

Введение. Целью данной выпускной работы является изучение уравнения Лёвнера для рассмотрения случая, когда управляющая функция представлена броуновским движением, и для решения задачи о седловой точке.

Основным объектом данной работы является уравнение Лёвнера. Оно изучалось чешским математиком К. Лёвнером. В 1923 году он использовал уравнение, в последствии носящее его имя, для доказательства частного случая гипотезы Бибербаха. Существует довольно много версий дифференциального уравнения Лёвнера, зависящих от интересующей нас области. Например, существуют версии в круге, верхней полуплоскости, в различных кольцевых областях и т.д.

В первой части работы основное внимание уделено хордовому уравнению Лёвнера, рассмотрены основные его свойства и случай, когда в качестве управляющей функции выступает броуновское движение. А также описан и реализован на языке программирования Python алгоритм построения случайных кривых, которые приблизительно соответствуют SLE_κ . Во второй части выпускной работы рассматривается задача, в которой показано, что точка граничной поверхности тела начальных коэффициентов $V_4(M)$, доставляемая функцией Пика $P_{M^z}(z)$ является седловой точкой.

Основное содержание работы. Уравнение Лёвнера для полуплоскости можно рассматривать в двух вариантах относительно течения времени: в прямом и в обратном направлении времени. Рассмотрим оба случая.

Прямая версия хордового уравнения Лёвнера представляет собой дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, z) = \frac{2}{g(t, z) - \lambda(t)}, \quad g(0, z) = z \quad (1.1)$$

где $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $z \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$.

Предположим, что $z_0 \in \mathbb{H}$ такая, что знаменатель правой части уравнения (1.1) равен нулю: $g(t, z_0) = \lambda(t)$. Это означает, что производная $\partial_t g(t, z)$ сингулярна в этой точке. Из чего заключаем, что точка z_0 не находится в области, отображаемой функцией $g(t, z)$. При определенных условиях на $\lambda(t)$ мы можем гарантировать, что множество всех таких точек порождает кривую с началом на вещественной оси. Однако, в зависимости от функции $\lambda(t)$

эта кривая может быть кривой, заполняющей пространство. Обозначим эту кривую $\gamma(t)$.

Введём обозначение

$$T_z = \sup\{t_0 \in [0, T] : g(t, z) \text{ существует на } [0, t_0]\}.$$

Это даёт нам максимальное возможное значение t такое, что решение $g(t, z)$ имеет смысл, то есть решение существует на промежутке $[0, t_0)$. Через

$$G_t = \{z \in \mathbb{H} : t < T_z\}$$

обозначим множество точек верхней полуплоскости, для которых существует момент времени $t < T_z$ такой, что производная $\partial_t g(t, z)$ становится сингулярной функцией в этих точках. Таким образом, G_t — область существования решения уравнения Лёвнера (1.1).

Сингулярная кривая $\gamma(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{H} \cup \{0\}$, где $\gamma(0) = 0$, отображается на отрезок вещественной оси.

Управляющая функция $\lambda(t)$ генерирует $g_t(z)$ и соответствующую область. Конформное отображение g_t существует и единственно, если удовлетворяет условиям гидродинамической нормировки на бесконечности, то есть: $\lim_{z \rightarrow \infty} (g_t(z) - z) = 0$ и имеет разложение:

$$g(t, z) = z + \frac{c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (1.2)$$

Коэффициент $c(t)$ называют ёмкостью верхней полуплоскости или остатком $g_t(z)$.

Введём ещё один термин — халл. Можно считать, что халл — это сгенерированная кривая $\gamma(t)$. Термин «можно считать» используется потому, что халл необязательно будет кривой, в общем случае это может быть любой набор точек, удовлетворяющий приведенному выше определению, например, набор, заполняющий пространство.

Если мы будем двигаться по временному промежутку в обратном направлении от T к 0 , то мы получим некоторую кривую из ранее «пустой» (в

момент времени T) верхней полуплоскости. Такие функции генерируются уравнением, называемым обратным уравнением Лёвнера:

$$\frac{d}{dt}f(t, z) = \frac{-2}{f(t, z) - \xi(t)}, \quad f(0, z) = z \quad (1.3)$$

где $\xi(t)$ — вещественная и непрерывная функция. Вся верхняя полуплоскость является областью определения для каждой сгенерированной уравнением функции $f(t, z)$. Это контрастирует с прямой версией уравнения Лёвнера, где функция $g(t, z)$ рассматривается в области $\mathbb{H} \setminus \gamma(t)$.

