

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

**ФОРМИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ РИСКОВЫХ
БУМАГ ПО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 247 группы

направления - **09.04.03 Прикладная информатика**

механико-математического факультета

Лебедевой Дарьи Сергеевны

Научный руководитель
Зав.кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

С.И. Дудов

Заведующий кафедрой:
Зав.кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

С.И. Дудов

Саратов 2023

Введение. Проблема риска — одна из ключевых в экономической деятельности человека. Фактор риска напрямую отражается на конечном финансовом результате принятого решения. Один из важных видов риска — инвестиционный. Инвестиции в ценные бумаги в условиях неопределенности сопряжены с риском того, что фактическая доходность вложений может отличаться от ожидаемой доходности. Данное обстоятельство дает основание считать доходность ценной бумаги случайной величиной и выбор инвестиционной стратегии осуществлять на основе анализа ее числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, ковариации с доходностью других ценных бумаг. При таком подходе математическое ожидание доходности актива соответствует ожидаемой доходности, а дисперсия или среднеквадратичное отклонение доходности могут использоваться в качестве меры риска вложений в актив.

Работа посвящена соответствующей оптимизации структуры портфеля ценных бумаг.

Целью работы является составление оптимального портфеля ценных рисков бумаг по заданной функции полезности, а так же применение разных стратегий по отношению к периоду владения портфелем и сравнение подходов. Для этого будут решены следующие задачи:

1. Изучение основ портфельного инвестирования;
2. Решение задачи Марковица аналитическим методом;
3. Решение задачи оптимизации структуры портфеля по заданной функции полезности аналитическим способом;
4. Проведение вычислительных экспериментов на модельных данных;
5. Формирование оптимального портфеля ценных бумаг по заданной функции полезности на основании реальных данных.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных источников и приложения.

Во введении обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В первой главе приводятся основные понятия портфельного инвестирования, его принципы и проблемы портфельного инвестирования.

Во втором главе вводятся формулы доходности и риска портфеля, рассматривается задача Марковица и приводится её аналитическое решение, а также формулируются свойства эффективных портфелей.

В третьей главе описывается задача оптимизации структуры портфеля по заданной функции полезности и приводится два способа аналитического решения данной задачи.

В четвертой главе иллюстрируется теоретический материал, связанный с решением задачи оптимизации функции полезности на модельных примерах.

В пятой главе проводятся вычислительные эксперименты на реальных данных и анализируются результаты.

Основное содержание работы. Портфель инвестиций - это совокупность всех инвестиций физического или юридического лица, рассматриваемая как единое целое. Портфель ценных бумаг - это определенным образом подобранная совокупность видов ценных бумаг для достижения поставленной цели. Соотношение конкретных видов ценных бумаг в портфеле определяет структуру портфеля. Цель портфеля состоит в том, чтобы создать оптимальный баланс риска и доходности ценных бумаг.

Словесная постановка задачи: инвестору требуется выбрать структуру портфеля так, чтобы обеспечить заданное значение ожидаемой доходности m_p , и при этом риск портфеля был бы минимальным. Следовательно, задача сводится к поиску структуры портфеля $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, которая обеспечила бы достижение заданной ожидаемой доходности портфеля m_p с минимальной риском. Математическая формулировка задачи имеет вид

$$D_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij} \rightarrow \min_x, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = m_p. \quad (2)$$

Если примем обозначение $I = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$, то задачу (2.6) - (2) можно переписать в матричной форме:

$$D_p = x^T V x \rightarrow \min_x, \quad (3)$$

$$I^T x = 1, \quad m^T x = m_p. \quad (4)$$

где параметр t является параметром отношения к риску.

Соотношения (3) - (4) представляют собой формализованное описание задачи отыскания оптимального, в смысле подхода «доходность - риск», портфеля рискованных ценных бумаг, которая известна как задача Марковица.

