

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

**Топологические методы распознавания образов**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Коротеева Александра Алексеевича

Научный руководитель  
Зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

С.В. Галаев

Зав. кафедрой  
к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

С.В. Галаев

Саратов 2023

# Введение

В данной работе излагаются основные понятия и подходы топологической теории графов. Первоначально (с XIX века или даже с XVIII века, если вспомнить задачу Эйлера о кенигсбергских мостах) в теории графов преобладали комбинаторные подходы. Euler's problem on Königsberg bridges) в теории графов преобладали комбинаторные подходы. Топологический подход, развитый в XX веке, позволил получить новые результаты в теории графов (см., например, [10]) и продолжает развиваться до сих пор. Актуальность данной работы обусловлена, прежде всего, ее ценностью с педагогической точки зрения: для изложения выбранной темы необходимо было использовать теоретический материал из различных разделов математики (алгебра, топология, теория графов), топология, теория графов).

Гомологии и симплексы - математические понятия, имеющие важное применение в широком спектре областей, включая топологию, геометрию и алгебру. Теория гомологии используется для изучения свойств форм и пространств, а симплекс - это фундаментальный строительный блок, используемый для построения более сложных структур.

Теория гомологии - это мощный инструмент для изучения форм и пространств. Она дает возможность измерить "дыры" в пространстве путем подсчета количества  $n$ -мерных "контуров" или петель, существующих в нем. Эти контуры не обязательно замкнуты или непрерывны, они могут состоять из несвязанных компонентов, которые пересекаются в

различных точках. Теория гомологии также позволяет сравнивать различные формы и пространства, определяя, какие контуры присутствуют в каждом из них и как они связаны между собой.

Важным аспектом теории гомологии является понятие гомологической группы. Группа гомологии - это множество схем, алгебраически связанных между собой, в том смысле, что они могут быть построены друг из друга.

# Различные подходы к кон- струированию симплициаль- ных комплексов

В этом разделе мы дадим несколько основных определений из теории графов. В изложении материала в основном мы следуем учебникам [8], [9], [7], а также отчасти [1].

**Определение 1.1.** Графом  $G$  мы будем называть пару  $(V(G), E(G))$ , в которой: –  $V(G)$  — конечное множество, элементы которого называются *вершинами* графа  $G$ ;  
–  $E(G)$  — конечное множество, элементы которого называются *ребрами* графа  $G$ .

Каждому ребру сопоставлена неупорядоченная пара вершин  $a, b$ .

**Определение 1.2.** Если  $a, b$  — ребро некоторого графа, то вершины  $a$  и  $b$  называются *концами* этого ребра. Если вершина является концом ребра, то говорят также, что вершина *инцидентна* ребру, а ребро *инцидентно* вершине. Если в графе есть ребро  $a, b$ , то вершины  $a$  и  $b$  называются *смежными* в данном графе.

**Определение 1.3.** Количество ребер, которым инцидентна вершина, называется *степенью* (*валентностью, порядком*) этой вершины.

**Определение 1.4.** Ребро, у которого концы совпадают (то есть ребро имеет вид  $a, a$ ), называется *петлёй*. Рёбра с одинаковыми концами называются кратными рёбрами. Граф, в котором нет ни петель, ни кратных рёбер, называется *простым* графом.

**Определение 1.5.** Пусть  $G$  — простой граф. Число  $|V(G) - E(G)|$  (разность количества вершин и ребер) называется *эйлеровой характеристикой* графа  $G$  и обозначается  $\chi(G)$ .

**Определение 1.6.** Простым путем длины  $l$  в графе называется последовательность его вершин  $(v_0, v_1, \dots, v_l)$ , в которой все вершины попарно различны и любые две последовательные вершины  $v_{j-1}$  и  $v_j$  соединены ребром.

Из определения следует, что простой путь длины  $l$  содержит  $l$  ребер и  $l + 1$  вершину. Вершина  $v_0$  называется *началом* пути,  $v_l$  — *концом*, а вершины  $v_1, v_2, \dots, v_{l-1}$  — внутренними, или промежуточными, вершинами простого пути. Каждая вершина образует простой путь длины нуль; она является его началом и концом.

**Определение 1.7.** Граф называется *связным*, если для любой пары его вершин существует соединяющий их простой путь.

Если в определении простого пути требование различности всех вершин заменить условием равенства начала и конца (при этом остальные вершины должны быть попарно различны), получится определение простого цикла.

**Определение 1.8.** Граф, не имеющий простых циклов, называется *лесом*. Связный лес называется *деревом*.

**Определение 1.9.** Циклический граф  $C_n$  — это граф, состоящий из одного цикла длины  $n$  и не имеющий других вершин и ребер.

**Определение 1.10.** *Полный* граф  $K_n$  — это простой граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром.

**Определение 1.11.** Граф называется *эйлеровым*, если в нём существует

цикл (не обязательно простой), проходящий ровно по одному разу через все рёбра графа.

Известно [8], что граф является эйлеровым в том и только том случае, когда степени всех его вершин чётны.

**Определение 1.12.** Граф  $H = (V(H), E(H))$  называется подграфом графа  $G = (V(G), E(G))$ , если  $V(H) \subseteq V(G)$  и  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Определение 1.13.** Подграф  $H$  графа  $G$  называется *компонентой связности* графа  $G$ , если он связан и не существует другого связного подграфа графа  $G$ , для которого  $H$  был бы подграфом.

**Определение 1.14.** Графы  $G = (V(G), E(G))$  и  $H = (V(H), E(H))$  называются *изоморфными*, если существует такое биективное отображение  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ , что вершины  $\phi(a)$  и  $\phi(b)$  смежны в графе  $H$  тогда и только тогда, когда вершины  $a$  и  $b$  смежны в графе  $G$ . Само отображение  $\phi$  называется *изоморфизмом*.