Уравнения (1.1) и (1.3) связаны так: если T — наибольшее значение для t , то равенство $\lambda(T - t) = \xi(t)$ переводит нас от одного уравнения к другому. В общем случае функция $f(t, z)$, порождаемая уравнением (1.3) не является обратной для $g(t, z)$, порождаемой уравнением (1.1). То есть, кривая $\gamma(t)$, порождаемая уравнением (1.3), не обязательно совпадает с кривой $\gamma(t)$, порождаемой уравнением (1.1). Но в конечный момент времени T всегда выполняется равенство: $f(T, z) = g^{-1}(T, z)$.

Функция $f(t, z)$ удовлетворяет гидродинамической нормировке на бесконечности, а именно имеет разложение:

$$f(t, z) = z + \frac{-c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (1.4)$$

Знак минус перед $c(t)$ можно рассматривать, как результат «обратного хода времени» и замены всех t на $-t$.

Для прямой версии уравнения Лёвнера кривая $\gamma(t)$ отображается на вещественную ось. В обратной версии уравнения Лёвнера функция $f(t, z)$ отображает две различные точки вещественной оси на одну точку кривой $\gamma(t)$. Это называется «сваркой».

Перейдём к рассмотрению броуновского движения и SLE. Пусть $\{\mu\}_j$ — последовательность независимых, одинаково распределённых случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице. Для $n > 0$ определите следующую последовательность функций

$$B_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mu_j. \quad (2.1)$$

$B_n(t)$ — это случайная величина, которая увеличивается на μ_j/\sqrt{n} для каждого приращения по времени. Так как μ_j независимы, то временные приращения $B_n(t)$ также независимы. Можно выбрать μ_j так, чтобы их значение было либо $+1$, либо -1 . Это математическое описание выполнения шага вперед или назад через заданные промежутки времени будем обозначать $\sum \pm 1$.

Так как $B_n(t) \rightarrow B_t$ при $n \rightarrow \infty$, то броуновское движение — это непрерывный процесс. Можно показать, что оно нигде не дифференцируемо: оно имеет угловатые точки в каждой точке на каждом масштабе. Теперь укажем три свойства, характеризующие броуновское движение:

1. способ приращения не зависит от времени,
2. начальная точка произвольна ($B_t \rightarrow B_s$, для $t \geq s$, не зависит от s) и
3. оно имеет нулевое математическое ожидание (если $B_0 = 0$) и дисперсию t , когда изменение времени составляет t единиц и когда движение нормально распределено.

Свойство масштабирования броуновского движения: $B_t \stackrel{D}{=} aB_{t/a^2}$. Обозначение $\stackrel{D}{=}$ означает эквивалентность распределения.

SLE означает стохастическое уравнение Лёвнера (или эволюция Шрамма-Лёвнера) и создается за счёт того, что управляющей функцией в уравнении Лёвнера является броуновское движение, то есть $\xi(t) = \sqrt{\kappa}B_t$, где κ принимает положительные действительные значения.

Чтобы построить модель для генерации SLE_κ , необходимо найти аппроксимирующую функцию для управляющей функции $\xi(t)$. Найдём такой момент времени, где последняя аппроксимирующая кривая единственна в верхней полуплоскости. Рассматривая уравнение Лёвнера с управляющей функцией квадратного корня, получим отображение, которое приводит к прямой линии, выходящей из вещественной оси под углом. Конформное отображение верхней полуплоскости в эту новую область имеет вид:

$$f(z) = (z - a)^a (z - (a - 1))^{1-a} \quad (2.5)$$

где $a \in [0, 1/2]$ — угол между прямой и осью абсцисс, деленный на π .

Чтобы получить кривую полностью, необходимо рассмотреть композицию из n отображений. Зафиксируем a и определим два отображения $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(z)$ есть $f(z)$, а $f_2(z)$ заменяет a на $(1 - a)$, следовательно, расположено в тех же пределах между 0 и $\pi/2$, но относительно отрицательной вещественной оси. Эти две функции создают разрезы, симметричные относительно мнимой оси. Сравнивая разложения в ряд Тейлора для f_1 и f_2 на бесконечности, заметим, что разница разложений только в том, что постоянные члены имеют противоположные знаки.

Теперь построим аппроксимирующую функцию f_n , из n случайных композиций этих f_1 и f_2 . В частности, возьмем $F_n = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n$, где g_i — это f_1 или f_2 , выбранная с равной вероятностью. Эта функция приблизительно соответствует SLE_κ .

