

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Моделирование хаотических динамических систем

АВТОРЕФЕРАТ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 4041 группы
направления 09.03.02 «Информационные системы и технологии»
института физики
Нилова Вячеслава Андреевича

Научный руководитель
доцент кафедры физики
открытых систем, к.ф.-м.н. А.О.Сельский
дата, подпись

Заведующий кафедрой
физики открытых систем,
д.ф.-м.н., профессор А.А.Короновский
дата, подпись

Саратов 2023 год

ВВЕДЕНИЕ

Объекты окружающего мира чаще всего являются динамическими, а не стационарными по времени [1]. Более того, куда чаще в реальном мире встречаются нелинейные, а не линейные системы [1]. Нелинейность может принимать разные виды, включая более сложные случаи динамического изменения параметров системы [2]. Пожалуй, самым важным следствием нелинейности динамических систем, является возможность наблюдать хаотическую динамику [3].

Хаотическая динамика отлична тем, что малые отклонения всегда приводят к существенному изменению поведения системы [3]. Стохастический хаос является абсолютно непредсказуемым и случайным по самой своей природе, однако, более интересным случаем представляется хаос детерминированный [4]. Детерминированные системы отличаются тем, что полностью предсказуемы во времени [5]. Если знать точное состояние системы в один момент времени, то можно рассчитать состояние этой системы и в любой другой момент времени [5]. Причем это справедливо в обоих направлениях по шкале времени [6].

Еще двести лет назад большинство исследователей полагали Вселенную системой абсолютно детерминированной. Лишь открытие и развитие квантовой теории внесло некоторые коррективы в такой взгляд. Однако, как показала практика, даже детерминированные системы могут демонстрировать хаотическое поведение [7]. Представим, что состояние системы известно не абсолютно точно, а с некоторой погрешностью. Это очень частая ситуация для реальных экспериментальных данных, ведь у всегда существует погрешность шкалы измерения прибора, даже если пренебречь другими возможными неточностями измерения. В этом случае вопрос о наличии хаоса сводится к следующему: будут ли погрешности измерения оказывать существенное влияние на результаты прогноза о состоянии системы спустя некоторое время [8].

Для простоты дальнейших объяснений необходимо ввести понятие фазового пространства. Фазовым пространством называется пространство, составленное из независимых переменных системы и имеющее связь с количеством его степеней свободы [9]. Как мы знаем из курса теоретической механики, для описания динамики любой системы на каждую степень свободы необходимо ввести две переменные – в классическом случае это координата и импульс [9]. Следовательно, фазовое пространство в таком случае будет состоять из координат и импульсов, соответствующих всем степеням свободы системы [10].

В фазовом пространстве начальное состояние системы всегда можно описать одной точкой. Тогда, мы можем взять две близкие точки в фазовом пространстве и

начать рассчитывать для них фазовые траектории [11]. При прямом расчете времени фазовые траектории будут двигаться по часовой стрелке, в противном случае против часовой стрелки [11]. Если спустя какое-то время расстояние между точками в фазовом пространстве, которые описывают новое состояние системы, будет увеличиваться, то можно говорить о хаотической динамике [12].

Исследование хаотических систем чрезвычайно важно, так как большинство реальных систем так или иначе способны ее демонстрировать. Часто это происходит в критические для системы моменты [12]. Когда сильно меняются внутренние или внешние параметры. Помимо этого, важным прикладным аспектом исследования хаотических систем является возможность наблюдения хаотической синхронизации [13, 14].

В настоящей работе рассматриваются аттракторы модельных нелинейных систем, способных демонстрировать хаотическое поведение – система Ресслера и система Лоренца – при различных значениях управляющих параметров. В основном рассматриваются значения параметров, для которых системы находятся в хаотическом режиме. В этом режиме изображающая точка в фазовом пространстве данных систем формирует странный хаотический аттрактор.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Поведение аттрактора сильно зависит от значений его параметров. При изменении параметра меняется динамика системы, в результате чего наблюдаются разные устойчивые точки или аттракторы в фазовом пространстве. Одним из распространенных способов анализа динамики системы наряду с построением фазового пространства являются бифуркационные диаграммы.

Проведем изменение параметра a , зафиксировав $b = 0.2$ и $r = 5.7$.

При $a = 0.3$ можно наблюдать хаотический аттрактор, что изображено на рисунке 1.