Оптимальная структура портфеля x^* :

$$x^* = b + cm_p, \quad (5)$$

где b и c - векторы размерности n :

$$b = \frac{1}{d}(a_{22}V^{-1}I - a_{12}V^{-1}m), \quad c = \frac{1}{d}(a_{11}V^{-1}m - a_{12}V^{-1}I).$$

Ему соответствует минимальная дисперсия доходности портфеля, определяемая по формуле:

$$\sigma_p^2 = \alpha m_p^2 + \beta m_p + \gamma. \quad (6)$$

Задача оптимизации структуры портфеля по заданной функции полезности состоит в том, чтобы максимизировать разность между ожидаемой доходностью портфеля с положительным коэффициентом t и дисперсией. Математическая формализация заключается в формулах (7), (8).

$$u(x) = t \sum_{i=1}^n m_i x_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij} \rightarrow \max_x, \quad (7)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \quad (8)$$

где t отражает отношение инвестора к риску, то есть чем больше значение параметра t , тем меньше инвестор обращает внимания на риск.

Получаем, что доходность равна :

$$m_p^* = \frac{t - \beta}{2\alpha} = \frac{td + 4a_{12}}{2a_{11}}. \quad (9)$$

Соответствующее значение риска:

$$\sigma^2 = \frac{1}{d} \left(\frac{t^2 d^2}{4a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{11}} t d + a_{22} \right). \quad (10)$$

Тогда x^* :

$$x^* = \frac{1}{d} V^{-1} \left(\frac{I}{2} (a_{22}(2 - a_{11}t) + \frac{a_{12}^2}{a_{11}} (a_{12}t - 2)) + \frac{mtd}{2} \right). \quad (11)$$

Перейдем к проведению вычислительных экспериментов на реальных данных.

Было решено сформировать портфели, состоящие из акций компаний «Сбербанк», «Газпром», «ГМК Норникель», с разными периодами владения, а именно:

1. Сформировать портфель на период с января 2018 года по декабрь 2021 года на основе данных акций за 2014 - 2017 года;

2. Сформировать два портфеля с разными периодами: первый - с января 2018 года по декабрь 2019 года, а второй - с января 2019 года по декабрь включительно 2021 года;

3. Сформировать четыре портфеля, действующие на протяжении каждого года из выбранного периода, то есть портфель на 2018 год, на 2019 год, 2020 год и на 2021.

Целью экспериментов является сравнение различных стратегий инвестора.

Для того, чтобы рассчитать доли каждой акции в портфеле на 4 года, были взяты данные за 2014 - 2017 года с месячным таймфреймом, из этих данных подсчитывался вектор средней доходности каждой акции.

Далее в программном коде с помощью функции `numpy.cov()`, для каждого временного промежутка подсчитывалась матрица ковариации.

Вычислительные эксперименты проводились с помощью программной разработки, выполненной на языке программирования Python. В первом эксперименте строим портфель на 2018 - 2021 года.

