

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ
РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ИММУНИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ
ОБЛИГАЦИЙ**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 248 группы
направления 09.04.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета
Торба Александра Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент

Е. В. Гудошникова

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2023

Введение. Любой инвестор стремится не только получить достойную прибыль, но и защитить свои активы за счет снижения рисков, даже если такое снижение влечет за собой некоторую потерю дохода.

Иммунизация портфеля облигаций – это такой метод управления портфелем инвестиций, который применяется для нивелирования рисков колебаний процентной ставки путем приведения в соответствие дюрации портфеля необходимому временному интервалу инвестирования. Осуществляется это при помощи фиксирования ставки дохода на то время, в течении которого инвестор планирует держать облигации.

Как правило, процентные ставки и цены на облигации обратно пропорциональны: повышение процентных ставок влечет за собой падение цен на облигации, и наоборот. Эта проблема остается актуальной и по сей день. Ее решение состоит в том, чтобы иммунизировать портфель облигаций. Если инвестор «иммунизировал» свой портфель, то норма доходности будет стабильной на протяжении всего периода инвестирования, вне зависимости от изменения процентных ставок.

Основные характеристики портфеля облигаций были рассмотрены Ю.Ф. Касымовым, А.А. Мицелем, А.А. Сидоровым, О.В. Рябовым, А.Н. Бурениным, И.В. Акимовой и М.С. Зверевой. Стратегиям иммунизации посвятили свои работы А.В. Мельников, Ф.Дж. Фабоцци, А.А. Садамская, Н.В. Попова, А.С. Шведов, С.С. Подлужный, И. Я. Лукасевич, Ю.И. Бутаков, Н.М. Ребельский и Э.Х. Каров. Симплекс-метод и целочисленное программирование были рассмотрены О.В. Болотниковой. Моделирование с использованием *AMPL* было рассмотрено С.П. Сидоровым.

Цель магистерской работы - разработать программный код, реализующий поддержку принятия решений в задачах иммунизации портфеля облигаций.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие задачи:

- 1) Рассмотреть основные характеристики портфеля облигаций;
- 2) Рассмотреть активные и пассивные стратегии управления портфелем облигаций;
- 3) Рассмотреть симплекс-метод и целочисленное программирование;

- 4) Рассмотреть моделирование с использованием *AMPL*;
- 5) Разработать модель реализующую иммунизацию портфеля облигаций;
- 6) Протестировать программный код, реализующий поддержку принятия решений в задачах иммунизации портфеля облигаций.

Работа прошла апробацию на различных конференциях, в частности, в XI Международной молодежной научно-практической конференции «Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками», ноябрь 2022 года, на ежегодной студенческой конференции «Актуальные проблемы математики и механики», которую проводил механико-математический факультет СГУ в апреле 2023 года, в секции «Анализ данных».

Магистерская работа состоит из введения, восьми разделов («Основные характеристики портфеля облигаций», «Иммунизация портфеля без транзакционных расходов», «Иммунизация портфеля облигаций при наличии транзакционных расходов», «Простейшие активные и пассивные стратегии управления портфелем облигаций», «Симплекс-метод», «Целочисленное программирование», «Моделирование с использованием *AMPL*», «Практическая часть»), заключения и списка использованных источников.

Основная часть. Портфель облигаций это произвольный набор облигаций. Стоимость портфеля облигаций это общая рыночная стоимость облигаций портфеля. Текущий доход портфеля равен сумме текущих доходов облигаций портфеля.

Для вычисления доходности портфеля $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m)$ используют две характеристики:

- 1) средневзвешенная доходность портфеля r_{cp} ;
- 2) внутренняя ставка доходности r_P .

Средневзвешенная доходность портфеля равна усреднению доходностей по всем облигациям портфеля.

Внутренняя ставка доходности r_P – это процентная ставка, по которой приведенная стоимость потока платежей по портфелю R_1, R_2, \dots, R_n в моменты t_1, t_2, \dots, t_n равна его рыночной цене Ω в момент $t = 0$.

Для характеристики доходности облигаций принято использовать два

параметра: дюрацию облигации и показатель выпуклости портфеля.

$$D = \sum_{i=1}^n t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}, \quad (1)$$

$$C = \sum_{i=1}^n t_i(t_i + 1) \frac{C_i(0)}{P(r)}, \quad (2)$$

где $C_i(0)$ - текущая стоимость выплат, а $P(r)$ - рыночная цена облигации.

Аналогичные характеристики вводятся и для портфеля облигаций. Дюрацией D_P и показателем выпуклости C_P портфеля облигаций $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m)$ называется дюрация и показатель выпуклости облигации, эквивалентной портфелю.

Они вычисляются по следующим формулам:

$$D_P = \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^n t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}, \quad (3)$$

$$C_P = \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^n t_i(t_i + 1) \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}, \quad (4)$$

где r - значения годовых безрисковых процентных ставок в момент $t = 0$, которые одинаковы для всех сроков.

