

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Исследование особенностей синхронизации с запаздыванием  
в системах с различной топологией аттрактора**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 2241 группы

направления 09.03.02 Информационные системы и технологии  
института физики

Червяковой Анастасии Михайловны

Научный руководитель  
профессор кафедры ФОС, д.ф.-м.н.,  
доцент  
\_\_\_\_\_

подпись, дата

О.И.Москаленко

Зав. кафедрой физики открытых систем  
д.ф.-м.н., профессор  
\_\_\_\_\_

подпись, дата

А.А.Короновский

Саратов 2023

## Введение

В последнее время возрастает интерес к изучению синхронизации хаотических колебаний связанных динамических систем, которая представляет собой одно из наиболее интересных и важных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время<sup>1</sup>. Большое число исследователей, работающих в области радиофизики, электроники сверхвысоких частот, химии, биологии, нейрофизиологии на протяжении многих десятилетий заинтересованы в рассмотрении этого явления, что обусловлено не только большим фундаментальным значением его изучения, но и широким кругом практических приложений, где могут найти применение различные типы сложной динамики и хаотической синхронизации, например, в задачах построения систем связи на основе хаотической синхронизации<sup>2,3</sup>, при анализе взаимодействия биологических<sup>4</sup>, физиологических и химических систем<sup>5,6</sup>, в задачах управления хаосом при изучении процессов в электронных устройствах радио- и микроволнового диапазонов и т.д.<sup>7,8</sup>.

На данный момент выявлено несколько типов синхронного поведения однонаправленно и взаимно связанных динамических систем, каждый из которых обладает своими особенностями. Это, прежде всего, обобщенная синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация, фазовая синхронизация, синхронизация, индуцированная шумом и др. Среди

---

<sup>1</sup>Pikovsky.A., RosenblumM., KurthsJ. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. New York: Cambridge University Press (2001) 411 p.

<sup>2</sup>Gonzalez-Miranda J. M., Synchronization and Control of Chaos, World Scientific, (2004).

<sup>3</sup>Короновский А.А., Москаленко О. И., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Храмов А. Е., Синхронизация хаоса: фундаментальные подходы и практические приложения, Саратов: Издательство Саратовского университета, (2015).

<sup>4</sup>Glass L., Synchronization and rhythmic processes in physiology, Nature (London) 410 (2001) 277–284.

<sup>5</sup>Parmananda P., Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos, Phys. Rev. E 56 (1997) 1595–1598.

<sup>6</sup>Kiss I. Z., Hudson J. L., Escalona J., Parmananda P., Noise-aided synchronization of coupled chaotic electrochemical oscillators, Phys. Rev. E 70 (2) (2004) 026210.

<sup>7</sup>Трубецков Д. И., Храмов А. Е., О синхронизации хаотических автоколебаний в распределенной системе “винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна”, Радиотехника и электроника 48 (1) (2003) 116–124.

<sup>8</sup>Parmananda P., Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos, Phys. Rev. E 56 (1997) 1595–1598.

них особый интерес представляет режим синхронизации с запаздыванием<sup>9</sup>. Этот режим возникает, как правило, в идентичных однонаправленно или взаимно связанных хаотических системах со слегка различающимися значениями управляющих параметров и означает, что взаимодействующие системы демонстрируют близкие к идентичным, но сдвинутые на некоторый временной интервал  $\tau$  колебания, т.е.  $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{u}(t+\tau)$ .

Целью настоящей магистерской работы является подробное изучение особенностей синхронизации с запаздыванием и перехода к этому режиму в однонаправленно связанных системах. В качестве объектов исследования выбраны системы с различной топологией аттрактора – однонаправленно связанные системы Ресслера и Лоренца, а в качестве инструмента исследования – численное моделирование.

Магистерская работа содержит 36 страниц текста, включая 23 рисунка, список используемой литературы включает 20 наименований.

### Основное содержание работы

Работа состоит из введения, четырех глав и заключения.

В первой главе рассмотрены объекты и методы исследования.