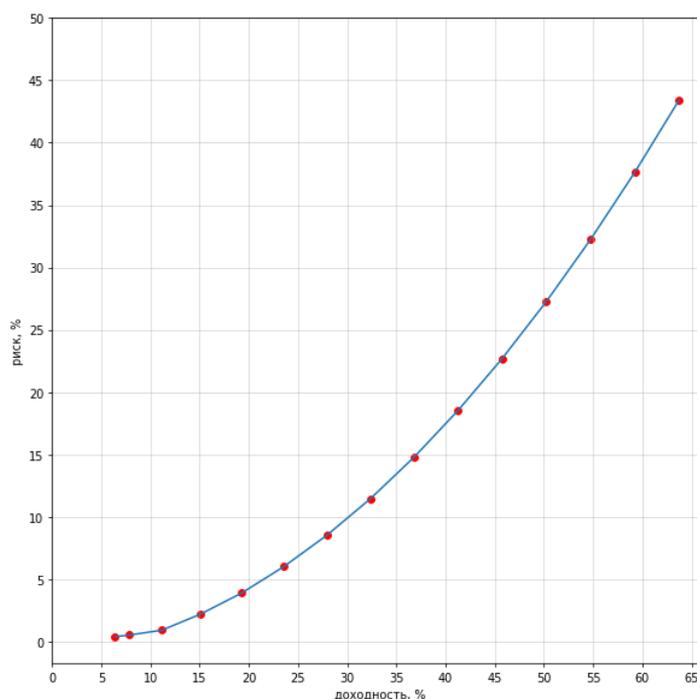


Рисунок 1 - Фронт Марковица с расположением на нём оптимальных портфелей с периодом владения с 2018 по 2021 год

На графике все отмеченные точки являются прогнозируемыми значениями доходности и риска для портфеля с периодом обладания с января 2018 по декабрь 2021 года включительно.

Так как, этот временной промежуток уже прошёл, можно сравнить спрогнозированные значения доходности со значениями, которые бы получились на самом деле при таком же значении параметра t и таком же распределении долей каждой акции в портфеле. Обозначим за m_p^* реальные значения доходности за 2018 - 2021 года.

Таблица 1 - Сравнение прогнозируемых значений доходности для портфеля на 4 года с реальными значениями при различных $t \in [0; 7]$

t	m_p	m_p^*
0	6.416	4.019
0.5	7.87	6.946
1.0	11.155	12.077
1.5	15.082	17.551

2.0	19.282	23.133
2.5	23.546	28.759
3.0	27.931	34.408
3.5	32.356	40.07
4.0	36.807	45.74
4.5	41.275	51.416
5.0	45.755	57.096
5.5	50.244	62.779
6.0	54.74	68.463
6.5	59.241	74.15
7.0	63.747	75.481

Из приведённых результатов можно заметить, что прогнозируемое значение доходности почти во всех случаях было чуть выше, чем реальное, но при этом зачастую было очень близко к нему.

Перейдем к портфелям с периодом обладания два года и построим первый из них: с периодом владения с января 2018 по декабрь 2019 года включительно на основе вектора средней доходности и матрицы ковариации, сформированных на основании данных по ценам каждой акции за 2016 - 2017 года.

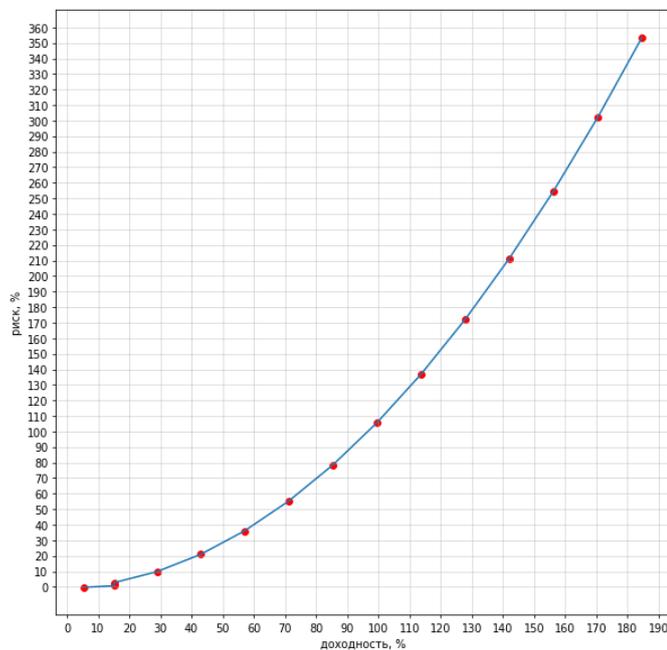


Рисунок 2 - Фронт Марковица с расположением на нём оптимальных портфелей с периодом владения с 2018 по 2019 год

Перейдем к построению портфеля с периодом владения с января 2020 по декабрь 2021 года включительно.