Связь между κ и a можно найти из разложения двух случайных g_i так, что g_1 и g_2 могут быть либо f_1 , либо f_2 . Когда мы составляем композицию этих двух функций постоянные коэффициенты и коэффициенты при $1/z$ складываются. При составлении композиции из большего числа g_i остатки будут продолжать складываться, т.к. остатки f_1 и f_2 одинаковы, то остаток $F_n = n(a - 1)a/2$. Параметризуем нашу функцию F_n так, чтобы ёмкость полуплоскости (или остаток) была равна $-2t$, тогда $t = -n(a - 1)a/4$.

Рассмотрим постоянный член F_n : постоянные члены g_i отличаются знаками. Когда мы складываем $n \pm 1$ слагаемое, то получаем случайную величину с дисперсией n . На самом деле, эта случайная величина равна $\sum \pm 1$, о которой говорилось выше. Таким образом, постоянный член F_n теперь равен $(1 - 2a) \sum \pm 1$. Если мы возьмем дисперсию F_n , то каждый член будет считаться постоянным, кроме постоянного члена, который является единственным вероятностным элементом в F_n , тогда $\text{Var}(F_n) = n(1 - 2a)^2$. Кроме того, мы хотим, чтобы F_n приближалось к $\sqrt{\kappa}B(t)$, поэтому их дисперсии должны быть равны. Откуда получаем уравнение для a :

$$a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\kappa}\sqrt{16 + \kappa}}{32 + 2\kappa} \quad (2.10)$$

Так как оба решения симметричны относительно $1/2$, поэтому просто выберем одно из них.

Используя данные рассуждения и код, приведенный в приложении А, мы можем генерировать кривые, которые приблизительно соответствуют SLE_κ (см. рисунок 2.1).

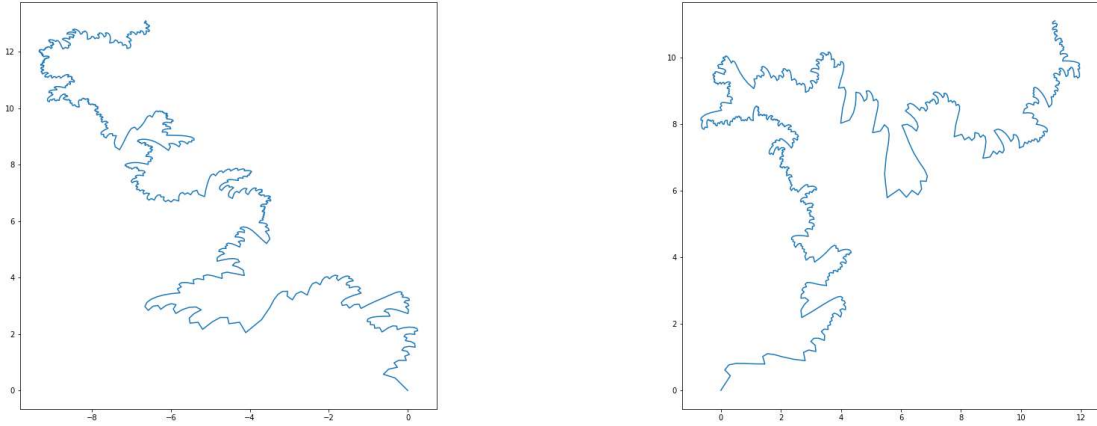


Рисунок 2.1 — Отображения, реализованные программно для SLE_3

Перейдём ко второй части работы, посвященной задаче, в которой показано, что точка граничной поверхности $V_4(M)$, доставляемая функцией Пика $P_{M^3}(z)$ является седловой точкой для всех значений $M > M^*$. Для решения этой задачи введём следующие обозначения. Пусть S класс однолистных аналитических в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, нормированных разложением

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \quad (3.0)$$

Через S^M , $M > 1$, обозначим класс функций $f \in S$, удовлетворяющих в E ограничению $|f(z)| < M$, $S^\infty = S$.

Функция Пика

$$P_{M^3}(z) = z + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{M^3}\right)z^4 + \dots, \quad z \in E$$

доставляет граничную точку $A_M = (0, 0, 2/3(1 - 1/M^3))$ множеству

$$V_4(M) = \{(a_2, a_3, Re(a_4)) : f \in S^M\}, \quad M > 1$$

Точки части граничной поверхности $\partial V_4^3(M)$, для которой точка A_M является внутренней точкой, доставляются функциями $f \in S^M$, которые отображают круг E на круг радиуса M с тремя кусочно аналитическими разрезами.

Известно, что все такие функции f , представленные равенством $f(z) = Mw(z, 1 - 1/M)$, где

$$w(z, t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + a_4(t)z^4 + \dots) \quad (3.3)$$

является интегралом обобщенного уравнения Лёвнера для круга

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{w}{1-t} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.4)$$

с непрерывными функциями $u_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ и постоянными числами λ_k , $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1$.