Исследуемые системы являются сосредоточенными, они описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений, которые для систем Ресслера выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, & \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, & \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \\ \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), & \dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c), \end{aligned} \quad (1)$$

где параметр  $\varepsilon$  характеризует величину связи между осцилляторами,  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$  – управляющие параметры. Параметры  $\omega_{1,2}$  задают собственные частоты колебаний взаимодействующих систем, они выбраны слегка расстроенными, равными  $\omega_1 = 0.93$  и  $\omega_2 = 0.95$ , соответственно.

---

<sup>9</sup>Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators, Phys. Rev. Lett.78, 4193 (1997).

Система двух однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца удовлетворяет системе:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), & \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - y_2) + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, & \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\ \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, & \dot{z}_2 &= b z_2 + x_2 y_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Значения управляющих параметров для нее выбраны следующими:  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r_2 = 28$ ,  $r_1 = 26$ .

При выбранных значениях управляющих параметров взаимодействующие системы Ресслера характеризуются аттракторами ленточного типа, а системы Лоренца обладают относительно сложной (двулистной) структурой аттрактора.

Для реализации численного моделирования использована программа Lazarus, а для построения фазовых портретов – программа gnuplot, свободно распространяемая программа для создания двух- и трёхмерных графиков. Для расчета плотности распределения вероятности применялась пробная версия программы Origin, а для построения графиков и их аппроксимации – использована пробная версия программы Golden Software Grapher 10.

Численное моделирование систем Ресслера и Лоренца осуществлялось при помощи метода Рунге-Кутты 4 порядка.

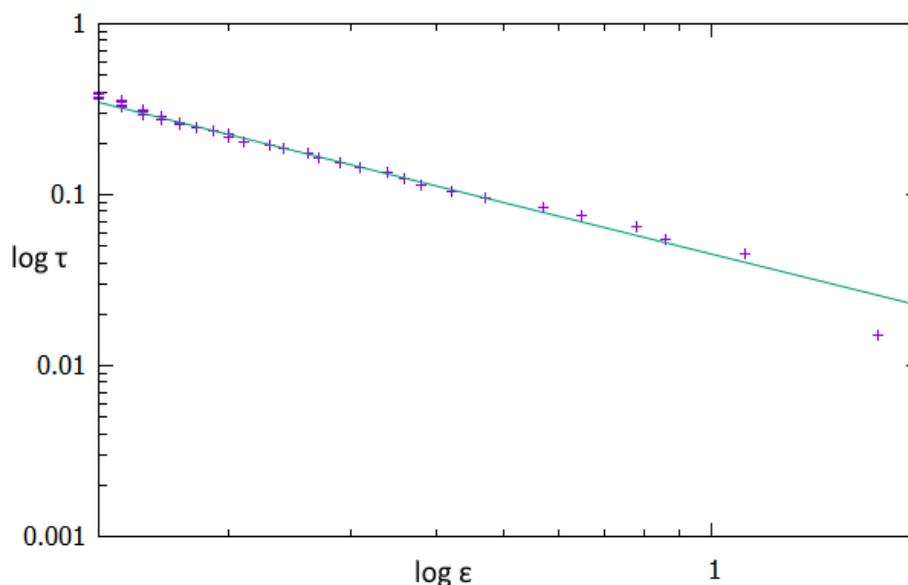
Во второй главе произведена диагностика синхронизации с запаздыванием в системах с различной топологией аттрактора. Для этого использованы метод расчета минимума функции подобия<sup>10</sup> и метод, основанный на усреднении разности между состояниями взаимодействующих систем, полученных при помощи построения сечения Пуанкаре<sup>11</sup>. Установлено, что оба метода для обеих систем приводят к одинаковым результатам, диагностируя возникновение синхронного режима при  $\varepsilon > 0.28$  для взаимодействующих систем Ресслера и при  $\varepsilon > 39$  для систем

---

<sup>10</sup>Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S. Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks, Phys. Rev. E 86, 036216 (2012).

<sup>11</sup>Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова А.Е. К вопросу о синхронном поведении связанных систем с дискретным временем, Письма в ЖЭТФ, 82 (3) 176-179 (2005).

Лоренца. Отдельно рассмотрен вопрос о зависимости времени запаздывания между взаимодействующими системами, находящимися в режиме синхронизации с запаздыванием, от параметра связи. Показано, что для обеих рассмотренных систем при увеличении параметра связи время запаздывания уменьшается, а режим синхронизации с запаздыванием стремится к полной синхронизации (см. рисунки 1-2).