**Определение 1.15.** Группой называется двойка  $(G, \cdot)$ , где  $G$  — непустое множество (носитель группы), а символом  $\cdot$  обозначена бинарная операция  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ , которая обладает следующими свойствами:

(G1)  $\forall x, y, z \in G \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  (ассоциативность);

(G2)  $\exists e \in G \ \forall x \in G \ x \cdot e = e \cdot x = x$  (элемент  $e$  называется нейтральным);

(G3)  $\forall x \in G \ \exists x^{-1} \in G \ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

Фигурирующие в определении 1.15 условия (G1)–(G3) называются аксиомами группы. Ради краткости в обозначении групп часто опускают символ групповой операции, то есть обозначают группу  $G$  вместо  $(G, \cdot)$ . Это делается, если групповая операция известна и не требует уточнений.

**Определение 1.16.** Пусть  $(G, \cdot)$  и  $(H, *)$  — группы. Отображение  $f : G \rightarrow H$  называется гомоморфизмом, если

$$\forall x, y \in G \ f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$$

# Топологические характеристики графов

Граф можно рассматривать как топологическое пространство: следовательно, к любому графу приложимы конструкции общей топологической теории. В этой главе мы изложим применительно к графам понятия топологической эквивалентности, гомотопической эквивалентности, фундаментальной группы, группы первых гомологий.

Гомоморфизмы являются важным понятием в гомологии. В алгебре гомоморфизм - это функция между двумя алгебраическими структурами, которая сохраняет операции структур. Аналогично, в гомологии гомоморфизм - это функция между двумя цепными комплексами, которая сохраняет карту границ. Если даны два цепных комплекса  $(C_\bullet, d_C)$  и  $(D_\bullet, d_D)$ , то гомоморфизм  $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  - это набор гомоморфизмов  $f_n : C_n \rightarrow D_n$  таких, что следующая диаграмма коммутует для всех  $n$ :

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{d_C} & C_{n-1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{d_D} & D_{n-1} \end{array}$$

**Определение 2.1.** Носителем простого графа называется топологиче-

ское пространство, полученное в результате склейки отрезков, отвечающих ребрам, по вершинам, в соответствии с комбинаторикой графа. Носитель графа  $G$  обозначается  $|G|$ .

**Определение 2.2.** Графы *топологически эквивалентны*, если их носители гомеоморфны.

Очевидно, что операции подразбиения ребра и стирания вершины сохраняют класс топологической эквивалентности графа (соответствующий гомеоморфизм — тождественное отображение носителей). Следовательно, и конечная последовательность указанных двух операций сохраняет топологическую эквивалентность. Можно доказать [7] два критерия топологической эквивалентности графов: с одной стороны, для этого необходимо и достаточно, чтобы некоторая конечная последовательность подразбиений одного графа и некоторая конечная последовательность подразбиений другого приводили к изоморфным графам; с другой — чтобы последовательное применение к графам операции стирания вершины степени 2 (до тех пор, пока это возможно), приводило бы к изоморфным графам. В последнем случае результатом последовательности стираний вершин будет граф с минимальным количеством вершин и ребер из рассматриваемого класса топологической эквивалентности. Этот минимальный граф можно считать каноническим представителем своего класса.

Очевидно, что топологически эквивалентные графы имеют одинаковое количество компонент связности (эта числовая характеристика топологического пространства сохраняется при гомеоморфизмах). Кроме того, топологически эквивалентные графы имеют одинаковую эйлерову характеристику. В самом деле: при каждой операции подразбиения ребра количества вершин и ребер графа одновременно увеличиваются на 1, а при каждой операции стирания вершины степени 2 — уменьшаются на

1: в обоих случаях разность этих величин, а следовательно, и эйлерова характеристика графа, остаётся неизменной.

Гомотопическая эквивалентность определяется для произвольных топологических пространств, а следовательно — и для графов. Она слабее топологической эквивалентности, то есть любые два топологически эквивалентных графа эквивалентны и гомотопически, а обратное неверно.

**Определение 2.3.** Графы *гомотопически эквивалентны*, если применение процедуры стягивания ребер в  $G$  и в  $H$  позволяет получить изоморфные графы.

В предыдущей главе мы уже отмечали, что стягивание ребра не меняет эйлеровой характеристики графа. Следовательно, гомотопически эквивалентные графы имеют одинаковые эйлеровы характеристики. Оказывается, обратное тоже верно.

**Теорема 2.4.** Два связных графа  $G$  и  $H$  гомотопически эквивалентны в том и только в том случае, если у них одинаковые эйлеровы характеристики. Каждый связный граф  $G$  гомотопически эквивалентен одновершинному графу с  $1 - \xi(G)$  петлями, где  $\xi(G)$  — эйлерова характеристика графа  $G$ .

Доказательство следует из того, что последовательное стягивание ребер графа приводит на некотором шаге к связному графу с одной вершиной и некоторым количеством петель, которое однозначно определяется эйлеровой характеристикой исходного графа.

**Определение 2.5.** Размерность векторного пространства  $C(G)$  эйлеровых подграфов графа  $G$  обозначается  $b_1(G)$  и называется первым числом Бетти, или цикломатическим числом графа  $G$ .

