

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Исследование математических моделей распространения инфекционных
заболеваний**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 4032 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
Института физики
Семеничева Ильи Павловича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., доцент

А.В. Шабунин

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент

Г.И. Стрелкова

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. SIRS МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ	3
1.1 SIRS модель, история создания.....	4
1.2 Клеточные автоматы и агентно-ориентированные модели	5
Глава 2. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ.....	7
2.1 Математическая модель распространения COVID-19.....	8
Заключение	10
Список использованной литературы.....	11

Введение

Актуальность темы исследования. Научно-техническая задача, поставленная в данной работе, заключается в получении оценок параметров модели эпидемии. Существуют различные модели, описывающие распространение инфекции, и используются различные методы для поиска оптимальных параметров. Основным математическим аппаратом в области эпидемиологии являются SIR-подобные модели, каждая из которых добавляет новые факторы или изменяет точность оценок модели. Для расчета параметров модели с использованием реальных статистических данных обычно используется метод наименьших квадратов дисперсии между реальными данными и данными модели. Это классические методы прогнозирования и оценки эпидемических ситуаций.

Глава 1. SIRS МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ

1.1 SIRS модель, история создания

SIR – широко применяемая на сегодняшний день модель, разработанная британскими учеными Андерсоном Маккендриком и Ульямом Кермаком.

SIR, что означает Susceptible – Infected – Recovered, «Восприимчивые — Зараженные — Выздоровевшие».

SIR-модель популярна из-за своей простоты построения.

Система уравнения SIR.

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (3)$$

Где:

- 1) $S(t)$ – число лиц, восприимчивых к заражению в момент t ;
- 2) $I(t)$ – число зараженных в момент времени t ;
- 3) $R(t)$ – количество выздоровевших в момент времени t ;
- 4) β – коэффициент интенсивности контактов лиц с последующим заражением;
- 5) γ – это коэффициент выздоровления зараженных лиц.

Уравнение (1) означает, что количество здоровых людей уменьшается со временем пропорционально количеству контактов зараженных.

Уравнение (2) показывает, что число инфицированных людей увеличивается пропорционально числу контактов здоровых и инфицированных, и уменьшается с восстановлением последних.

Уравнение (3) показывает, что число выздоровевших людей в единицу времени пропорционально числу инфицированных. Другими словами, через некоторое время состояние каждого пациента должно улучшиться.

1.2 Клеточные автоматы и агентно-ориентированные модели

Клеточные автоматы.

Т. С. Шеллинг в 1971 г. предложил теорию клеточных автоматов для моделирования локальных характеристик восприимчивых популяций и стохастических параметров, отражающих вероятностный характер передачи болезни. Клеточный автомат — это набор квадратных ячеек, объединенных в прямоугольную решетку, где каждая ячейка принимает состояние из конечного множества. Узлы решетки моделируют людей, и каждый человек имеет фиксированное положение в пространстве.

<i>S</i>							
<i>S</i>							
<i>S</i>	<i>S</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>
<i>S</i>	<i>S</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>S</i>
<i>S</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>S</i>
<i>S</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>S</i>
<i>S</i>	<i>S</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>
<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>

Рисунок 3 – Представление распространения инфекции клеточным автоматом

Агентно-ориентированные модели (АОМ).

После публикации статьи П. Патруллы в 2004 году была предложена АОМ, в которой расширены возможности клеточных автоматов отслеживания

распространения болезни и контактов между каждым человеком в социальной группе, расположенной в географической области. АОМ позволяют взаимодействовать между людьми и способны преодолевать ограничения различных подходов, обращаясь к естественной стохастической природе эпидемического процесса. АОМ представляют схему возможных контактов в виде динамического или статического графа, в котором вершины – объекты с набором индивидуальных свойств, сколь угодно детализировано описывающие состояние отдельных индивидов (упрощенная схема графа в АОМ приведена на рисунке 4).

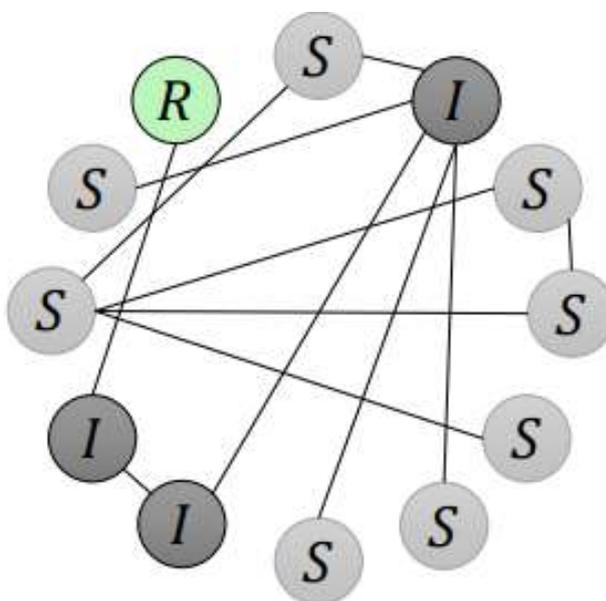
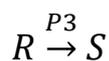
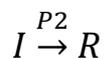
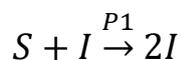