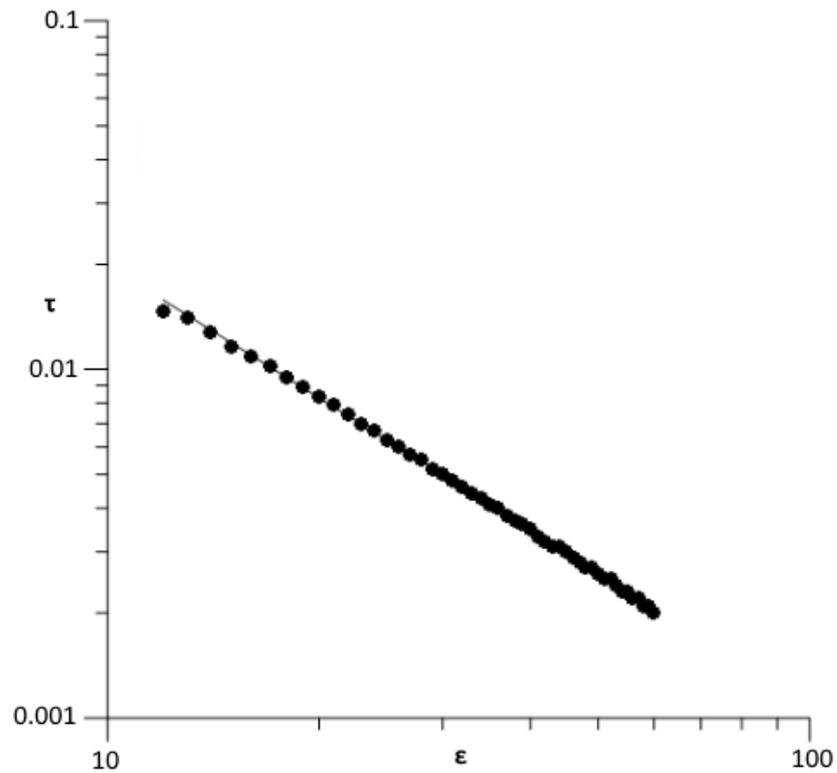


**Рисунок 1** – Зависимость временного сдвига между взаимодействующими однонаправленно связанными системами Ресслера от параметра связи и ее аппроксимация степенным законом  $\varepsilon = 0.045\tau^{-1}$

В случае систем Ресслера указанная зависимость хорошо аппроксимируется степенным законом  $\varepsilon = 0.045\tau^{-1}$ , что находится в хорошем соответствии с результатами работы<sup>12</sup>, где степенной закон с показателем «-1» был получен аналитически. Для систем Лоренца данная зависимость аппроксимируется степенным законом  $\varepsilon = 1.013\tau^{-1.26}$ , что близко к вышеназванной аналитической закономерности. Подобное небольшое отклонение может быть связано с тем, что вывод теоретического закона осуществлялся в

<sup>12</sup> Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем, Письма в ЖЭТФ, 80 (1), 25-28 (2004).

предположении взаимодействия двух систем, характеризующихся одной четко выраженной спектральной компонентой, что характерно для систем с относительно простой топологией аттрактора. Для систем со сложной топологией аттрактора данная теория может быть несправедливой, что требует ее адаптации на случай более сложных систем.

