

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Синхронизация двух колец нелокально связанных  
осцилляторов ФитцХью-Нагумо при неоднородном распределении  
межслойной связи**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 4032 группы  
направления 03.03.03 Радиофизика  
Института физики  
Медниковой Елены Сергеевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Т.Е. Вадивасова

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_ Г.И. Стрелкова

Саратов 2023 г.

## Введение

В связи с тем, что весь мир представляет собой ансамбли связанных элементов, коллективная динамика сложных систем различной природы, синхронизация ансамблей связанных осцилляторов, формирование разнообразных сложных пространственно-временных структур и их эволюция представляют собой одно из центральных направлений исследований в нелинейной динамике и связанных междисциплинарных областях науки. Полученные результаты отражены в большом количестве монографий [1-7] и статей [8-15]. На данный момент большое внимание ученых привлекает исследование нейронных ансамблей, так как это помогает понять динамику мозговой активности. Одним из классических осцилляторов, демонстрирующих нейронную активность является осциллятор ФитцХью-Нагумо [16,17]. Было показано, что в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо возможно появление различных сложных пространственно-временных структур, таких как химерные состояния [18, 19, 20] и уединенные состояния [21, 22]. Химерные состояния – это режим сосуществования в ансамбле синхронных (когерентных) и несинхронных (некогерентных) кластеров. Уединенные состояния – это режим, когда на профиле ансамбля элементов появляются отдельные «уединенные» осцилляторы, которые при вариации коэффициента связи начинают покидать синхронный кластер в случайных положениях в пространстве.

Кроме однослойной сети, также изучается динамика многослойных систем связанных ансамблей нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо. В работе [21] исследовались пространственно-временные закономерности, возникающие в двухслойной мультиплексной сети нейронов ФитцХью-Нагумо в колебательном режиме. В этой сети каждый слой был представлен нелокально связанным кольцом. Авторы показывают, что слабое мультиплексирование, т. е. когда связь между слоями меньше, чем внутри слоев, может оказать значительное влияние на динамику нейронной сети. Более того, показывается, что введение

несоответствия силы связи между слоями может подавлять химерные состояния с одним некогерентным кластером (одноголовые химеры) и индуцировать другие режимы, такие как синфазная синхронизация или двуглавые химеры. Интересно, что небольшое несоответствие силы связи внутри слоя позволяет индуцировать одиночные выбросы по всей сети. В работе [23] численно изучалась пространственно-временная динамика и синхронизация гетерогенной двухслойной мультиплексной сети, где каждый слой был представлен кольцом нелокально связанных нейронов ФитцХью-Нагумо в колебательном режиме. Слои были двунаправленно связаны либо через быструю (активатор), либо через медленную (ингибитор) переменную. Выбирались различные значения для параметров внутрислойной связи и начальных условий, которые обеспечивают наблюдение различных пространственно-временных структур, таких как уединенные состояния, химерные состояния и комбинированные состояния (сосуществование уединенных и химерных состояний) в каждом слое. Авторы установили, что, когда первое и второе кольца изначально демонстрируют режим уединенных и химерных состояний, может наблюдаться полная синхронизация между слоями, когда каждый слой демонстрирует когерентную динамику. В этом случае вся сеть колеблется периодически и синхронно. Исследования показали, что эта ситуация типична для рассматриваемой сети и не зависит от того, через какие переменные, быстрые или медленные связаны подслои.

Целью данной выпускной работы является выявление особенностей динамики двухслойной системы, состоящей из колец нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо, при неоднородном распределении силы межслойной связи.

Для достижения данной цели ставились следующие задачи:

1. Исследовать динамику одиночного осциллятора ФитцХью-Нагумо;
2. Изучить динамику двухслойной системы связанных колец ФитцХью-Нагумо при однородном распределении коэффициентов связи;

3. Исследовать изменение в мгновенных профилях и распределении глобальной ошибки синхронизации при введении неоднородности в межслойной связи по быстрым переменным.

Для выполнения поставленных задач применялось компьютерное моделирование, которое включало в себя написание программного кода на языке программирования C, и визуализацию полученных данных с помощью программы Gnuplot.