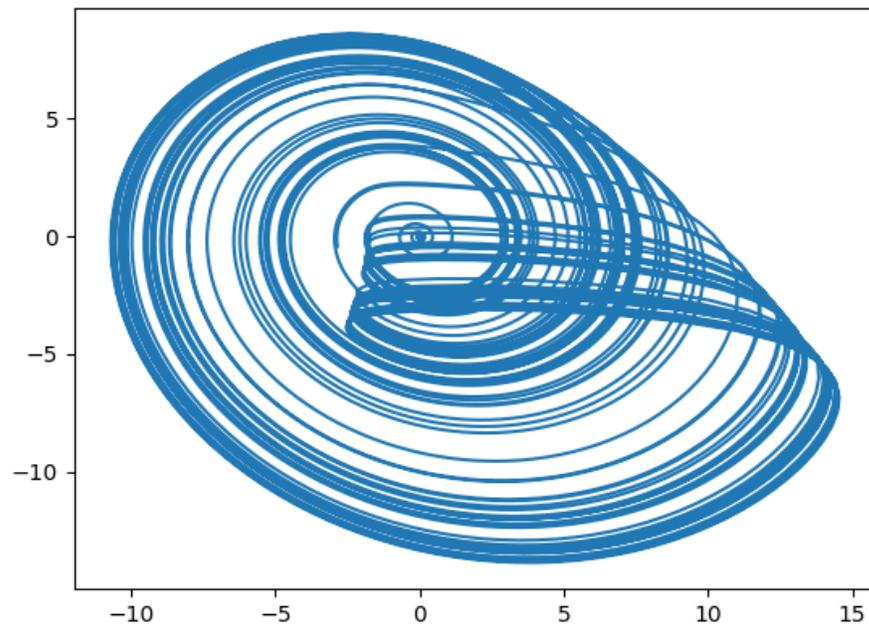


Рисунок 1 – Поведение аттрактора при $a = 0.3$.

При дальнейшем увеличении параметра a хаос проявляется все сильнее.

Теперь будем изменять параметр b , а остальные параметры будут равны $r = 5.7$, $a = 0.2$.

При $b = 0.3$ система неустойчива. Это представлено на рисунке 2.

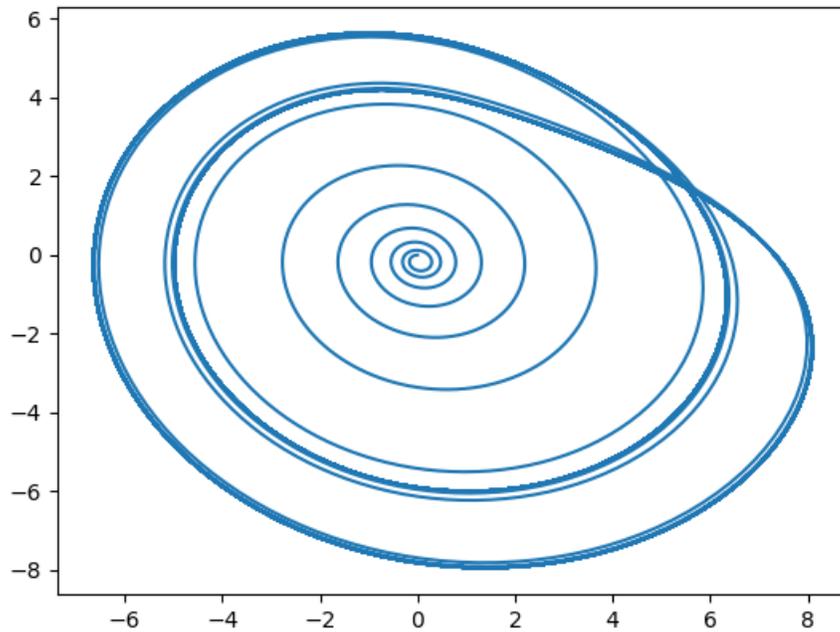


Рисунок 2 – Поведение системы при параметре $b = 0.3$.

При $b = 7$ система балансирует и переходит в устойчивое состояние (рисунок 3).