Инвестиционным горизонтом назовем срок T лет на который сформирован портфель облигаций.

$D_P = D_P(r)$ - дюрация портфеля облигаций в момент $t = 0$, и безрисковые процентные ставки r для всех сроков одинаковы. В момент времени, который равен дюрации портфеля, $t = D_P$, фактическая стоимость инвестиции в портфель должна быть не меньше планируемой:

$$\Omega(\tilde{r}, D_p) \geq \Omega(r, D_p) \quad (5)$$

для любых значений \tilde{r} .

Принцип формирования иммунизированного портфеля состоит в том, что для защиты стоимости портфеля от изменения рыночной процентной

ставки необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом. То есть, чтобы сформировать иммунизированный портфель с инвестиционным горизонтом T лет, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \omega_j D_j = T \\ \sum_{j=1}^m \omega_j = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Если нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией в ситуации отсутствия транзакционных расходов, то имеющийся портфель продается, а все вырученные средства инвестируются под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T .

Иначе имеющийся портфель продается, что снова потребует транзакционных расходов. Все вырученные средства размещаются на счет в банк под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T . Вследствие наличия транзакционных расходов полученная в результате сумма будет несколько меньше той, которая была бы в их отсутствие.

Стратегии управления портфелем облигаций разделяют на активные и пассивные. Активная стратегия предполагает изменение структуры портфеля в соответствии с изменениями условий на рынке. Рассмотренная ранее стратегия иммунизации относится к активным стратегиям.

К активной стратегии относится стратегия управления дюрацией портфеля в соответствии с прогнозом изменения рыночных процентных ставок. Если ожидается снижение процентных ставок, то дюрация портфеля увеличивается. И наоборот – если ожидается рост процентных ставок, то дюрация портфеля уменьшается. Изменение дюрации портфеля осуществляется с помощью обмена (свопа) облигаций из портфеля на новые. Выполняется так называемый упреждающий своп.

Пассивная стратегия управления портфелем облигаций предполагает, что структура портфеля, сформированного в начальный момент времени, остается неизменной в течение всего срока существования портфеля независимо от ситуации на рынке. Один из примеров пассивной стратегии управления портфелем – портфель с согласованными денежными потоками, или

предназначенный портфель. Облигации должны приобретаться таким образом, что финансовый поток, получаемый в каждый период, в точности равен оттоку средств за этот период. Рассмотрим формирование такого портфеля. Пусть инвестор через t_1, t_2, \dots, t_n лет от текущего момента времени $t = 0$ должен выплатить денежные суммы S_1, S_2, \dots, S_n соответственно. На рынке имеются m видов облигаций без кредитного риска, из которых можно сформировать портфель с потоком платежей в моменты t_1, t_2, \dots, t_n . Цены облигаций в момент покупки равны соответственно P_1, P_2, \dots, P_m . Сформируем портфель наименьшей стоимости, поток платежей от которого достаточен для выполнения обязательств инвестора. Предположим, на рынке можно купить любое количество облигаций, в том числе нецелое. Пусть x_j – количество облигаций j – го вида в портфеле, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда портфель формируется в соответствии с решением задачи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m C_i^j x_j \geq S_i, i = 1, 2, \dots, n \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (7)$$

$$f = \sum_{j=1}^m P_j x_j (\min)$$

Здесь C_i^j это платеж по облигации j – го вида в момент $t_i, i = 1, 2, \dots, n$. Решением задачи (45) является портфель, позволяющий выполнить обязательства инвестора и имеющий наименьшую стоимость. Для такого портфеля нет необходимости реинвестировать поступающие платежи. Кроме того, портфель не продается до погашения. Это означает, что отсутствуют реинвестиционный и процентный риски.

Недостатком этой стратегии является то, что согласование потока платежей и потока обязательств является трудным и дорогостоящим. Это можно объяснить тем, что на рынке существует только конечный набор чисто дисконтных облигаций и для формирования нужного потока платежей от портфеля инвестор вынужден приобретать купонные облигации. Вследствие этого в моменты t_1, t_2, \dots, t_n от портфеля могут поступать избыточные средства. Уменьшить стоимость портфеля позволяет использование следующей

разновидности стратегии предназначенного портфеля. Избыточная часть G_i поступающего платежа от портфеля в момент $t_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$, используется для выполнения обязательства инвестора в следующий момент t_{i+1} . Эта часть платежа реинвестируется на срок $(t_{i+1} - t_i)$ лет под действующую в момент t_i годовую безрисковую процентную ставку r_i . Тогда портфель формируется в соответствии с решением системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m C_1^j x_j \geq S_1 + G_1 \\ \sum_{j=1}^m C_2^j x_j + G_1(1 + r_1)^{t_2 - t_1} \geq S_2 + G_2 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^m C_{n-1}^j x_j + G_{n-2}(1 + r_{n-2})^{t_{n-1} - t_{n-2}} \geq S_{n-1} + G_{n-1} \\ \sum_{j=1}^m C_n^j x_j + G_{n-1}(1 + r_{n-1})^{t_n - t_{n-1}} \geq S_n \\ G_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n - 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m \end{array} \right. \quad (8)$$