### 1. Динамика одиночного осциллятора ФитцХью-Нагумо

Модель ФитцХью-Нагумо (1961) является общей моделью для возбудимых сред [16, 17]. ФитцХью назвал свою упрощенную модель моделью Бона Хоффера-ван дер Поля и вывел ее в 1960-х годах как упрощение уравнений Ходжкина-Хаксли. Из-за ее простой формы, содержащей только две переменных, и простоты моделирования она широко используется. Эта модель способна воспроизводить многие качественные характеристики электрических импульсов проходящим по нервным и сердечным волокнам, такие как наличие порога возбуждения, относительных и абсолютных рефрактерных периодов, генерация цугов импульсов под действием внешних токов. Для изучения феноменов, наблюдаемых в нервах сердечной мышцы необходимо понимание динамических принципов работы отдельных клеток – нейронов. Нейрон состоит из тела и отростков, отходящих от него [24].

Мы исследуем следующий вид осциллятора ФитцХью-Нагумо:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{du}{dt} &= u - \frac{u^3}{3} - v; \\ \frac{dv}{dt} &= u + a;\end{aligned}\tag{1}$$

где  $u_i$  и  $v_i$  – переменные активатора и ингибитора соответственно,  $i=1, \dots, N$ , где  $N$  – общее количество элементов в сети.  $\varepsilon > 0$  – параметр, отвечающий за разделение во времени быстрого активатора и медленного ингибитора, который зафиксирован  $\varepsilon = 0.01$ , а  $a$  – определяет порог возбудимости.

Для моделирования динамики осциллятора ФитцХью-Нагумо была написана программа на языке программирования С. Для численного расчета уравнений использовался метод Рунге-Кутты с шагом интегрирования  $h = 0.001$  и временем интегрирования  $t = 1000$ .

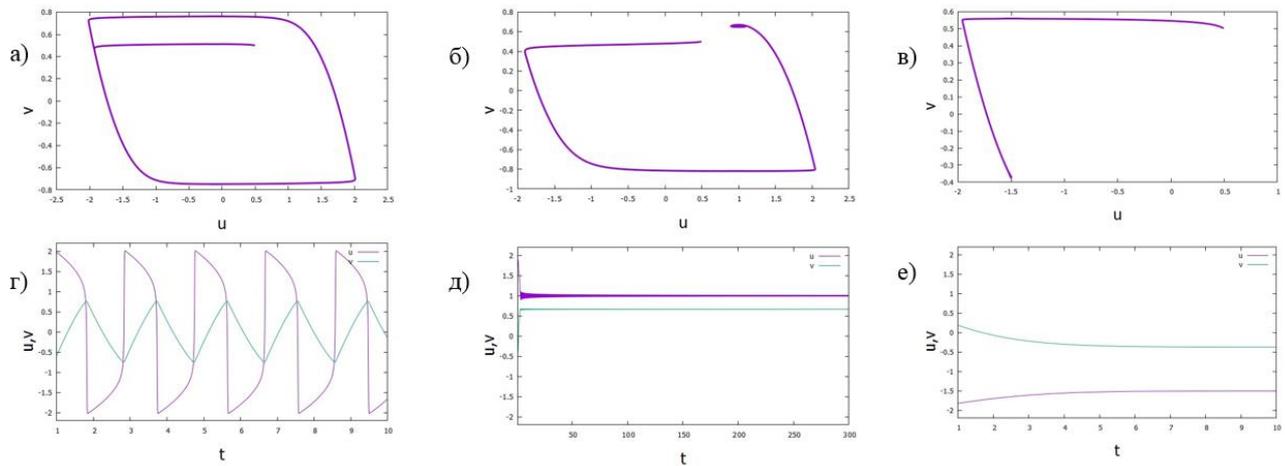


Рисунок 1 - Фазовые портреты и временные реализации при: (а) и (г)  $a = 0.1$ , (б), (д)  $a = -1$ , (в) и (е)  $a = 1.5$ . Другие параметры:  $\varepsilon = 0.001$ ,  $h = 0.001$ ,  $t = 1000$ .

## 2. Исследование динамики кольца двухслойной системы колец нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо

В работе [22] было показано, что в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при изменении параметров нелокальной связи могут наблюдаться: синхронный и асинхронный режим, бегущие волны, уединенные состояния, химерные состояния разных типов, а также режим сосуществования химерных и уединенных состояний. Этот раздел выпускной квалификационной работы посвящен повторению результатов, полученных в работе [26]. Рассматривается сеть, состоящая из двух колец нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо:

$$\varepsilon_i \frac{du_{1i}}{dt} = u_{1i} - \frac{u_{1i}^3}{3} - v_{1i} + \frac{\sigma_1}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [b_{uu}(u_{1j} - u_{1i}) + b_{vv}(v_{1j} - v_{1i})] + \sigma_{12}^u (u_{2i} - u_{1i}), \quad (2)$$