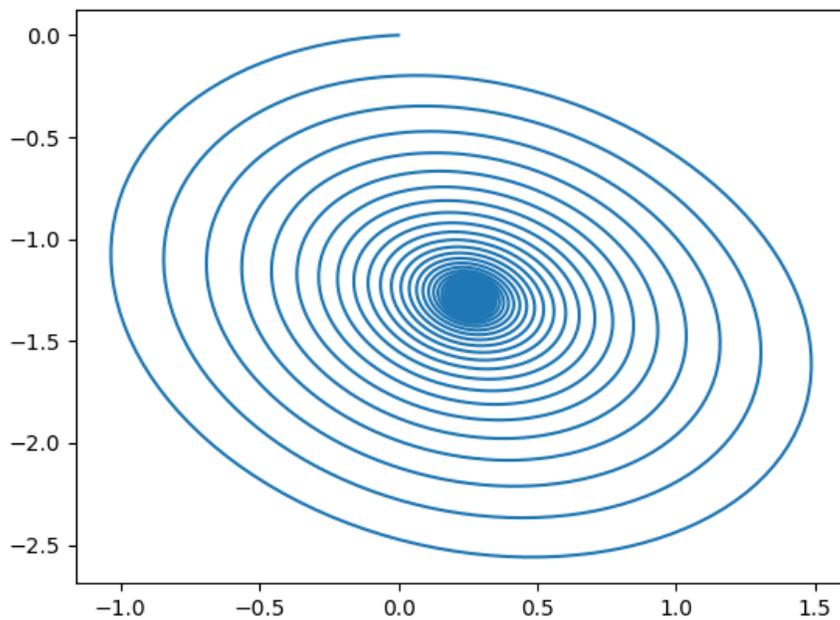


Рисунок 3 – Переход системы в стационарное состояние при $b = 7$.

Как видно из рисунков 2 и 3, при b стремящемся к нулю аттрактор неустойчив, но, когда b становится больше c , система уравнивается и переходит в стационарное состояние.

Проверим измерения системы при $a = b = 0.1$, изменяя c .

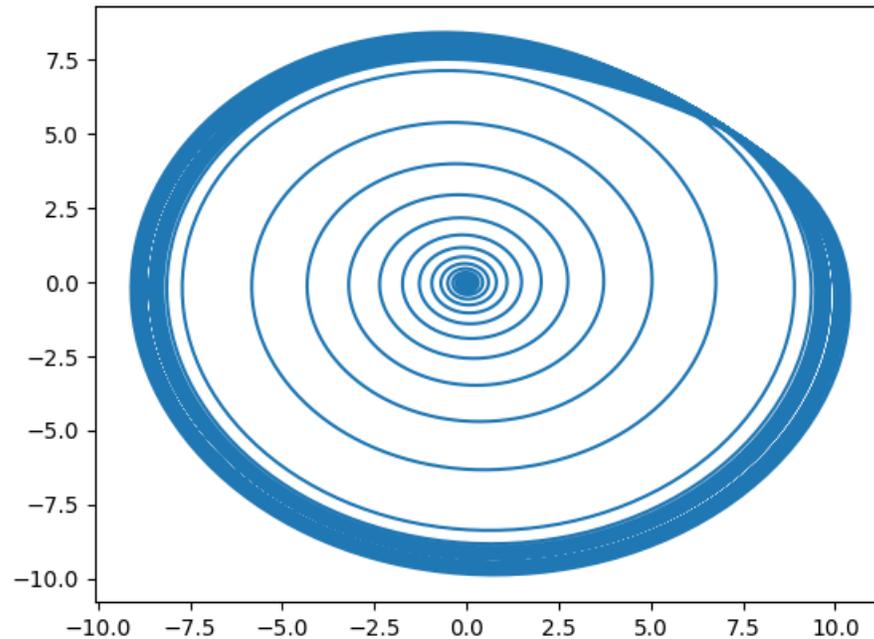


Рисунок 4 – Поведение системы при $c = 6$.

При изменении параметра c в указанном диапазоне динамика системы может резко изменяться, демонстрируя поочередно то периодическую, то хаотическую динамику.

Далее в работе было проведено моделирование аттрактора Лоренца - это странный аттрактор в нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений [8]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

Приведем вид фазовой траектории системы при параметрах, используемых Лоренцем:

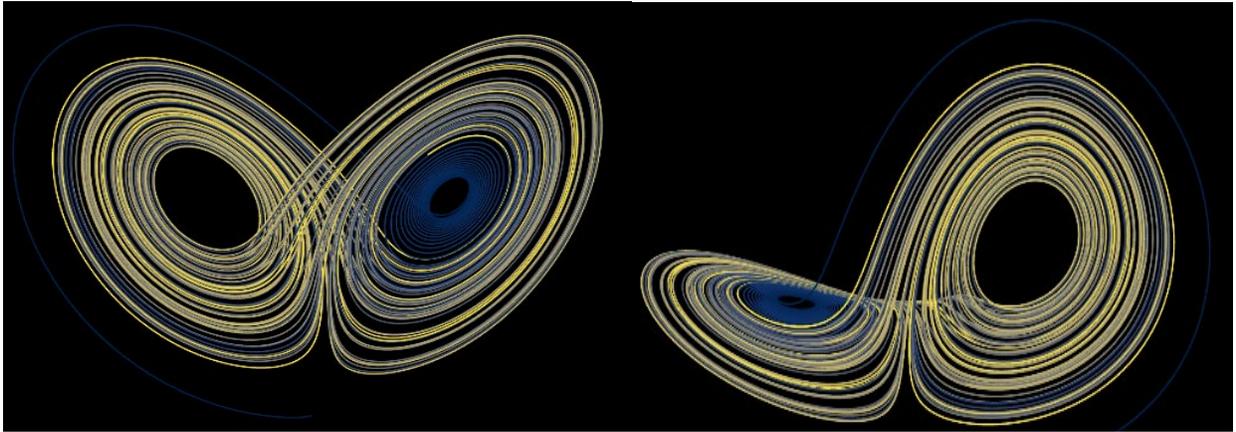


Рисунок 5 – аттрактор Лоренца при параметрах $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$.
 При $1 < r < 14$ траектории спирально приближаются к двум точкам.

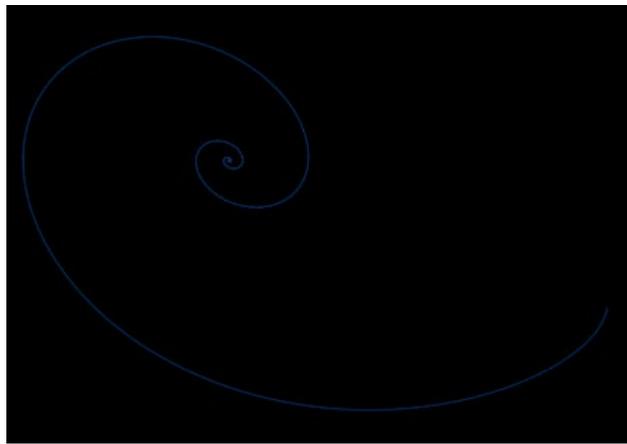


Рисунок 6 аттрактор Лоренца при параметре $r = 4$.

При $r = 16$ в зависимости от направления траектория приходит в одну из двух устойчивых точек.

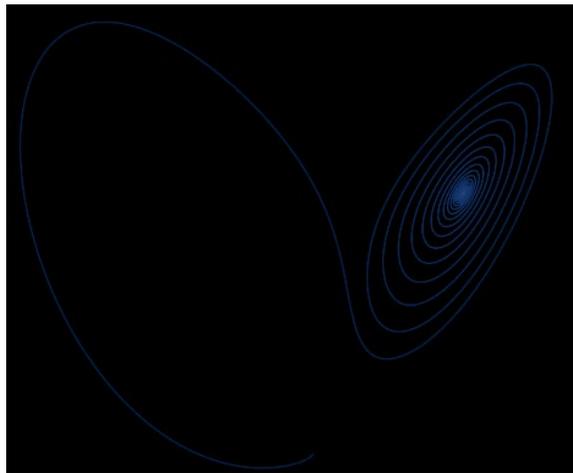


Рисунок 7 аттрактор Лоренца при параметре $r = 16$.

Увеличение управляющего параметра до значения $r = 100$ приводит к существенному изменению динамики системы. В этом случае система переходит в режим автоколебаний, однако, при немного меньших параметрах возможно наблюдать хаотический режим. Этот режим устанавливается через последовательность удвоений периода.

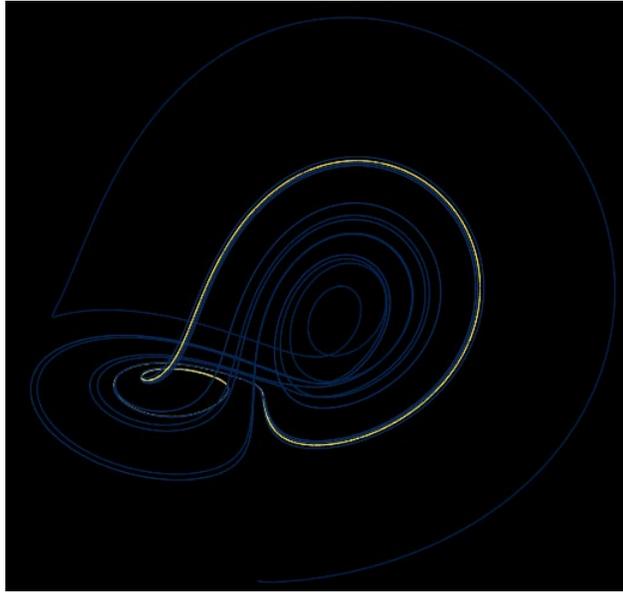


Рисунок 8 аттрактор Лоренца при параметре $r=100$.