Для связного графа  $G$  справедливо следующее утверждение

$$b_1(G) = 1 - \xi(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$$

Таким образом, первое число Бетти связного графа равно числу образующих его группы первых гомологий. Это утверждение можно считать определением цикломатического числа. Первое число Бетти графа, очевидно, является инвариантом графа. Для доказательства теоремы Эйлера заметим, во-первых, что если граф  $G$  — дерево, то величины слева и справа от знака равенства равны 0. Действительно, непустых эйлеровых подграфов в дереве нет, а число ребер в нем больше числа вершин на 1. Наоборот, если цикломатическое число данного связного графа равно 0, то этот граф — дерево. Действительно, любой простой цикл в графе — эйлеров подграф в нем. Пусть теперь теорема Эйлера доказана для всех связных графов с цикломатическим числом  $k$ . Возьмем граф  $G$ , в котором  $|E(G)| - |V(G)| + 1 = k + 1$ . Выкинув из него произвольное ребро  $e$ , стирание которого не нарушает связности графа, мы получим граф с цикломатическим числом  $k$ . Рассмотрим в  $C(G)$  подпространство эйлеровых подграфов, не содержащих ребро  $e$ . Это подпространство совпадает с пространством  $C(G_0)$  эйлеровых подграфов в графе  $G_0$ , поэтому его размерность равна  $k$ . С другой стороны, поскольку выкидывание ребра  $e$  не нарушает связности графа  $G$ , через  $e$  проходит хотя бы один цикл, а значит,  $e$  содержится хотя бы в одном эйлеровом подграфе. Сумма над  $Z_2$  любых двух таких эйлеровых подграфов не содержит  $e$ , следовательно, лежит в  $C(G_0)$ . Тем самым, пространство  $C(G)$  является прямой суммой пространств  $C(G_0)$  и одномерного векторного пространства, натянутого на произвольный вектор, представленный циклом, содержащим ребро  $e$ . Поэтому его размерность равна  $k + 1$ , и теорема Эйлера доказана.

Мы показали, что хроматический многочлен графа  $\chi_G(c)$  удовлетворяет соотношению

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_e}(c) - \chi_{G''_e}(c)$$

для любого ребра  $e$  в графе  $G$ . Однако хроматический многочлен — не единственный инвариант графов, удовлетворяющий такому соотношению. Татт называет  $W$ -функцией всякий инвариант графов  $f$ , удовлетворяющий соотношению

$$f(G) = f(G'_e) + f(G''_e)$$

**Определение 2.6.** Границей отрезка с концами  $a, b$  называется (формальная) сумма этих концов, т.е.  $\partial : [a, b] \mapsto [a] + [b]$ . Границей треугольника с вершинами  $a, b, c$  называется (формальная) сумма его сторон, т.е.  $\partial : [a, b, c] \mapsto [a, b] + [b, c] + [c, a]$ . Границу точки будем считать равной нулю  $\partial([a]) = 0$ .

В этих и нижеследующих определениях в этом параграфе мы рассматриваем суммирование по модулю 2, т.е. линейные комбинации объектов с коэффициентами из группы вычетов  $Z_2$  (или, что то же самое, из поля вычетов  $F_2$ ). Ключевым фактом в определении и изучении гомологий является следующее свойство: Пусть теперь  $S$  — поверхность и  $G$  — граф в ней, разбивающий ее на треугольники (т.е. триангуляция). Для  $n = 0, 1, 2$  определим пространство цепей размерности  $n$  для пары  $(S, G)$  как векторное пространство над  $F_2$ , порожденное

- при  $n = 0$  вершинами графа  $G$ ;
- при  $n = 1$  ребрами графа  $G$ ;
- при  $n = 2$  гранями вложения графа  $G$ .

Если мы хотим определить гомологии с коэффициентами в других группах — скажем, с коэффициентами в целых числах  $Z$  или в вещественных числах  $R$ , то мы можем рассматривать в качестве групп цепей группы, порожденные вершинами, ребрами и треугольниками какой-либо триангуляции. Однако нам надо таким образом изменить определение граничных отображений, чтобы оставалось неизменным свойство “у границы нет границы”. В определении, которое мы использовали в случае поля коэффициентов  $F_2$ , выполнение этого свойства обеспечивалось равенством  $1 + 1 = 0$ , которое в других группах и полях, как правило, не выполняется.

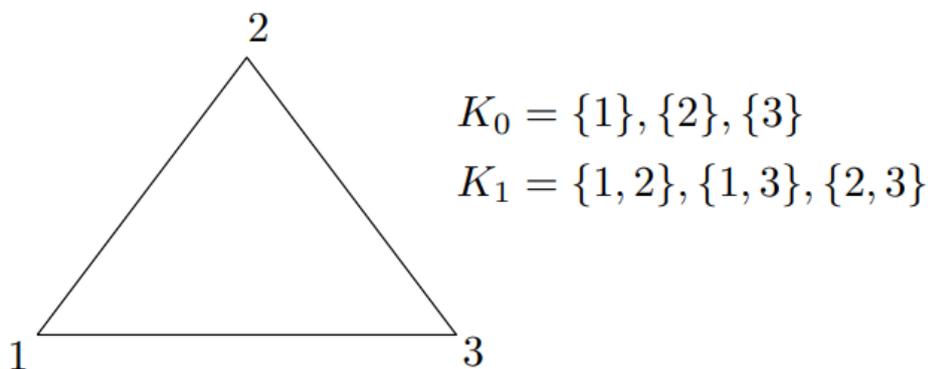


Рисунок 2.1 — Триангуляция окружности.

Рассмотрим теперь какую-нибудь триангуляцию  $G$  поверхности  $S$  и зафиксируем ориентацию каждого ее отрезка и каждого ее треугольника (т.е. выберем одну из двух возможных ориентаций). Обозначим, через  $C_0(S, G; R), C_1(S, G; R), C_2(S, G; R)$  векторные пространства, порожденные над полем вещественных чисел  $R$ , соответственно, вершинами, ребрами и треугольниками триангуляции с выбранными ориентациями. Те же элементы с другой ориентацией будем отождествлять с базисными элементами, взятыми с противоположным знаком.

Графы — одномерные объекты (хотя мы и не знаем, что такое размерность, но смысл этого утверждения понятен). В этой главе мы нач-

нем изучение двумерных объектов — поверхностей. Так же, как и графы, поверхности могут выступать как в своей комбинаторной, так и в топологической ипостаси. В топологии изучают объекты любой размерности, иногда даже бесконечномерные. При этом часто используются комбинаторные методы изучения топологических объектов.