$$\frac{du_{1i}}{dt} = u_{1i} + a_i + \frac{\sigma_1}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [b_{uu}(u_{1j} - u_{1i}) + b_{vv}(v_{1j} - v_{1i})] + \sigma_{12}^u (u_{2i} - u_{1i}),$$

$$\varepsilon_i \frac{du_{2i}}{dt} = u_{2i} - \frac{u_{2i}^3}{3} - v_{2i} + \frac{\sigma_2}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [b_{uu}(u_{2j} - u_{2i}) + b_{vv}(v_{2j} - v_{2i})] + \sigma_{21}^u (u_{1i} - u_{2i}),$$

$$\frac{du_{2i}}{dt} = u_{2i} + a_i + \frac{\sigma_2}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [b_{uu}(u_{2j} - u_{2i}) + b_{vv}(v_{2j} - v_{2i})] + \sigma_{21}^u (u_{1i} - u_{2i}),$$

где  $u_{1i}$  и  $u_{2i}$  являются активаторами или быстрыми переменными в первом и втором кольцах, соответственно, а  $v_{1i}$  и  $v_{2i}$  являются ингибиторами или медленными переменными в каждом кольце.  $i=1, 2, \dots, N$  - номер элемента, при этом  $N=300$  - общее количество узлов в каждом ансамбле. Локальная динамика каждого осциллятора ФитцХью-Нагумо контролируется параметром разделения по шкале времени  $\varepsilon > 0$  и параметром порога возбудимости  $a_i$ . Радиус внутрислойной связи задается переменной  $P=105$ , которая обозначает количество ближайших соседей  $i$ -го узла с обеих сторон в каждом слое.  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  определяют нелокальные силы внутрислойной связи в первом и втором кольце соответственно. Межслойная связь определяется парами  $(\sigma_{12}^u, \sigma_{12}^v)$  в первом слое и  $(\sigma_{21}^u, \sigma_{21}^v)$  во втором слое.

Для исследования пространственно-временной динамики изолированных колец осцилляторов ФитцХью-Нагумо была написана новая программа, которая использует метод Рунге - Кутты 4-го порядка. Были построены мгновенные профили системы при разных параметрах.

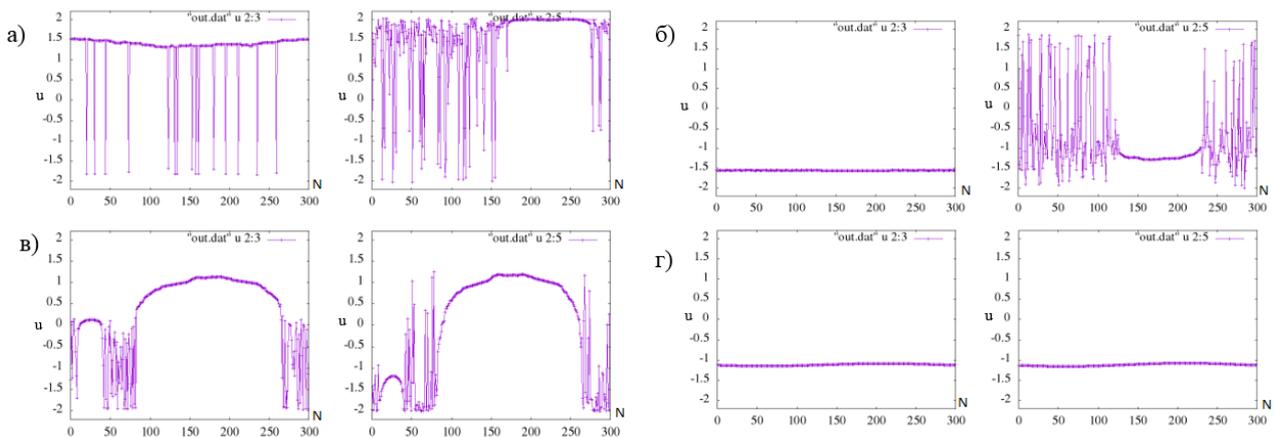


Рисунок 2 - Мгновенные профили первого (фрагмент слева) и второго (фрагмент справа) колец при: (а)  $\sigma^u = 0$ , (б)  $\sigma^u = 0.003$ , (в)  $\sigma^u = 0.029$ , (г)  $\sigma^u = 0.076$ . Другие параметры:  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\sigma_2 = 0.3$ ,  $\varphi_1 = \pi/2 - 0.2$ ,  $\varphi_2 = \pi/2 - 0.04$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $a = 0.5$ ,  $P = 105$ ,  $N = 300$ ,  $t = 3000$ .