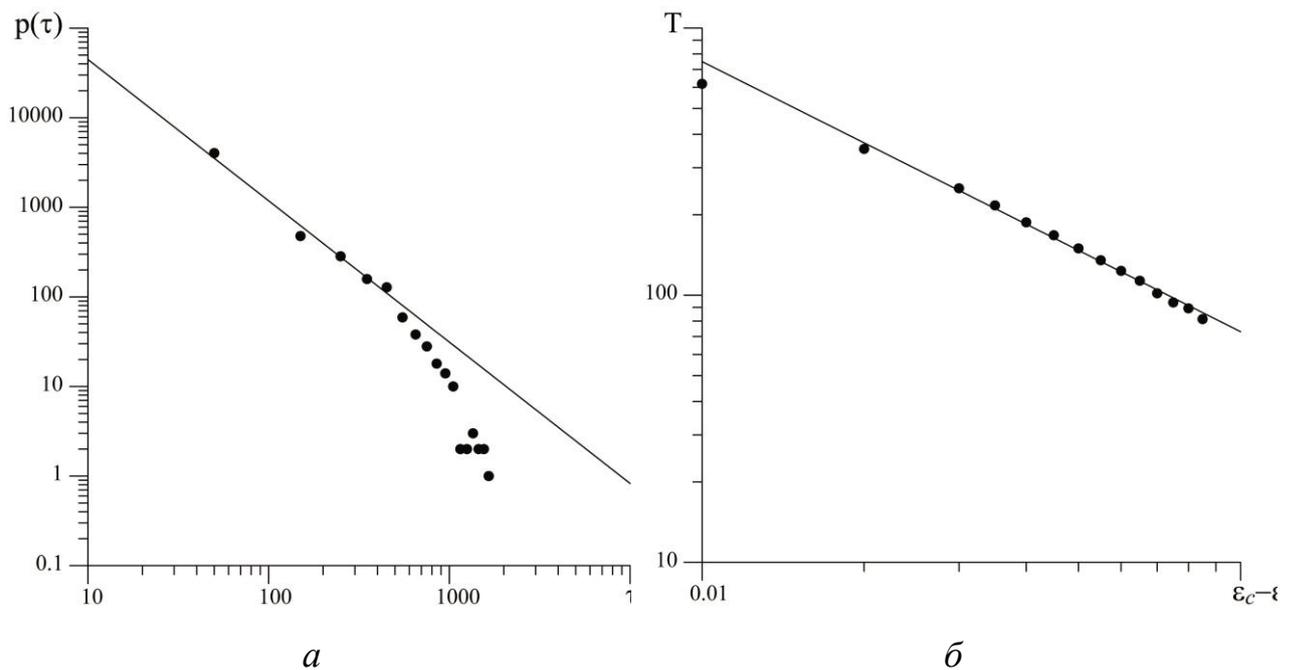


**Рисунок 2** – Зависимость временного сдвига между взаимодействующими однонаправленно связанными системами Лоренца от параметра связи и ее аппроксимация степенным законом  $\varepsilon = 1.013\tau^{-1.26}$

В третьей главе рассмотрена перемежаемость вблизи границы синхронизации с запаздыванием. Для определения длительностей характерных ламинарных (синхронных) фаз поведения систем использовался так называемый амплитудный метод, согласно которому для исследуемого сигнала  $s(t) = x_2(t + \tau) - x_1(t)$  задается некоторое пороговое значение  $\Delta$ , во много раз меньше амплитуды собственных колебаний системы, и определяются длительности характерных (ламинарных) фаз поведения

систем путем фиксации моментов входа и выхода за пределы диапазона  $|s(t)| < \Delta$ . При помощи этого метода получены распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи и зависимости средней длительности ламинарных фаз  $\tau$  от параметра надкритичности.

На рисунке 3а представлено распределение длительностей ламинарных фаз для систем Ресслера (1), находящихся вблизи границы синхронизации с запаздыванием, при значении параметра связи  $\varepsilon=0.2$  при  $\Delta=0.5$ . На рисунке 3б приведена зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра  $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ , где  $\varepsilon_c = 0.28$  для той же системы. Из рисунков видно, что полученные характеристики с хорошей степенью точности подчиняются степенным законам в четком соответствии с известными закономерностями при перемежаемости типа «on-off»<sup>13</sup>.