Управляющие функции u_k удовлетворяют необходимым условиям оптимальности скользящего режима в экстремальной задаче о достижимости граничной поверхности $\partial V_4^3(M)$. Пусть $a_k(t)$, $k \geq 2$, определяются разложением (3.3). Подставим (3.3) в (3.4), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z , введя обозначение для $a_k(t) = x_{2k-3}(t) + ix_{2k-2}(t)$, $k = 2, 3, 4$, и получим следующую фазовую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2 \sum_{k=1}^3 \lambda_k \cos u_k, & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= 2 \sum_{k=1}^3 \lambda_k \sin u_k, & x_2(0) &= 0 \\ \dot{x}_3(t) &= -2 \sum_{k=1}^3 \lambda_k [2(x_1 \cos u_k + x_2 \sin u_k) + (1-t) \cos 2u_k], & x_3(0) &= 0 \\ \dot{x}_4(t) &= 2 \sum_{k=1}^3 \lambda_k [2(x_1 \sin u_k - x_2 \cos u_k) + (1-t) \sin 2u_k], & x_4(0) &= 0 \\ \dot{x}_5(t) &= -2 \sum_{k=1}^3 \lambda_k [(x_1^2 - x_2^2 + 2x_3) \cos u_k + 2(x_1 x_2 + x_4) \sin u_k + \\ &+ 3(1-t)(x_1 \cos 2u_k + x_2 \sin 2u_k) + (1-t)^2 \cos 3u_k], & x_5(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Введём вектор множителей Лагранжа и запишем функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \Psi, u, \lambda) = -2 \sum_{k=1}^3 \lambda_k [\cos u_k \Psi_1 - \sin u_k \Psi_2 + (2(x_1 \cos u_k + x_2 \sin u_k) + (1-t) \cos 2u_k) \Psi_3 - (2(x_1 \sin u_k - x_2 \cos u_k) + (1-t) \sin 2u_k) \Psi_4 + ((x_1^2 - x_2^2 + 2x_3) \cos u_k + 2(x_1 x_2 + x_4) \sin u_k + 3(1-t)(x_1 \cos 2u_k + x_2 \sin 2u_k) + (1-t)^2 \cos 3u_k) \Psi_5], \quad (3.6)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, 3$, $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ удовлетворяет системе (3.5), а $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_5)^T$, $\Psi_5 = 1$, удовлетворяет сопряжённой системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1(t) &= 2 \sum_{k=1}^3 \lambda_k [2 \cos u_k \Psi_3 - 2 \sin u_k \Psi_4 + (2x_1 \cos u_k + 2x_2 \sin u_k + \\ &\quad + 3(1-t) \cos 2u_k) \Psi_5], \\ \dot{\Psi}_2(t) &= 2 \sum_{k=1}^3 \lambda_k [2 \sin u_k \Psi_3 + 2 \cos u_k \Psi_4 + (-2x_2 \cos u_k + 2x_1 \sin u_k + \\ &\quad + 3(1-t) \sin 2u_k) \Psi_5], \\ \dot{\Psi}_3(t) &= 4 \sum_{k=1}^3 \lambda_k \cos u_k \Psi_5, \\ \dot{\Psi}_4(t) &= 4 \sum_{k=1}^3 \lambda_k \sin u_k \Psi_5 \end{aligned} \quad (3.7)$$

и условиям трансверсальности

$$\Psi_j(1 - 1/M) = 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad \Psi_5(1 - 1/M) = 1. \quad (3.8)$$

Используя условия трансверсальности, можно получить, что все решения сопряжённой системы (3.7) будут нулевыми при $u = u^*$, которая имеет координаты $(\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3})$, и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$.

Известно, что граничная поверхность множества $V_4(M)$ параметризуется вектором начальных данных сопряжённой гамильтоновой системы и координатами вектора λ .

Проварьируем равенства $\Psi_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, 4$, положив $\Psi_1(0) = \alpha_1$, $\Psi_2(0) = \alpha_2$, $\Psi_3(0) = \alpha_3$, $\Psi_4(0) = \alpha_4$. Сохранение скользящего режима в момент времени $t = 0$ для варьированных значений $\Psi(0)$ означает равенство между собой коэффициентов при $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ функции Гамильтона при $t = 0$ в точке $u^* = u^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Приравнивая коэффициенты при $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, получаем соотношения между координатами $\Psi(0)$:

$$\alpha_4 = -\alpha_2 + r_2 \|\alpha_1, \alpha_2\|, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + r_3 \|\alpha_1, \alpha_2\|,$$

где $r_2, r_3 \rightarrow 0$, при $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0$.

