

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Обобщенная синхронизация в хаотических системах

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 4041 группы
направления 09.03.02 «Информационные системы и технологии»
Института Физики
Ефимова Романа Руслановича

Научный руководитель
доцент кафедры физики
открытых систем, к.ф. –м.н.

дата, подпись

А.О. Сельский

Заведующий кафедрой
физики открытых систем
д.ф. –м.н., профессор

дата, подпись

А.А. Короновский

Саратов 2023 год

Введение

Дифференциальные уравнения Рёсслера[1] представляют собой одну из классических хаотических систем, обладающих сложным и непредсказуемым поведением. В рамках преддипломной практики исследование аттракторов этих систем с использованием метода Эйлера является актуальным и важным заданием.

Цели:

1. Изучить основные принципы и свойства дифференциальных уравнений Рёсслера.
2. Применить численный метод Эйлера для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений Рёсслера.
3. Проанализировать полученные результаты и определить основные характеристики аттракторов хаотической системы.

Задачи:

1. Описать математическую модель системы дифференциальных уравнений Рёсслера и её основные параметры.
2. Реализовать численный метод Эйлера для решения системы дифференциальных уравнений Рёсслера с помощью языка программирования Python.
3. При помощи библиотек `numpy`, `matplotlib`, входящих в язык программирования Python провести следующие манипуляции:
 - Построить аттракторы Рёсслера
 - Сделать расчёт двух связанных аттракторов Рёсслера
 - Ввести разницу состояний.
 - При различных частотах найти значения параметра связи для детектирования обобщенной синхронизации по разнице состояний.

Актуальность темы:

Изучение хаотических систем и их аттракторов имеет важное практическое значение в различных областях науки и техники, включая физику, биологию, химию, информатику и системотехнику. Аттракторы хаотических систем могут быть использованы для моделирования и анализа сложных динамических процессов, таких как турбулентность, электромагнитные колебания и финансовые рынки. Исследование систем дифференциальных уравнений Рёсслера с применением метода Эйлера позволит получить практические навыки численного моделирования и анализа хаотической динамики, что является актуальным в контексте современной науки и инженерии.

1. Основное содержание работы

Работа включает исследование хаотических систем Рёсслера[1,2]. Для решения этих систем использовался метод Эйлера, всё выполнялось на персональном компьютере при помощи языка программирования Python и дополнительных библиотек, таких как: `numpy`, `matplotlib`, для точных вычислений и визуального наблюдения за поведением систем.

В ходе выполнения практики были проведены следующие манипуляции:

- 1) Расчёт двух связанных систем Рёсслера, введена разница состояний. Для этого были определены начальные значения и параметры каждой системы. Затем были решены дифференциальные уравнения с использованием метода Эйлера.
- 2) При различных частотах были найдены значения параметра связи, с помощью которых удалось детектировать обобщённую синхронизацию по разнице состояний. Для этого проводился анализ разности состояний двух связанных систем Рёсслера при различных значениях параметра связи. Исследование позволило определить оптимальные значения параметра связи для обнаружения обобщённой синхронизации.

1.1 Расчёт двух связанных систем Рёсслера

Расчёт двух связанных систем Рёсслера является первым этапом для достижения поставленных целей.

С помощью языка программирования Python и библиотек `numpy` и `matplotlib` была написана программа, с помощью которой можно проанализировать поведение систем.

Были введены две системы с параметрами: $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 4.7$ и начальными условиями для ведущей системы $x_1 = 0.1$, $y_1 = 0.1$, $z_1 = 0.01$, и для

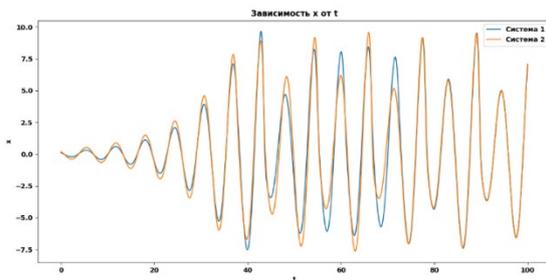
ведомой $x_2 = 0.2$, $y_2 = 0.2$, $z_2 = 0.02$. Связь была введена в уравнение для переменной x второй системы. Получились следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + a * y \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1.1)$$

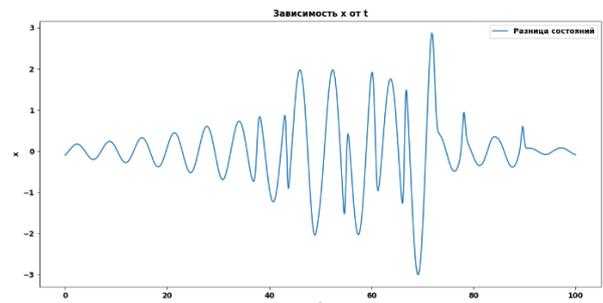
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z + E(x_1 - x_2) \\ \frac{dy}{dt} = x + a * y \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1.2)$$

где (1.1) - система уравнений ведущей системы, (1.2) – система уравнений ведомой системы, в которой E – параметр связи, x_2 – значение x ведомой системы в определенный момент времени, x_1 – значение x ведущей системы в определенный момент.