Гомоморфизмом  $A$ -модулей называется такой гомоморфизм  $\phi : M \rightarrow N$ , что  $\phi(M_j) \subset N_j$  и  $\phi(a \cdot \mu) = a \cdot \phi(\mu)$  для любых  $a \in A, \mu \in M$ . Если же вместо первого свойства выполнено  $\phi(M_j) \subset N_{j+s}$ , то говорят, что  $\phi$  — гомоморфизм, повышающий градуировку на  $s$  (или понижающий на  $-s$ , если  $s < 0$ ). Также говорят, что  $\phi$  является однородным гомоморфизмом степени  $s$ . Изоморфизм модулей определяется стандартным образом (гомоморфизм, для которого существует обратный гомоморфизм).

Пусть  $K$  — симплициальный комплекс на множестве  $[m]$  (построения этого подраздела без изменений переносятся на симплициальные чумы, но для простоты мы ограничимся комплексами). Будем считать, что на множестве вершин задан естественный порядок:  $1 < 2 < \dots < m$ . Фиксируем основное кольцо  $k$  — поле или кольцо целых чисел. При  $j \geq 0$  определим группу

$$C_j(K; k) = k \{I \in K \mid \dim(I) = j\} = \left\{ \sum_{I \in K, \dim(I)=j} a_I I \mid a_I \in k \right\}$$

(свободный  $k$ -модуль, порожденный симплексами  $K$  размерности  $j$ ), называемую группой  $j$ -мерных цепей комплекса  $K$  с коэффициентами в  $k$ . Зададим  $k$ -линейное отображение  $\partial : C_j(K; k) \rightarrow C_{j-1}(K; k)$ , называемое симплициальным дифференциалом. Поскольку модуль  $C_j(K; k)$  свободно порожден элементами  $I \in K, \dim(I) = j$ , достаточно задать значение дифференциала на этих элементах. Пусть  $I = \{i_0, \dots, i_j\}$ , где  $i_0 < \dots < i_j$ . Положим

$$\partial I = \sum_{s=0}^j (-1)^s \{i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_j\} \in C_{j-1}(K; k)$$

Имеем последовательность гомоморфизмов модулей

$$\partial I = \sum_{s=0}^j (-1)^s \{i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_j\} \in C_{j-1}(K; k)$$

Выполняется свойство  $\partial \circ \partial = 0$ , тогда  $Im(C_{j+1}(K; k) \rightarrow C_j(K; k)) \subset Ker(C_j(K; k) \rightarrow C_{j-1}(K; k))$ . Определим группу  $j$ -х симплициальных гомотологий (с коэффициентами в  $k$ ):

$$H(K; k) = \frac{Ker(C_j(K; k) \rightarrow C_{j-1}(K; k))}{Im(C_{j+1}(K; k) \rightarrow C_j(K; k))}$$

Группы симплициальных гомотологий являются топологическим (и даже гомотопическим инвариантом), т.е. не зависят от триангуляции пространства. Иными словами, если  $K_1, K_2$  — такие симплициальные комплексы, что  $|K_1| \cong |K_2|$  (или даже  $|K_1|$  гомотопически эквивалентно  $|K_2|$ ), то  $H_j(K_1; k) \cong H_j(K_2; k)$  при всех  $j$  и  $k$ . То же верно и для определенных ниже групп когомотологий и их приведенных аналогов.

Пусть  $(X, A)$  — топологическая пара, т.е.  $X$  — топологическое пространство, а  $A$  — его подпространство. Мы можем считать, что  $C_j(A; k) \rightarrow C_j(X; k)$  при всех  $j \leq 0$ . Иными словами, можно считать, что сингулярные симплексы на  $A$  — это в точности те сингулярные симплексы на  $X$ , образы которых попали в  $A$ . Таким образом дифференциальный комплекс  $C_*(A; k), \partial$  является дифференциальным подкомплексом дифференциального комплекса  $C_*(X; k), \partial$ . Построим фактор-комплекс, а именно, рассмотрим  $k$ -модули

$$C_j(X; A; k) = C_j(X, k) / C_j(A; k)$$

И дифференциал  $\partial : C_j(X, A, k) \rightarrow C_{j-1}(X, A, k)$ , индуцированный дифференциалом  $\partial : C_j(X; k) \rightarrow C_{j-1}(X; k)$ . Имеем дифференциальный комплекс, гомотологии которого записываются так

$$H(K; A; k) = \frac{Ker(C_j(K; A; k) \rightarrow C_{j-1}(K; A; k))}{Im(C_{j+1}(K; A; k) \rightarrow C_j(K; A; k))}$$

называются группами относительных гомологий пары  $(X, A)$ . Рассмотрим свойства в определенном порядке.

**Функториальность.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств. Тогда при всех  $j \leq 0$  имеются канонические  $k$ -линейные гомоморфизмы  $f_* : H_j(X) \rightarrow H_j(Y)$  и  $f^* : H_j(Y) \rightarrow H_j(X)$ , называемые индуцированными отображениями в гомологиях и когомологиях соответственно. Существуют аналогичные индуцированные отображения в приведенных гомологиях и когомологиях.

Отображение пары  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  (т.е.  $f : X \rightarrow Y$ , т.ч.  $f(A) \subset B$ ) индуцирует гомоморфизмы относительных гомологий  $f_* : H_j(X, A) \rightarrow H_j(Y, B)$  и когомологий  $f^* : H_j(Y, B) \rightarrow H_j(X, A)$ .

**Гомотопическая инвариантность.** Если  $f, g : X \rightarrow Y$  — гомотопные отображения, то  $f_* = g_*$  и  $f^* = g^*$ . В частности, отсюда следует, что если  $X$  гомотопически эквивалентно  $Y$ , то  $H_j(X) \cong H_j(Y)$  и  $H_j(X) \cong H_j(Y)$ . Аналогично для приведенных версий.