Задача. Пусть

$$F^M : (\Psi(0), \lambda) \rightarrow x_5(1 - 1/M)$$

является функцией, которая всякому начальному данному $\Psi(0)$ и параметру λ в экстремальной задаче со скользящим оптимальным режимом сопоставляет значение $x_5(1 - 1/M)$. Положим

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, -\alpha_2) + o(\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

$$\lambda = (1/3 + \alpha_3, 1/3 + \alpha_4, 1/3 - \alpha_3 - \alpha_4), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad (3.12)$$

согласно чему $F^M = F^M(\alpha)$. Требуется найти значение $M_4^* > 1$ такое, что для всех $M \geq M_4^*$ точка граничной поверхности, доставляемая функцией F_{M^3} , является седловой.

Для решения этой экстремальной задачи нужно вычислить частные производные 1-го и 2-го порядка функции F^M по координатам вектора α (или, что тоже самое, частные производные координаты x_5) при $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$. Затем будем искать такое значение M , при котором одна из частных производных 2-го порядка функции F^M поменяет знак.

Вычислим также все частные производные, содержащиеся в правых частях производных второго порядка функции F^M по координатам вектора α , для координат фазового вектора, получим соответствующие системы дифференциальных уравнений. Для координат сопряжённого вектора можно уста-

новить соотношения и проинтегрировать их, получая равенства, зависящие от $(x_k)_{\alpha_j}, k, j = 1, 2, 3, 4$.

Тождество

$$H_{u_k}(t, x, \Psi, u, \lambda^k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.10)$$

с произвольными (x, Ψ) из окрестности точки (x^*, Ψ^*) определяет неявные функции $u_k = u_k(t, x, \Psi), k = 1, 2, 3$. Для вычисления частных производных управлений u_k продифференцируем это тождество по α и откуда получаем выражение для частных производных

$$(u_k)_{\alpha_j} = -\frac{H_{u_k x} x_{\alpha_j} + H_{u_k \Psi} \Psi_{\alpha_j}}{H_{u_k u_k}}, \quad k = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.23)$$

Вычислив производные функции Гамильтона по x и по Ψ и вторую производную по u_k при $\alpha = 0$ получаем все 12 частных производных (3.23) при $\alpha = 0$ как линейные функции относительно $(x_p)_{\alpha_j}, p = 1, 2, 3, 4$.

Таким образом, получим систему 24 линейных дифференциальных уравнений, распадающуюся на несколько независимых подсистем, каждая из трёх уравнений. Две системы относительно $(x_1)_{\alpha_j}, (x_3)_{\alpha_j}, (\Psi_1)_{\alpha_j}, j = 1, 4$, три системы относительно $(x_2)_{\alpha_j}, (x_3)_{\alpha_j}, (\Psi_4)_{\alpha_j}, j = 2, 3, 4$. Подсистемы относительно $(x_1)_{\alpha_j}, (x_3)_{\alpha_j}, (\Psi_1)_{\alpha_j}, j = 2, 3$, и $(x_2)_{\alpha_1}, (x_4)_{\alpha_1}, (\Psi_2)_{\alpha_1}$ являются линейными однородными системами с нулевыми начальными условиями, что приводит к девяти нулевым решениям. Эту систему и будем решать численно с использованием Wolfram Mathematica.

Численное интегрирование методом Рунге-Кутты-Фельберга порядка $O(h^4)$ с оценкой погрешности порядка $O(h^5)$ полученных систем дифференциальных уравнений, приводит к приближенному значению $M_4^* = 2.4939 \dots$

Таким образом, была доказана следующая теорема:

Теорема. Точка граничной поверхности A_M множества $V_4(M)$ является седловой точкой, если $M \geq M_4^* = 2.4939 \dots$

Заключение. В первой части выпускной работы рассмотрены различные версии дифференциального уравнения Лёвнера для полуплоскости: для прямого и обратного отсчёта времени. Далее изучены и изложены некоторые необходимые сведения из области стохастических процессов и реализован

пример программы на языке Python, которая генерирует SLE для различных значений κ . Во второй части выпускной работы применением методов теории оптимального управления показано, что точка граничной поверхности множества $V_4(M)$, доставляемая трёхразрезной функцией Пика $P_{M^3}(z)$, является седловой точкой. Задача решается применением принципа максимума Понтрягина и методами вариационного исчисления. А число M_4^* находится численным интегрированием составленной системы дифференциальных уравнений средствами Wolfram Mathematica.