Так же в данной работе было проведено моделирование системы с гиперхаосом В основе данной системы лежит модифицированная система Лоренца. [12]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a(y - x) + eyz \\ \frac{dy}{dt} = cx - dxz + y + u \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \\ \frac{du}{dt} = -ky \end{array} \right.$$

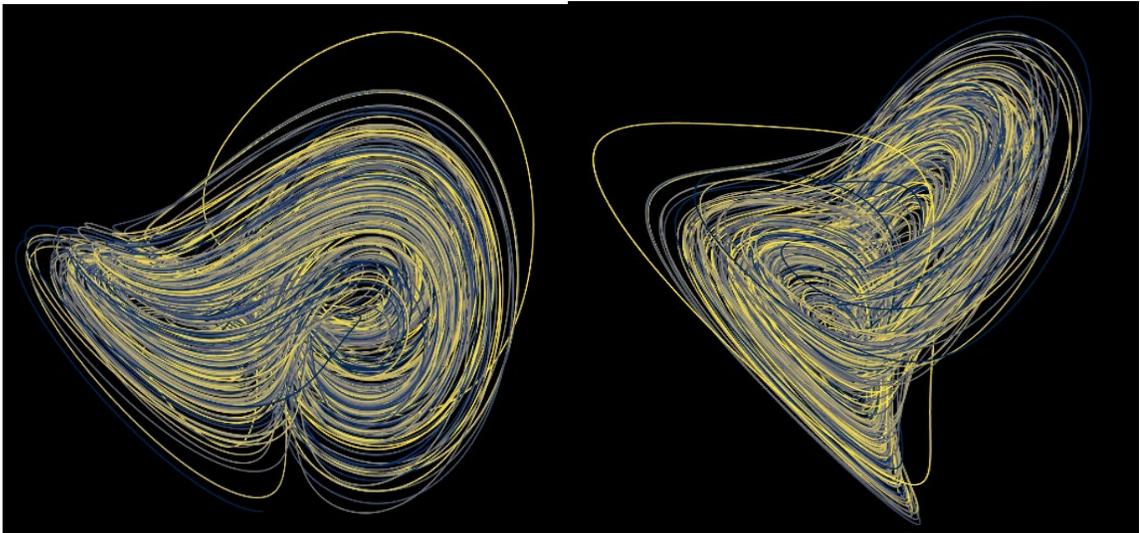


Рисунок 9 система с гиперхаосом при параметрах $a=35$, $b=4.9$, $c=25$, $d=5$,
 $e=35$, $k = 190$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проводилось численное моделирование нелинейных систем, способных демонстрировать хаотическую динамику. В качестве таких систем рассматривались одни из самых известных модельных хаотических систем: система Ресслера и система Лоренца. Для них были построены фазовые портреты при разных значениях управляющих параметров, отвечающие как периодической динамике, так и хаотической. Отдельно для системы Лоренца была рассмотрена модифицированная система из четырех дифференциальных уравнений первого порядка, демонстрирующая гиперхаотическое поведение.

По результатам было построено большое число рисунков фазовых пространств. По ним заметны характерные отличия формы аттрактора при различных динамических режимах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1]. Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. (2001). Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press
- [2]. Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5), 397-398.
- [3]. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — 2-е изд., перераб. и испр.. — М.: Наука, 1981. — 918 с.
- [4]. Лоскутов А.Ю. Математические основы динамических систем: Физический факультет МГУ, 2012, -78с.
- [5]. Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S., & Abarbanel, H. D. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 51(2), 980-994
- [6]. Короновский А.А. О границе обобщенной синхронизации в сложных динамических системах / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.О. Сельский, А.Е. Храмов. :Письма в ЖТФ. - 2015. -41(14). -8с.
- [7]. Москаленко О.И. Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима / О.И.Москаленко, А.А.Короновский, А.О.Сельский, Е.В.Евстифеев. :Письма в ЖТФ. - 2022. -48(2). -6с.
- [8]. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 71 (6). P. 067201.
- [9]. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. // *EPL*. 2005. V. 72. N 6. P. 901–907.
- [10]. Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., & Zhou, C. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3), 93-153.
- [11]. Rosenblum, M., & Pikovsky, A. (2004). Controlling synchronization in an ensemble of globally coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 92(11), 114102
- [12]. Pecora, Louis M., and Thomas L. Carroll. "Synchronization in chaotic systems." *Physical review letters* 64.8 (1990): 821-824.

[13]. Горская Н.Г., Кузнецов С.П., Пиковская О.А. Синхронизация хаотических систем. – М.: Физматлит, 2006.

[14]. Короновский А.А., Москаленко О.И, Сельский А.О, Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2015, Т.41, В. 15, С. 39-45.