### 3. Динамика двухслойной сети колец ФитцХью-Нагумо при неоднородном распределении силы межслойной связи

В данном разделе исследуется та же самая сеть, которая была описана и исследована в предыдущем разделе – уравнение (2) – однако, в данном случае сила межслойной связи не равна для всех пар взаимодействующих элементов. Здесь сила межслойной связи неоднородно распределена по ансамблю элементов:  $[\sigma-D, \sigma+D]$ , где  $D$  - ширина интервала распределения,  $\sigma$  – среднее значение. В данном разделе исследуется двухслойная сеть, в которой слои связаны только через быстрые переменные, следовательно, неоднородность вводится только в  $\sigma^u$ , а  $\sigma^v=0$ .

Для анализа поведения сети в целом и количественной оценки степень синхронизации, используется стандартное отклонение с усреднением как по времени, так и по элементам ансамбля:

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{300} \left( \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (u_i^1 - u_i^2)^2 dt \right)$$

При этом отбрасывается переходное время, составляющее  $t_1 = 4000$  безразмерных единиц времени и интеграл, берется по  $t_2 = 5000$ . Если слои в сети полностью синхронизированы, то  $\delta = 0$  – данная характеристика была названа «глобальная ошибка синхронизации». Однако, хорошо известно, что полная синхронизация может наблюдаться только в системе идентичных слоев. В связи с тем, что исследуются не идентичные слои, то вводится понятие эффективной синхронизации при  $0.0001 < \delta < 0.001$ , а при  $\delta < 0.0001$  можно говорить о (относительно) полной межслойной синхронизации.

Исследуем мгновенные профили первого и второго колец при различной силе связи и ширины интервала распределения через быстрые переменные.

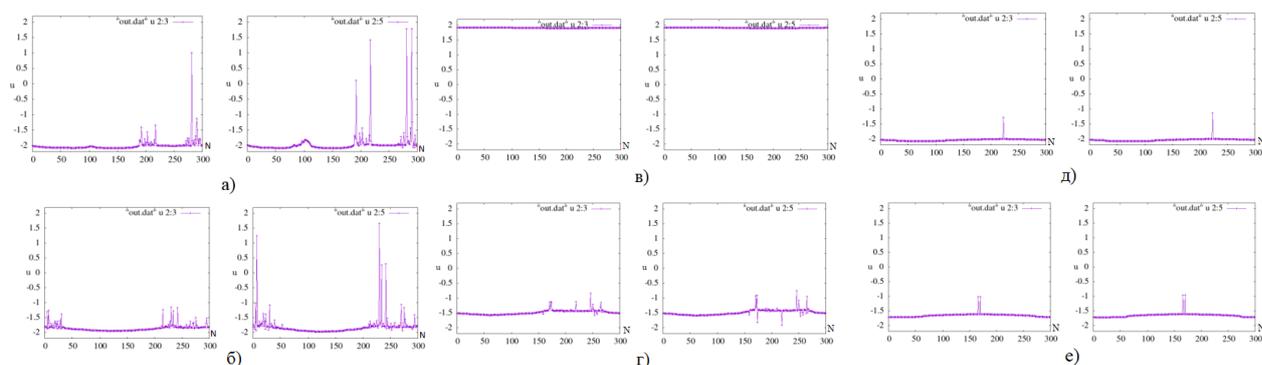


Рисунок 5 – Мгновенные профили первого (фрагмент слева) и второго (фрагмент справа) колец. Для  $D = 0$  при: (а)  $\sigma = 0.05$ , (в)  $\sigma = 0.105$ , (д)  $\sigma = 0.22$ . Для  $D = 0.049$  при: (б)  $\sigma = 0.05$ , (г)  $\sigma = 0.105$ , (е)  $\sigma = 0.22$ . Другие параметры:  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\sigma_2 = 0.3$ ,  $\varphi_1 = \pi/2 - 0.2$ ,  $\varphi_2 = \pi/2 - 0.04$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $a = 0.5$ ,  $P = 105$ ,  $N = 300$ ,  $t = 3000$ .

Исследования показывают, что при таком способе задания межслойной связи интервал полной синхронизации и появления уединенных состояний сдвигается в область большей силы связи (среднего значения) относительно случая однородного распределения.

Заметим, что при задании неоднородного распределения был возможен выход в отрицательную область значений силы, при  $\sigma < D$ , т.к.  $[\sigma - D, \sigma + D]$ . Поэтому мог бы возникнуть вопрос, не наблюдается ли часть особенностей динамики такой двухслойной системы из-за наличия отрицательной связи между некоторыми элементами. В связи с этим, мы проанализировали динамику такой же двухслойной сети, однако, при выходе значения силы связи в отрицательную области, мы приравнивали этот коэффициент нулю. Такое задание неоднородного распределения силы межслойной связи дало качественно те же результаты, что и при выходе этого коэффициента в отрицательную область.