Рисунок 4 – Представление распространения инфекции сетевой моделью

Глава 2. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ



$$\begin{cases} \dot{S} = -P_1 SI + P_3 R \\ \dot{I} = P_1 SI - P_2 I \\ \dot{R} = P_2 I - P_3 R \end{cases}$$

$$\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(s + i + r) = 0$$

$s + i + r = \text{const} = C$ – плотность населения

$$\begin{cases} \dot{s} = -P_1 si + P_3(c - s - i) \\ \dot{i} = P_1 si - P_2 i \end{cases}$$

$$\frac{\dot{s}}{P_1} = -si + \frac{P_3}{P_1}(c - s - i)$$

$$\frac{\dot{i}}{P_1} = si - \frac{P_2}{P_1}i$$

$$\frac{P_3}{P_1} = \alpha$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \beta$$

$$\frac{1}{P_1} \frac{ds}{dt} = -si + \alpha(c - s - i)$$

$$\dot{s} = -si + \alpha(c - s - i)$$

$$\dot{i} = si - \beta i$$

2.1 Математическая модель распространения COVID-19

Рассмотрим первое и второе уравнения SIR-модели:

$$\begin{cases} -si + \alpha(c - s - i) = 0 \\ si - \beta i = 0 \end{cases}$$

$$si - \beta i = 0$$

$$i(s - \beta) = 0$$

А) $i=0$ s -любое

Б) $i \neq 0$ $s - \beta = 0 \rightarrow s = \beta$

$$-si + \alpha(c - s - i) = 0$$

А) $i=0$ s -любое

$$\alpha(c - s) = 0 \Rightarrow c = s$$

$$E_0 = (c; 0)$$

Б) $i \neq 0$ $s = \beta$

$$-\beta i + \alpha c - \alpha \beta - \alpha i = 0$$

$$-\beta i - \alpha i = -\alpha c + \alpha \beta$$

$$i = \frac{-\alpha c + \alpha \beta}{-\beta - \alpha} = \frac{\alpha}{\beta + \alpha} (c - \beta)$$

$$E_1 = (\beta; \frac{\alpha}{\alpha + \beta} (c - \beta))$$

Определение собственных значений матрицы линеаризации системы в состоянии равновесия

$$\dot{s} = -si + \alpha(c - s - i)$$

$$\dot{i} = si - \beta i$$

Матрица линеаризации из частных производных:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial i} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -i - \alpha & -s - \alpha \\ i & s - \beta \end{bmatrix}$$

В качестве аргументов подставляем координаты состояния равновесия: $E_0 = (c; 0)$

$$\begin{bmatrix} F_1(s; i) & F_2(s; i) \\ F_3(s; i) & F_4(s; i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha & -c - \alpha \\ 0 & c - \beta \end{bmatrix}$$

Расчет собственных значений:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial i} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha - \lambda & -c - \alpha \\ 0 & c - \beta - \lambda \end{bmatrix}$$

$$((-\alpha - \lambda) * (c - \beta - \lambda)) - 0 = 0$$

$$\lambda_1 = -\alpha < 0$$

$\alpha > 0 \Rightarrow E_0$ – устойчивое состояние равновесия

$$\lambda_2 = c - \beta < 0$$

$\beta > c \Rightarrow E_0$ – устойчивое состояние равновесия

$\beta < c \Rightarrow E_1$ – неустойчивое состояние равновесия

Заключение

Подводя итоги полученных результатов, представляется возможным сделать следующие выводы: цель и задачи, определенные в начале работы по проекту, выполнены.

Для этого были выполнены следующие этапы проектирования:

1. Рассмотрели модель распространения эпидемий SIRS и построили для нее систему ОДУ.
2. Провели теоретический анализ модели: определили состояния равновесия, их тип и устойчивость в зависимости от параметров.

Список использованной литературы

Учебники и учебные пособия

1. А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 2022/
2. В.В. Захаров, Ю.Е. Балыкина. Балансовая модель эпидемии COVID-19 на основе процентного прироста. Информатика и автоматизация. 20(5), 1034-1064. 2021.
3. Временные алгоритмы по ведению пациентов с инфекцией, вызванной SARS-CoV-2 в клиниках Военно-медицинской академии. Версия 3.0 (8.07.2020 г.). Санкт-Петербург 2020.С37.
4. Козлов Ю. А. Руководящие принципы (рекомендации) выполнения эндохирургических операций у детей в условиях пандемии COVID-19, вызванной коронавирусом SARS-COV-2 / Ю. А. Козлов, В. М. Капуллер // Эндоскопическая хирургия. – 2020. – № 2. – С. 34-38.
5. Кольцова Э.М., Гордеев Л.С. Методы синергетики в химии и химической технологии. М.: Химия, 2018. 256 с.
6. Кольцова Э.М., Третьяков Ю.Д., Гордеев Л.С., Вертегел А.А. Нелинейная динамика и термодинамика необратимых процессов в химии и химической технологии. М.: Химия, 2021.

Интернет-ресурсы

1. Covasim documentation:
<https://docs.idmod.org/projects/covasim/en/latest/index.html>
2. URL: <https://ncov.blog/countries/ru/77/>
3. URL: <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
4. URL:https://en.wikipedia.org/wiki/Template:2019%E2%80%932020_coronavirus_pandemic_data/Mainland_China_medical_cases