# Функториальность сингулярных гомологий

Группы гомологий топологического пространства  $X$  можно определить разными способами, причём эти определения эквивалентны только для достаточно хороших пространств. С точки зрения наглядности наиболее просто выглядит определение симплициальных гомологий. Но у этого определения есть существенный недостаток: оно не инвариантно, точнее говоря, доказательство его инвариантности требует определённых усилий. (Под инвариантностью здесь подразумевается изоморфность групп гомологий гомеоморфных пространств.) Но основные идеи теории гомологий лучше всего выявляются на уровне симплициальных гомологий, поэтому мы начнём с подробного обсуждения симплициальных гомологий. Абсолютные гомологии являются частным случаем относительных (когда подпространство является пустым). Относительные же гомологии, в общем случае, через абсолютные не выражаются. Тем не менее, в одном важном случае, который чаще всего и встречается на практике, относительные гомологии сводятся все-таки к абсолютным.

**Теорема 3.1.** Пусть  $X$  – клеточное пространство,  $(A, X)$  – клеточное подпространство. Тогда для всех  $k > 0$  имеет место изоморфизм  $H_k(X, A) \rightarrow H_k(X/A)$ .

Рассмотрим примеры гомоморфизмов. Рассмотрим пространство  $\Psi$  конфигураций вида  $[(a, b, c, d), (x, y, z)]$ , где  $(a, b, c, d)$  — четвёрка,  $(x, y, z)$  — тройка точек на окружности. Порядковый комплекс для таких (невырожденных) конфигураций является симплициальным подразбиением более простого комплекса. А именно конуса над открытым четырёхугольником. Выброшенные вершины этого четырёхугольника соответствуют трёхточечным подмножествам четвёрки  $(a, b, c, d)$ . Гомологии этого комплекса порождаются циклами четырёхугольника. Конфигурационное пространство  $\Psi$  состоит из нескольких связных компонент, так как мы по-разному можем расположить точки четвёрки относительно точек тройки. При этом возможен случай, когда какие-то две точки тройки оказываются соседними на окружности. Рассмотрим вырождение такой конфигурации, склеивающее две точки тройки. При таком вырождении порядковый комплекс конфигурации не изменяется. Действительно, вершина соответствующая тройке точек  $(a, b, c)$  превращается в вершину соответствующую паре  $(a, b)$  и условию  $\phi'(a) = 0$ . Значит, слои над невырожденными и вырожденными конфигурациями такого типа совпадают. То есть эта связная компонента пространства  $f_2$  является расслоением над многообразием с непустым краем. Следовательно, циклов старшей размерности у неё нет и можно исключить эту компоненту связности из рассмотрения. Остаются конфигурации, для которых каждые две точки тройки разделены точкой из четвёрки (а также их вырождения). Множество таких невырожденных конфигураций связно и гомеоморфно  $S^1 R^6$ , в частности ориентируемо. Гомологии слоя над внутренностью этой связной компоненты нам уже известны. Они порождаются замкнутыми циклами четырёхугольника с выброшенными пятками ног. То есть их пространство изоморфно  $Z_3$ .

Посмотрим, что происходит с этими циклами при устремлении точ-

ки базы к границе. Для начала рассмотрим внутренние вырождения. В конфигурации  $[(a, b, c, d), (x, y, z)]$  всегда есть две точки из четвёрки, соседние на окружности. Допустим, это точки  $a$  и  $b$ . Посмотрим что происходит с комплексом при столкновении этих точек. Вершины четырёхугольника, соответствующие тройкам  $(a, c, d)$  и  $(b, c, d)$ , склеиваются. Вместе с ними склеиваются и соответствующие двумерные грани. Таким образом, цикл  $\xi = (a, c, d) - (b, c, d)$  перейдёт в ноль, а все остальные циклы — во что-то ненулевое. Значит единственный цикл, претендующий на ненулевой вклад в инварианты — цикл  $\xi$ . Далее нужно проверить, является ли  $\xi$  циклом во всём пространстве  $F_5/F_4$ . Для этого необходимо вычислить его границу при всевозможных столкновениях точки из тройки и точки из четвёрки в базе. Эта граница — некоторый двумерный цикл в страте  $f_1$ . Необходимо выяснить, является ли этот цикл границей какой-нибудь трёхмерной цепи пространства  $f_1$ . Если нет, значит  $\xi$  не продолжается до цикла во всём члене  $F_5/F_4$ . В противном случае мы получим цикл пространства  $F_5/F_4$ , претендующий на вклад в инварианты. И для этого цикла нужно будет также вычислять границу при приклеивании меньших членов фильтрации.

Двумерные симплексы определяются тройками попарно инцидентных друг другу вершин комплекса. Мы будем рассматривать только такие симплексы, одна из вершин которых находится в главной вершине комплекса. Такие двумерные симплексы подразделяются на три типа. А именно, (1) грани, определяющиеся вершинами третьего и второго уровня, (2) грани, определяющиеся вершинами третьего и первого уровня и (3) грани, определяющиеся вершинами второго и первого уровня.