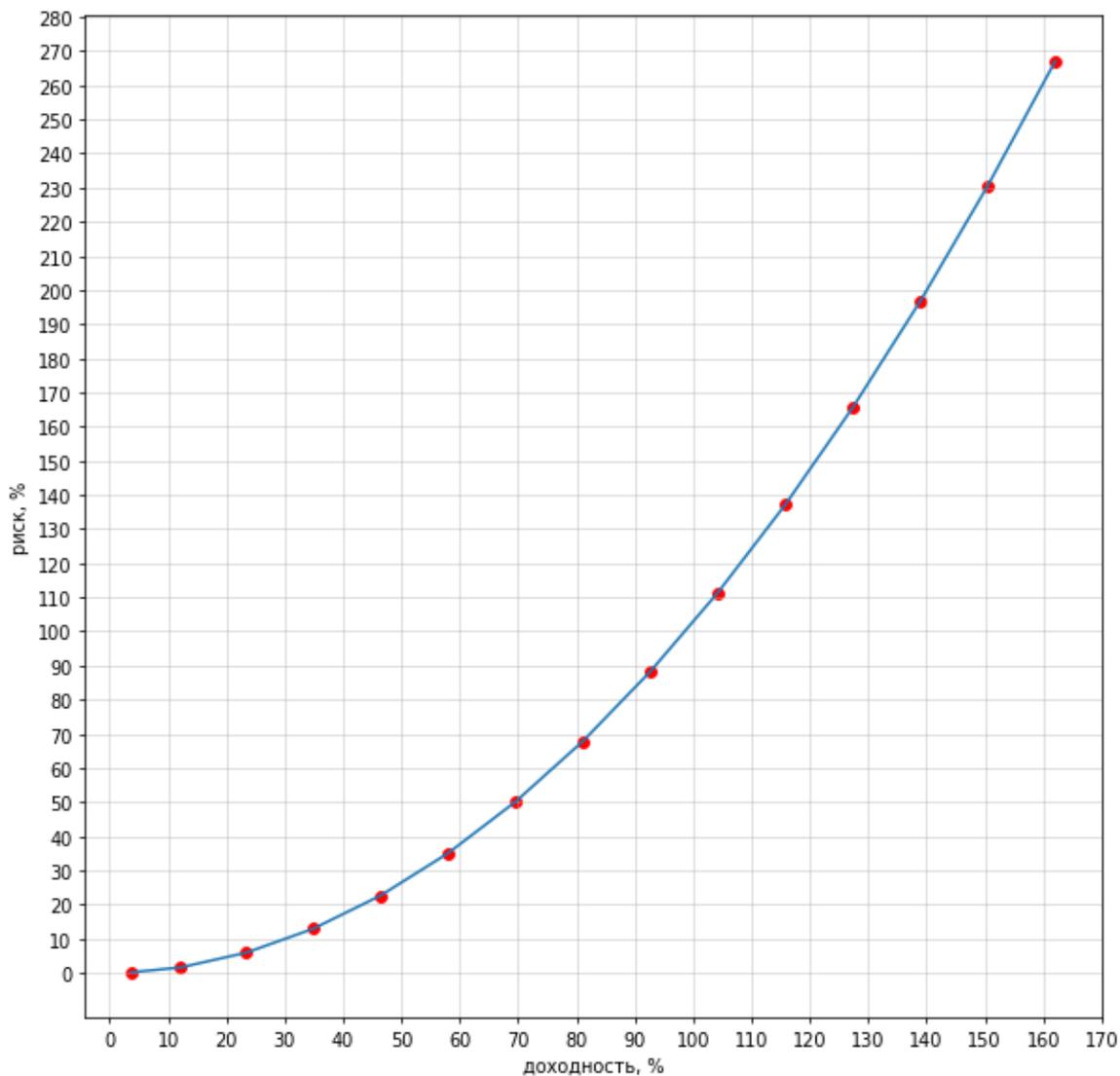


Рисунок 3 - Фронт Марковица с расположением на нём оптимальных портфелей с периодом владения с 2020 по 2021 год

Сравним стратегий по периодам обладания портфеля. Для начала сравним портфель 2018 - 2021 года с двумя портфелями за 2018 - 2019 и 2020 - 2021.