### Заключение

В данной выпускной квалификационной работе была исследована динамика одиночного осциллятора ФитцХью-Нагумо при различных значениях управляющего параметра. Для моделирования модели ФитцХью-Нагумо была

написана программа на языке программирования С. Для численного расчета уравнений использовался метод Рунге - Кутты.

Были также исследованы особенности динамики двухслойной мультиплексной сети, где каждый слой представлен кольцом нелокально связанных генераторов ФитцХью-Нагумо. В численном моделировании двунаправленная межслойная связь задавалась либо через быстрые переменные (активаторы  $u$ ), либо через медленные переменные (ингибиторы  $v$ ). Были построены мгновенные профили первого и второго колец при различных значениях силы межслойной связи. Результаты качественно и количественно повторяли те, что описаны в работе [23], таким образом мы заключили, что написанная программа работает корректно и можно перейти к исследованию двухслойной сети с неоднородным распределением силы межслойной связи.

Исследования двухслойной сети колец нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо с неоднородным распределением силы межслойной связи показали, что динамика слоев качественно совпадает с той, которая наблюдалась в отсутствие неоднородности. Однако, увеличение ширины неоднородного распределения приводит к сдвигу границы синхронизации и существования уединенных выбросов по средней силе связи в область больших значений, то есть требуется большая сила связи, чтобы синхронизировать слои.

## Список используемых источников

1. Г. Николис, И. Пригожин, Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979.
2. П.С. Ланда, Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1982.
3. Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.
4. V.S. Afraimovich, V.I. Nekorkin, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Scientific, 1995.
5. A.G. Balanov, N.B. Janson, D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer, 2009.
6. E. Scholl, S.H.L. Klapp, P. Hovel, Control of self-organizing nonlinear systems. Berlin: Springer, 2016.
7. S. Boccaletti, A.N. Pisarchik, C.I. del Genio, A. Amann, Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
8. C. Jones, Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system. Trans. of the American Math. Soc., 1984. Vol. 286. P. 431.
9. A.M. Pertsov, E.A. Ermakova, A.V. Panfilov, Rotating spiral waves in a modified FitzHugh-Nagumo model. Physica D, 1984. Vol. 14. P. 117.
10. K. Kaneko, Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices. Physica D, 1989. Vol. 37. P. 60.
11. В.В. Астахов, Б.П. Безручко, В.И. Пономаренко, Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах. Изв. вузов. Радиофизика, 1991. Т. 34. С. 35.
12. V.N. Belykh, I.V. Belykh, E. Mosekilde, Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. E, 2001. Vol. 63. P. 036216.

13. V.S. Anishchenko, A.A. Akopov, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, Mechanisms of chaos onset in an inhomogeneous medium under cluster synchronization destruction. *New J. of Physics*, 2006. Vol. 8. P. 84.
14. Y. Kuramoto, D. Battogtokh, Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. *Nonlin. Phen. in Complex Sys.*, 2002. Vol. 5. P. 380.
15. D.M. Abrams, S.H. Strogatz, Chimera States for Coupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2004. Vol. 93. P. 174102.
16. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys J* 1961;1(6):445–66.
17. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc IRE* 1962;50(10):2061–70.
18. Omelchenko I. et al. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states // *Physical review letters*. – 2013. – T. 110. – №. 22. – C. 224101.
19. Semenova N. et al. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // *Physical review letters*. – 2016. – T. 117. – №. 1. – C. 014102.
20. Omelchenko I. et al. Robustness of chimera states for coupled FitzHugh-Nagumo oscillators // *Physical Review E*. – 2015. – T. 91. – №. 2. – C. 022917.
21. Mikhaylenko M. et al. Weak multiplexing in neural networks: Switching between chimera and solitary states // *Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science*. – 2019. – T. 29. – №. 2. – C. 023122.
22. Rybalova E. et al. Solitary states and solitary state chimera in neural networks // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. – 2019. – T. 29. – №. 7. – C. 071106.
23. Rybalova E. V., Zakharova A., Strelkova G. I. Interplay between solitary states and chimeras in multiplex neural networks // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2021. – T. 148. – C. 111011.
24. Kandel, E.R. Principles of Neural Science / E.R. Kandel, J.H. Schwartz, T.M. Jessell // *Neurology*. – 2000. – V. 4, № 22. – P. 1414.