$$f = \sum_{j=1}^m P_j x_j (\min)$$

Чтобы решить эту систему надо знать годовые безрисковые процентные ставки r_i для инвестиций в момент t_i на срок $(t_{i+1} - t_i)$ лет, $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Идея симплекс-метода состоит в следующем. Используя систему ограничений, приведенную к общему виду, т.е. к системе m уравнений с n переменными ($m < n$), находят ее любое базисное решение, по возможности наиболее простое. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то переходят к другому допустимому базисному решению. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении линейная форма, если не достигнет оптимума, то приблизится к нему (в случае перехода к вырожденному базисному решению значение линейной формы не изменится). С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не находят решение, которое является оптимальным.

Согласно методу Гомори задача линейного программирования сначала решается симплексным методом без учета целочисленности переменных. Если оптимальное решение оказывается целочисленным, то решение задачи заканчивается. Если оптимальное решение нецелочисленное, то из системы ограничений выбирается уравнение, для которого дробная часть координаты оптимального решения имеет наибольшее значение, и на его основе составляется дополнительное ограничение. Дополнительное ограничение отсекает от области допустимых решений нецелочисленное оптимальное решение, но при этом сохраняет целочисленные вершины этой области.

AMPL — язык программирования высокого уровня, созданный в *Bell Laboratories* с целью описания и решения сложных задач оптимизации и теории расписаний. *AMPL* не решает задачи непосредственно, а вызывает соответствующие внешние вычислители (типа *CPLEX*, *MINOS*, *IPOPT*, *SNOPT* и т. д.) для получения решения. *AMPL* работает с линейными и нелинейными задачами оптимизации, с дискретными и непрерывными переменными. Одно из преимуществ *AMPL* — подобие его синтаксиса математической записи задач оптимизации, что позволяет дать очень краткое и легко читаемое определение задач математического программирования.

Была разработана модель работающая с приложением *AMPL* и программа на языке *Python* с помощью библиотеки *amplpy*.

Заключение. 1. В ходе анализа научной литературы рассмотрены: основные характеристики портфеля облигаций и стратегии иммунизации.

Дюрацию портфеля облигаций D_P можно рассматривать как меру процентного риска портфеля, а выпуклость C_P рассматривать как показатель того насколько дюрация точно оценивает этот риск.

Принцип формирования иммунизированного портфеля состоит в том, что для защиты стоимости портфеля от изменения рыночной процентной ставки необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом. То есть, чтобы сформировать иммунизированный портфель

с инвестиционным горизонтом T лет, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \omega_j D_j = T \\ \sum_{j=1}^m \omega_j = 1 \end{cases}$$

Если нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией в ситуации отсутствия транзакционных расходов, то имеющийся портфель продается, а все вырученные средства инвестируются под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T .

Иначе имеющийся портфель продается, что снова потребует транзакционных расходов. Все вырученные средства размещаются на счет в банк под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T . Вследствие наличия транзакционных расходов полученная в результате сумма будет несколько меньше той, которая была бы в их отсутствие.

Стратегия управления дюрацией портфеля в соответствии с прогнозом изменения рыночных процентных ставок состоит в том, что если ожидается снижение процентных ставок, то дюрация портфеля увеличивается. И наоборот – если ожидается рост процентных ставок, то дюрация портфеля уменьшается. Изменение дюрации портфеля осуществляется с помощью обмена (свопа) облигаций из портфеля на новые. Выполняется так называемый упреждающий своп.

Стратегия предназначенный портфель состоит в том, что облигации должны приобретаться таким образом, что финансовый поток, получаемый в каждый период, в точности равен оттоку средств за этот период.

2. Был изучен алгоритм решения задач линейного программирования симплекс-методом: алгоритм симплекс-метода, целочисленное программирование, моделирование с использованием *AMPL*.

AMPL — язык программирования высокого уровня, созданный в *Bell Laboratories* с целью описания и решения сложных задач оптимизации и теории расписаний. *AMPL* не решает задачи непосредственно, а вызывает соответствующие внешние вычислители (типа *CPLEX*, *MINOS*, *IPOPT*, *SNOPT* и т. д.) для получения решения. *AMPL* работает с линейными и

нелинейными задачами оптимизации, с дискретными и непрерывными переменными. Одно из преимуществ *AMPL* — подобие его синтаксиса математической записи задач оптимизации, что позволяет дать очень краткое и легко читаемое определение задач математического программирования.

3. Была разработана и протестирована модель на языках *AMPL* и *Python*, реализующая стратегию иммунизации - портфель с согласованными денежными потоками.

Результаты работы имеют практическую ценность для инвесторов, покупающих облигации. Модель поможет им уменьшить денежные потери от изменения процентных ставок.