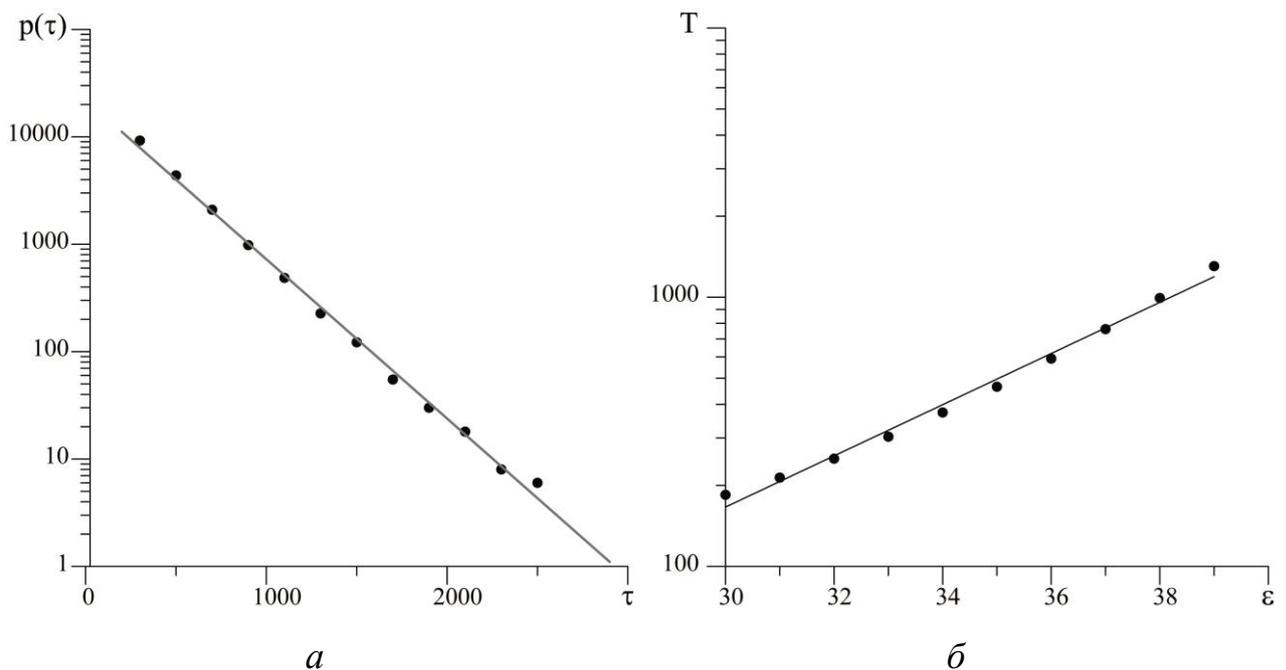


**Рисунок 3** – Распределение длительностей ламинарных фаз при значении параметра связи  $\varepsilon=0.2$  при  $\Delta=0.5$  (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности  $(\varepsilon_c - \varepsilon)$  (б), полученные для двух однонаправленно связанных систем Ресслера (1), находящихся в

<sup>13</sup> Boccaletti S., Valladares D. L. Characterization of intermittent lag synchronization // Phys. Rev. E, (2000), vol. 62, no. 5, pp. 7497–7500.

режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием, и их аппроксимации степенными законами  $p(\tau) \sim \tau^{-3/2}$  (а) и  $T \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1}$  (б)

В случае с системами Лоренца применение амплитудного метода дает иной результат. Также как и для систем Ресслера, на рисунке 4 приведены распределение длительностей ламинарных фаз при значении параметра связи  $\varepsilon=34$  при  $\Delta=1$  и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи  $\varepsilon$ , полученные для систем Лоренца (2), находящихся в режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием. Из рисунка видно, что полученные результаты для систем со сложной топологией аттрактора сильно отличается от систем с простой топологией.



**Рисунок 4** – Распределение длительностей ламинарных фаз при значении параметра связи  $\varepsilon=34$  при  $\Delta=1$  (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи  $\varepsilon$  (б), полученные для двух однонаправленно связанных систем Лоренца (2), находящихся в режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием, и их аппроксимации экспоненциальными законами  $p(\tau) = k \exp\left(-\frac{1}{T}\right)$ , где  $k = 22036.2$ ,  $T = 292.83$  (а) и  $T = K \exp(a\varepsilon)$ , где  $K = 0.233$ ,  $a = 0.219$  (б)

В частности, и распределение длительностей ламинарных фаз, и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности хорошо аппроксимируются экспоненциальными законами. Подобные закономерности наблюдались ранее во взаимодействующих системах со сложной топологией аттрактора, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации, а механизм появления данного типа поведения объяснялся перескоком изображающей точки на разные листы аттракторов взаимодействующих систем. Как показывают проведенные исследования, в режиме синхронизации с запаздыванием перескоки изображающих точек на разные листы аттрактора в обеих системах происходят одновременно, а появление асинхронных фаз не обусловлено вышеуказанными механизмами. В то же самое время, характер распределений длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности остается экспоненциальным, что можно объяснить спецификой систем со сложной топологией аттрактора.