Таким образом, рассмотрим реализацию персистентной (устойчивой) гомологии для прикладной задачи, которая состоит в предсказании временного ряда по доступному датасету с методом уменьшения размерности [11]. Методы уменьшения размерности являются мощными ин-

струментами для предварительной обработки и визуализации данных. которые, как правило, имеют мало гарантий относительно топологической корректности вложения. Расстояние чередования между постоянными гомологиями фильтраций Виеториса-Рипса может быть использовано для того, чтобы определить масштаб, на котором топологические особенности, такие как кластеры или дыры во вкраплении и исходном соответствуют друг другу. Мы показываем, как оптимизация, направленная на минимизацию расстояния чередования расстояния может быть включена в алгоритмы уменьшения размерности, и наглядно демонстрируем ее использование для поиска оптимальной линейной проекции. Мы демонстрируем полезность этой схемы для данных визуализация

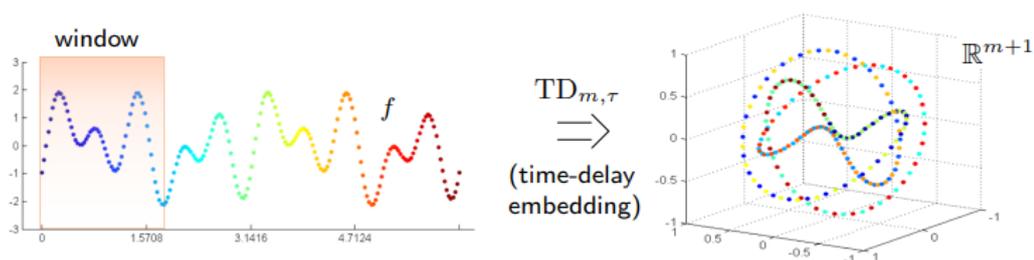


Рисунок 3.1 — (сверху) Здесь точки  $x$  и  $y$  эквивалентны в  $X$  в том смысле, что  $x \cup y$  является границей пути  $s$  (включенного в  $X$ ).

На рисунке 3.2 представлен метод понижения размерности. Снижение размерности является важным компонентом многих задач анализа данных, но может быть потенциально проблематичным, поскольку оно может "выявить" структуру в данных, которой на самом деле нет. В выводах это может быть решено путем принципиального использования скрытого тестового набора или анализа, в котором выбор модели осуществляется более непосредственно. Однако при анализе данных для исследования может быть трудно решить проблемы отбора, возникающие при исследовании различных методов уменьшения размерности, такие

как например, действительно ли визуализированные структуры присутствуют на самом деле или являются артефактом выбранного вложения. В данной работе мы разработали использование расстояния чередования для количественной оценки степени, в которой топологические особенности вкрапления соотносятся с особенностями исходного набора данных. В явном виде мы можем вычислить порог, после которого особенности определенного размера в постоянной гомологии фильтрации Виеториса-Рипса находятся в соответствии один к одному между набором данных до и после уменьшения размерности. Более того, мы показываем, как найти локальные минимумы этого порога с помощью оптимизации и демонстрируем это на задаче поиска оптимальных проекций набора данных.

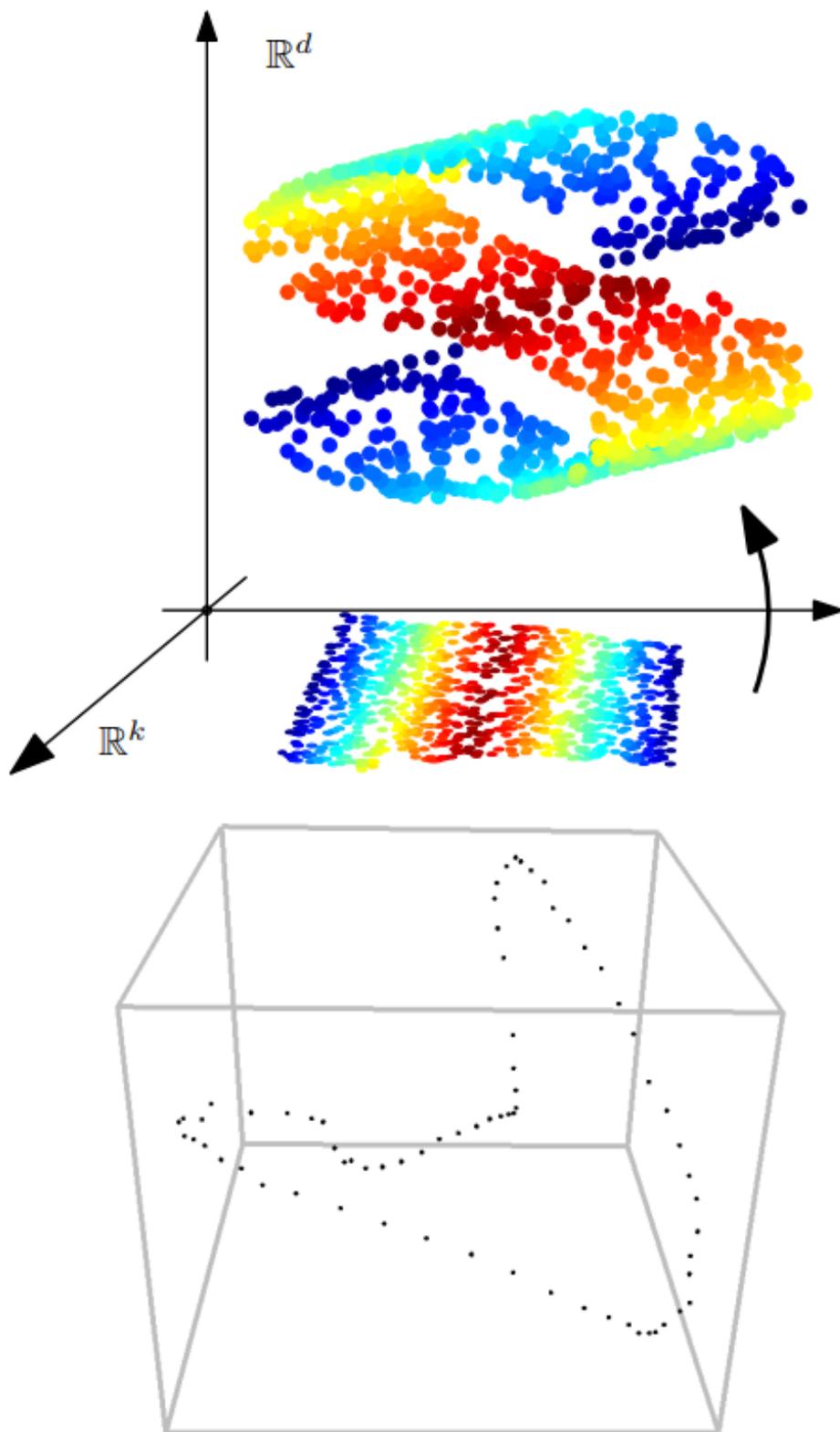


Рисунок 3.2 — (слева) Здесь точки  $x$  и  $y$  эквивалентны в  $X$  в том смысле, что  $x \cup y$  является границей (непрерывного) пути  $s$  (включенного в  $X$ ). (справа) Здесь пути  $s$  и  $s_0$  эквивалентны, потому что  $s \cup s_0$  является границей непрерывной поверхности  $S$ , включенной в