Проведя эксперимент, запустив программу при разных значениях параметра связи E , получились следующие результаты:

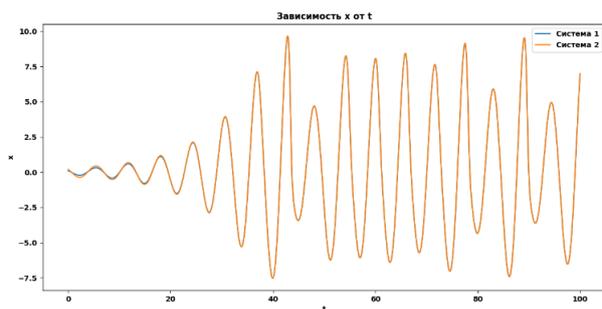


а)

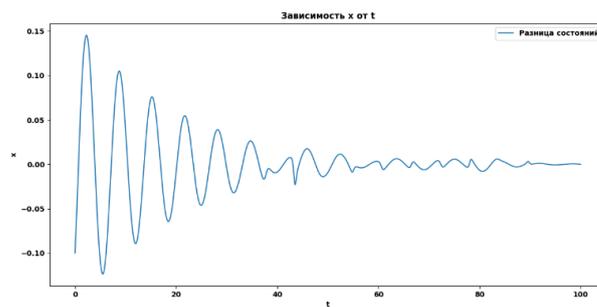


б)

Рисунок 1 – (а) - график зависимости x от t , при $E = 0.1$, (б) – разница состояний $|x_1 - x_2|$, при $E = 0.1$



а)



б)

Рисунок 2 – (а) - график зависимости x от t , при $E = 0.3$, (б) – разница состояний $|x_1 - x_2|$, при $E = 0.3$

При увеличении значения параметра E от 0.1 до 0.3 можно заметить, что чем больше значение параметра связи, тем более идентичным становится поведение систем, после небольшого переходного процесса. Колебание разницы состояний в начале вызвано тем, что начальные условия у ведущей и ведомой систем отличаются.

1.2 Обобщённая синхронизация

В системе Рёсслера, которая представляет собой модель колебательной системы с тремя уравнениями, обобщенная синхронизация возникает, когда две или более систем Рёсслера начинают колебаться с одинаковой амплитудой и фазой, несмотря на то, что они находятся в разных точках пространства. В этом случае, системы могут работать независимо друг от друга и не иметь физических связей между собой, но они синхронизируются на основе нелинейных связей, возникающих в системе.

Дифференциальные системы Рёсслера являются примером хаотических систем, которые характеризуются непредсказуемым поведением и сложными аттракторами. В режиме обобщённой синхронизации [3] эти системы могут синхронизироваться как по времени, так и по пространственным переменным.

Одним из способов достижения обобщённой синхронизации – это использование обратных связей [4]. Обратные связи могут быть установлены путём измерения и передачи информации о состоянии одной системы другой системе. Это позволяет системам корректировать свои параметры и синхронизироваться с другой системой.

Для проведения дальнейших исследований нам необходимо добавить вспомогательную систему с такими же параметрами, что и у ведомой системы, введём для ведомой и вспомогательной систем частоту $w_2 = 0.95$, также введём частоту w_1 , значение которой будет меняться от 0.85 до 1.05 с шагом 0.025. Значения параметров систем при это равны: $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10$. Начальные условия ведущей системы: $x_0=0.1$, $y_0=0.1$, $z_0=0.01$; начальные условия ведомой системы: $x_0=0.05$, $y_0=0.05$, $z_0=0.005$; начальные условия вспомогательной системы: $x_0=0.15$, $y_0=0.15$, $z_0=0.015$. Чтобы точно удостовериться, что синхронный режим [5] наступил, установим интервал от 0 до 2500 точек с шагом 0.01 и будем считать, что если турбулентное поведение переходит в ламинарное до значения 500, то режим определяется, как синхронный.

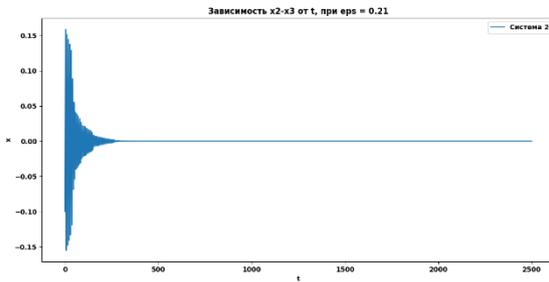
Теперь уравнения систем выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = w_1 * -y_1 - z_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = w_1 * x_1 + a * y_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \quad (1.3)$$

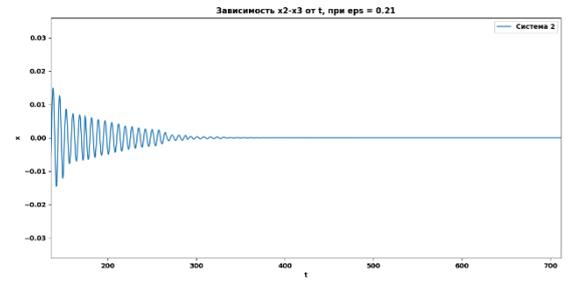
$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = w_2 * -y_2 - z_2 + E(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = w_2 * x_2 + a * y_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = b + z_2(x_2 - c) \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = w_2 * -y_3 - z_3 + E(x_1 - x_3) \\ \frac{dy_3}{dt} = w_2 * x_3 + a * y_3 \\ \frac{dz_3}{dt} = b + z_3(x_3 - c) \end{cases} \quad (1.5)$$

где (1.3) – уравнения ведущей системы, (1.4) – уравнения ведомой системы, (1.5) – уравнения вспомогательной системы.



