  $x_3 = 2.5$ , в)  $x_3 = 0.625$ , г)  $x_3 = 1.875$

**Заключение.** В данной работе проведено исследование возможности моделирования воздействия пьезоупругого актуатора, расположенного на торце пластины, в рамках двумерной теории пластин. Принятие нескольких упрощающих предположений позволило построить достаточно простую модель, допускающую аналитическое решение задачи. Для проверки принятых предположений выполнено конечноэлементное моделирование задачи в точной трехмерной постановке. Сравнение результатов аналитического и численного решений, в принципе, подтвердило применимость принятых предположений, однако были обнаружены некоторые расхождения в численных значениях второстепенных напряжений в области под актуатором: нормального напряжения и касательного напряжения в поперечном направлении. Данные расхождения могут быть вызваны как погрешностями численного решения,

так и погрешностями двумерной модели, что представляет собой тему для дальнейшего исследования.

Выведенные в данной работе граничные условия с учетом погранслоев могут быть применены во всех задачах, связанных с моделированием пластин, край которых подкреплён тонкой пластиной-полосой из другого материала. Интересно отметить, что анализ влияния погранслоев подтверждает интуитивное предположение о возможности моделирования такой пластины-полосы в виде стержня, испытывающего продольную деформацию. Кроме того, в работе выведены уточнённые граничные условия для случая края, нагруженного заданными напряжениями. Используя полученные в работе явные представления для касательных напряжений, возникающих под актуатором, можно свести смешанную задачу о взаимодействии актуатора к первой основной задаче о действии заданной нагрузки, что значительно упрощает исследование нестационарных краевых волн, возбуждаемых актуатором.