$X$  . Кроме того,  $c_0$  тривиальна, потому что  $c \cup$  - граница непрерывной поверхности в  $X$  .

Наш метод может быть объединен с другими целями оптимизации, такими как максимизация дисперсии в проекции как в PCA. Одним из ограничений нашего метода является то, что расстояние узкого места является негладким и имеет много локальных минимумов. Гибридные схемы, сочетающие оптимизацию расстояния узкого места с другими целями, могут в целом помочь в оптимизации. Одно из направлений будущей работы, которое может помочь улучшить способность определять, есть ли топологические особенности в вкраплениях соответствия исходному набору данных, является разработка методов чередования, основанных на нелинейных картах сдвига. В результате применения имеем следующую персистентную диаграмму - рисунок 3.11.

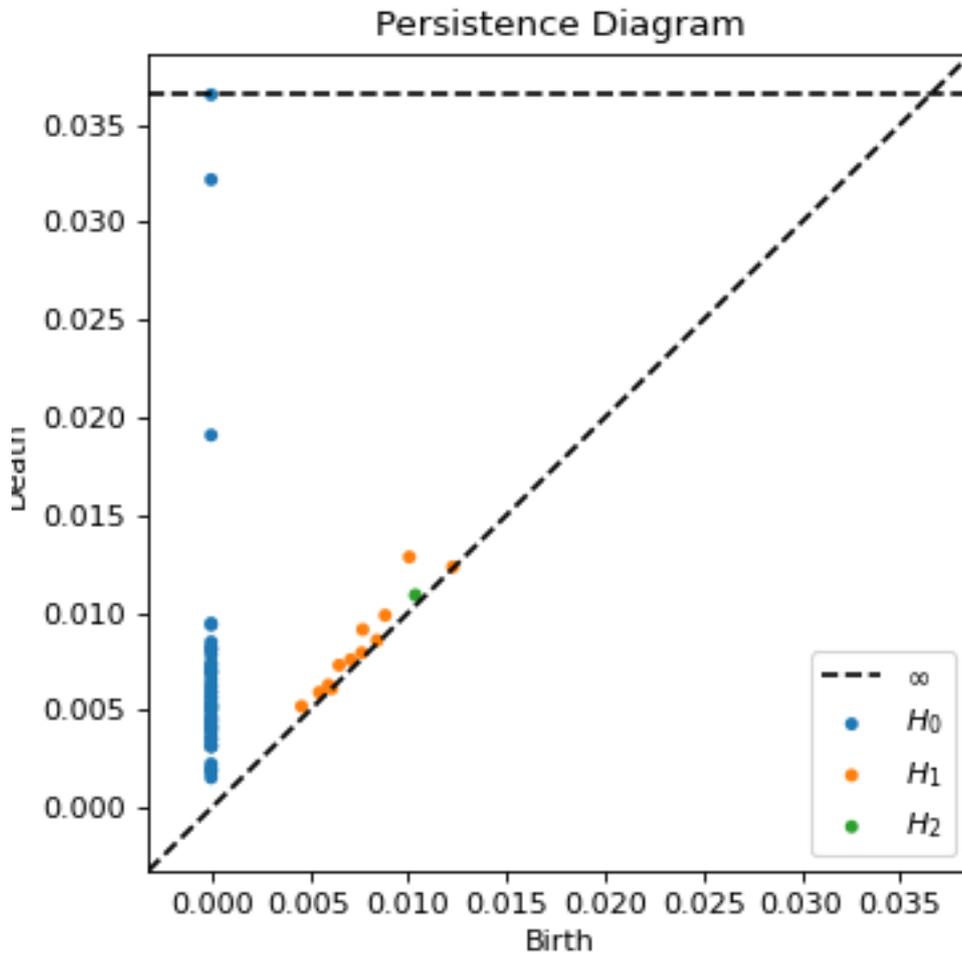


Рисунок 3.3 — Персистентная диаграмма для выделенных данных

Финальное предсказание имеет вид временного ряда для выделенных переменных - рисунок 34.

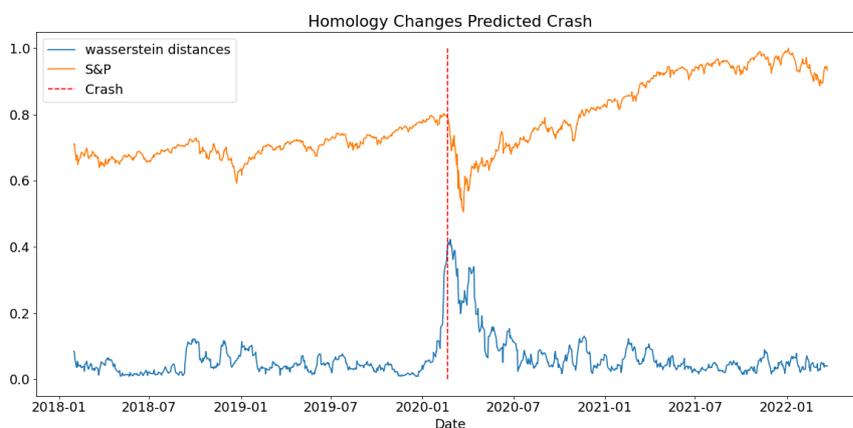


Рисунок 3.14 — Финальное предсказание для временного ряда.