а)



б)

Рисунок 3 – Разница состояний x_2 и x_3 , при $\epsilon_{ps} = 0.21$, $w_1 = 0.85$

Провели множество экспериментов и выявили, что значения из таблицы 1 являются значениями границы синхронизации.

Таблица 1 – Значения границы обобщённой синхронизации

W_1	0.85	0.875	0.9	0.925	0.95	0.975	1.0	1.025	1.05
E	0.19	0.19	0.18	0.23	0.24	0.17	0.17	0.19	0.20

Построили зависимость значений w_1 от ϵ_{ps} и получили следующие результаты:

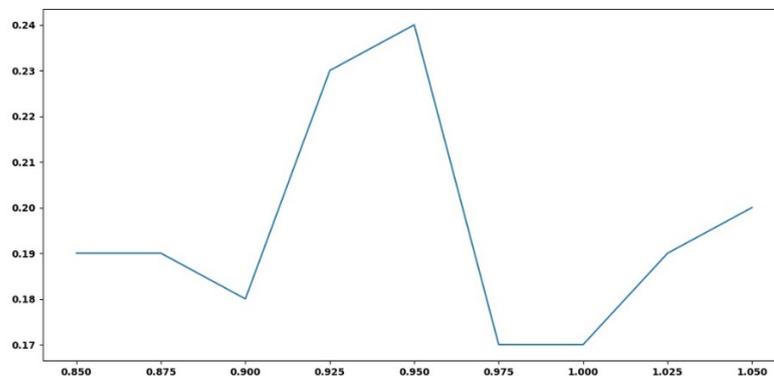


Рисунок 4 – Граница обобщённой синхронизации

На рисунке 4 можно выделить 3 области, первая область с частотой от 0.850 до 0.900, вторая область с частотой от 0.900 до 0.975 и третья область с частотой от 0.975 до 1.050. Смотри на рисунок, можно сказать, что во второй области для достижения режима обобщённой синхронизации требуется относительно большое значение параметра связи между осцилляторами, и первая и вторая области, где обобщённая синхронизация наступает при значительно меньших значениях параметра связи.

Существенное различие значений параметра связи E , соответствующих границе возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации во второй области, обуславливается возбуждением собственных хаотических колебаний в ведомой системе [6].

В результате исследования была определена граница обобщённой синхронизации. Это дало ценную информацию о поведении системы и её устойчивости к синхронизации. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации работы и системы, прогнозирования её поведения и принятия решений на основе этих знаний.

Данное исследование открывает новые перспективы для дальнейших исследований в области синхронизации систем. Определение границы обобщённой синхронизации позволяет лучше понять, как различные факторы влияют на согласованное поведение системы, и может быть использовано для улучшения управления и контроля над такими системами.

Заключение

В результате исследования была определена граница обобщённой синхронизации. Это дало ценную информацию о поведении системы и её устойчивости к синхронизации. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации работы и системы, прогнозирования её поведения и принятия решений на основе этих знаний.

Определение границы обобщённой синхронизации имеет практическое значение для широкого спектра приложений, включая связанные системы, сетевую синхронизацию [7] и управление хаосом [8,9]. Дальнейшие исследования могут включать более сложные модели, чем систем Рёсслера, а также применение других численных методов для получения более точных результатов.

Данное исследование открывает новые перспективы для дальнейших исследований в области синхронизации систем. Определение границы обобщённой синхронизации позволяет лучше понять, как различные факторы влияют на согласованное поведение системы, и может быть использовано для улучшения управления и контроля над такими системами.

Список используемой литературы

1. Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. (2001). Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press.
2. Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5), 397-398.
3. Москаленко О.И. Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима / О.И.Москаленко, А.А.Короновский, А.О.Сельский, Е.В.Евстифеев. :Письма в ЖТФ. - 2022. -48(2). -6с.
4. Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., & Zhou, C. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3), 93-153.
5. Пономаренко, В. И., & Шиманович, С. Д. (2005). Методы анализа и управления динамикой хаотических систем. М.: Физматлит.
6. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. // *EPL*. 2005. V. 72. N P. 901–907.
7. Maymounkov, P., & Mazieres, D. (2002). "Kademlia: A peer-to-peer information system based on the XOR metric." *International Workshop on Peer-to-Peer Systems* (pp. 53-65). Springer.
8. Guckenheimer, John, and Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
9. Pikovsky, Arkady, and Jürgen Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, 2001.