Из приведенных ниже данных в таблице 2 видно, что при вложении денег на более долгий срок, в нашем случае на 4 года, значение доходности ниже почти при всех t .

Таблица 2 - Сравнение значений доходности для портфеля на 2018 - 2021 года со значениями доходности при инвестировании в два двухгодичных портфеля при $t \in [0; 7]$

t	m_p на 4, %	m_p по 2, %
0	6.416	4.5665
0.5	7.87	13.6695
1.0	11.155	19.318
1.5	15.082	31.9105
2.0	19.282	44.6865
2.5	23.546	57.4965
3.0	27.931	70.3705
3.5	32.356	83.221
4.0	36.807	95.593
3.0	27.931	70.3705
3.5	32.356	83.221
4.0	36.807	95.593
4.5	41.275	108.9635
5.0	45.755	121.838
5.5	50.244	134.7145
6.0	54.74	147.5925
6.5	59.241	162.473
7.0	63.747	173.353

Если перейти к сравнению двухгодичных портфелей и портфелей на год, то можно наблюдать аналогичную ситуацию. Для акций компаний «Сбербанк», «Газпром», «ГМК Норникель» при двухгодичном портфеле доходность выше, чем в годовом портфеле. Например, значения для 2018 - 2019 года $m_p = 32.356\%$, а средние значения для 2018 и 2019 годов отдельно равно $m_p = 9.225\%$. Значения приведены для $t = 3.5$. При сравнении двухгодичного портфеля на 2020 - 2021 года и двух портфелей на 2020 и 2021 год отдельно наблюдается аналогичная ситуация.

Таблица 5.8 - Сравнение значений доходности для портфеля на 2018 - 2019 года со значениями доходности при инвестировании в два годичных портфеля при $t \in [0; 7]$

t	m_p на 2, %	m_p по году, %
0	6.416	2.25
0.5	7.87	3.3
1.0	11.155	4.4
1.5	15.082	5.375
2.0	19.282	6.375
2.5	23.546	7.325
3.0	27.931	8.275
3.5	32.356	9.225
4.0	36.807	10.1
4.5	41.275	11.025
5.0	45.755	11.925
5.5	50.244	12.85
6.0	54.74	13.75
6.5	59.241	14.675
7.0	63.747	15.625

Следовательно, инвестор может выбрать стратегию, которая будет удовлетворять его запросам. Если инвестор желает получить большую прибыль, имея портфель, составленный из акций компаний «Сбербанк», «Газпром» и «ГМК Норникель», то лучше выбрать стратегию с самым большим периодом обладания портфелем, то есть выбрать период владения в 4 года. Если же инвестор для получения прибыли не готов ждать 4 года, то лучше выбрать стратегию на 2 года, так как прибыль для такого портфеля выше, чем для годового.

Заключение. В ходе выполнения работы в теоретической части были рассмотрены определение портфельного инвестирования, принципы его формирования и показатели эффективности портфеля. В следующей главе была

решена аналитическим методом задача Марковица по заданной функции полезности.

Для выполнения практической части работы был выполнен поиск реальных данных за 2014 - 2021 период. Для формирования оптимального портфеля полученные цены за каждый период были переведены в доходности. Затем с помощью программы, написанной на языке Python 3.9, был сформирован оптимальный портфель с разным значением параметра t , который показывает предпочтение инвестора между доходностью и риском на разные временные промежутки. Далее был проведен сравнительный анализ всех портфелей, который показал, что прогноз для портфеля с большим периодом владения, дает более точный результат, а так же будет предпочтительным для инвесторов, не желающих рисковать. В то время, как годичный портфель будет более рискованным.