Отдельно отмечена начальная позиция желтым цветом, предсказания

для расстояний Вассерштайна - синим цветом и момент ближайшей сходимости величин - красная линия.

Мы включаем оптимизацию расстояния узкого места в проекционное преследование и обнаруживаем, что наш метод может сохранять топологическую информацию при проецировании из высокоразмерных пространств в двумерные для визуализации. В нескольких случаях мы обнаружили, наш метод фокусируется на визуализации подмножества важных топологических структур, поскольку ортогональность подпространств в полного набора данных не позволяет визуализировать все структуры с помощью одной проекции.

# Заключение

Топологические методы стали мощным инструментом для распознавания и анализа изображений. Эти методы обеспечивают математическую основу для понимания формы и структуры сложных данных и позволяют эффективно и точно классифицировать изображения на основе их топологических особенностей. Одним из ключевых преимуществ топологических методов является их способность работать с шумными, неполными или высокоразмерными данными. Они могут применяться для решения широкого круга задач распознавания изображений, включая обнаружение объектов, сегментацию и классификацию, и, как было показано, в определенных сценариях превосходят традиционные подходы машинного обучения. Несмотря на многообещающие результаты, топологические методы все еще являются активной областью исследований, и многое еще предстоит сделать для разработки более эффективных и масштабируемых алгоритмов, а также для улучшения их интерпретируемости и применимости к реальным задачам. Тем не менее, их потенциал для преобразования области распознавания образов очевиден, и будет интересно посмотреть, как эти методы будут развиваться в ближайшие годы. Топологические методы приобрели популярность в последние годы благодаря своей способности извлекать глобальные особенности из сложных наборов данных, которые трудно уловить традиционными алгоритмам машинного обучения. В распознавании изображений топологические методы могут использоваться для идентификации гео-

метрических форм, извлечения информации о текстуре и распознавания пространственных паттернов.

# Литература

- [1] *Андерсон, Дж.* Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон // *Вильямс, 2004.* – 960 с.
- [2] *Борисович, Ю. Г.* Введение в топологию / Ю. Г. Борисович // *Наука; Физматлит, 1995.* – 416 с.
- [3] *Васильев, В. А.* Введение в топологию / В. А. Васильев // *Фазис, 1997.* – 132 с.
- [4] *Винберг, Э. Б.* Курс алгебры / Э. Б. Винберг // *М. : Факториал-пресс, 2001.* – 544 с.
- [5] *Кострикин, А. И.* Введение в алгебру. Ч. I: Основы алгебры / А. И. Кострикин // *М. : МЦНМО, 2020.* – 272 с.
- [6] *Кострикин, А. И.* Введение в алгебру. Ч. III: Основные структуры / А. И. Кострикин // *М. : Физматлит, 2004.* – 272 с.
- [7] *Ландо, С. К.* Графы и топология [Электронный ресурс] / С. К. Ландо // URL : <https://electives.hse.ru/data/2018/06/01/1150198748/GraphTopology18.pdf> (дата обращения: 02.04.2023). – Загл. с экрана. – Яз. рус.
- [8] *Татт, У.* Теория графов / У. Татт // *Диалектика, 2019.* – 240 с.

- [9] Уилсон, Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон // М. : Мир, 1988.  
– 424 с.
- [10] J.L. Gross, T.W. Tucker. Topological graph theory. / T.W. Tucker. J.L. Gross // *Wiley Interscience*, 1987. — 361 p.
- [11] Chevallereau, Christine. RABBIT: A Testbed for Advanced Control Theory / Christine Chevallereau // *IEEE CONTROL SYSTEMS MAGAZINE*.
- [12] George Cazenavette Tongzhou Wang, Antonio Torralba Alexei A. Efros Jun-Yan Zhu. Dataset Distillation by Matching Training Trajectories / Antonio Torralba Alexei A. Efros Jun-Yan Zhu George Cazenavette, Tongzhou Wang // *arXiv:2203.11932*.
- [13] Aykut İşleyen Nathan van de Wouw, Ömür Arslan. From Low to High Order Motion Planners: Safe Robot Navigation using Motion Prediction and Reference Governor / Ömür Arslan Aykut İşleyen, Nathan van de Wouw // *arXiv:2202.12816*.
- [14] Hawkins, Calvin. Differentially Private Formation Control: Privacy and Network Co-Design / Calvin Hawkins, Matthew Hale // *arXiv:2205.13406*.
- [15] M. Ando A. J. Blumberg, D. Gepner M. J. Hopkins. R-module Thom spectra, and twisted R-homology / D. Gepner M. J. Hopkins M. Ando, A. J. Blumberg.
- [16] Barwick, C. Cyclonic spectra, cyclotomic spectra, and a conjecture of Kaledin / C. Barwick, S. Glasman.
- [17] Bokstedt, M. On cyclic fixed points of spectra / M. Bokstedt.

- [18] *Rozenblyum, N.* A naive approach to genuine G-spectra and cyclotomic spectra / N. Rozenblyum.
- [19] *Polterovich, L.* Autonomous Hamiltonian flows, Hofer's geometry and persistence modules / L. Polterovich, E. Shelukhin.
- [20] *Xia, K.* Persistent homology analysis of protein structure, flexibility and folding / K. Xia, G. Wei.
- [21] *Kozlov, D.* Combinatorial Algebraic Topology / D. Kozlov.
- [22] *O. Bobrowski, M. Kahle.* Maximally persistent cycles in random geometric complexes / M. Kahle O. Bobrowski, P. Skraba.
- [23] *Bollobas, B.* Random Graphs / B. Bollobas.