В рамках четвертой главы магистерской работы исследован переход к режиму синхронизации с запаздыванием во взаимодействующих системах Ресслера и Лоренца с точки зрения мультистабильности. Для этого значения параметра связи выбраны чуть ниже границы синхронизации с запаздыванием ( $\varepsilon = 0.2$  для систем Ресслера и  $\varepsilon = 34$  для систем Лоренца), где имеет место перемежающееся поведение. Установлено, что в обоих случаях разности представляют собой последовательности случайно чередующихся регулярных фаз и нерегулярных всплесков, что характерно для режима перемежаемости. При этом, при различных значениях начальных условий ведомой системы сигналы выглядят абсолютно одинаково, что свидетельствует об отсутствии мультистабильности в режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием однонаправленно

связанных систем<sup>14</sup>. Действительно, как было установлено в работе<sup>15</sup>, мера мультистабильности в режиме обобщенной синхронизации оказывается равной нулю, а следовательно, она равна нулю и в режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием, а полученные численно при различных значениях начальных условий одной из взаимодействующих систем временные зависимости являются дополнительным подтверждением вышесказанного. Состояния взаимодействующих систем не зависят от выбора начальных условий в этих системах, а следовательно, мультистабильность в режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием отсутствует.

### **Заключение**

В данной магистерской работе подробно изучены особенности синхронизации с запаздыванием и перехода к этому режиму в однонаправленно связанных хаотических системах. Диагностирование синхронизации с запаздыванием проводилось с помощью расчета функции подобия и посредством метода, основанного на построении сечений Пуанкаре. В качестве объектов исследования выбраны системы с различной топологией аттрактора – однонаправленно связанные системы Ресслера и Лоренца. Установлено, что для обеих систем, по крайней мере, при выбранных значениях управляющих параметров, оба метода позволяют диагностировать наличие синхронного режима, причем пороговые значения параметра связи, соответствующие границам синхронизации с запаздыванием, оказываются одинаковыми для обоих методов. Различия возникают в показателе степенного закона, описывающего зависимость временного сдвига между состояниями взаимодействующих систем, находящихся в режиме синхронизации с запаздыванием, от параметра связи,

---

<sup>14</sup> Евстифеев Е.В., Москаленко О.И., Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации при помощи расчета локальных показателей Ляпунова. Изв. РАН. Сер.физическая. 86, 2 (2022) 272-276.

<sup>15</sup> Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Selskii A.O., Evstifeev E.V. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems. CHAOS. 31, 8 (2021) 083106.

что объяснено сложностью сигналов взаимодействующих систем с двулистной топологией аттрактора.

Изучены характеристики перемежаемости, имеющей место вблизи границы синхронизации с запаздыванием в однонаправленно связанных системах Ресслера и Лоренца. Для определения длительностей характерных фаз поведения систем, находящихся в режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием, использовался амплитудный метод, применяемый к сигналам, представляющим собой разности между сдвинутыми на время запаздывания состояниями взаимодействующих систем. Установлено, что во взаимодействующих системах Ресслера, характеризующихся относительно простой топологией аттрактора, на границе синхронизации с запаздыванием имеет место перемежаемость типа «on-off», для которой имеют место степенные распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Для систем со сложной топологией (однонаправленно связанных систем Лоренца) подобные закономерности не наблюдаются, а для распределений длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи имеют место экспоненциальные закономерности, характерные также для режима обобщенной синхронизации в таких системах.

Изучен вопрос о возможности существования мультистабильности в режиме перемежающейся синхронизации с запаздыванием. Показано, что мультистабильность в данном случае не наблюдается и дано теоретическое обоснование ее отсутствия в данном случае.

Результаты получены при помощи численного моделирования с использованием среды разработки Lazarus и визуализированы с помощью программы gnuplot. Для расчета и построения распределений вероятности использована пробная версия программы Origin, а для построения графиков и их аппроксимации – пробная версия программы Golden Software Grapher 10.