МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Наибольшие независимые и наименьшие доминирующие множества графа

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студентки 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Куприяновой Дарьи Андреевны

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент ___________ М. Б. Абросимов

21.01.2023 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент ___________ М. Б. Абросимов

21.01.2023 г.

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

В наши дни применение теории графов очень разнообразно. С помощью графов можно представить многое; от генеалогического древа и схемы цепей дежурного освещения до схем авиалиний, созвездий или молекул.

Разнообразие применения графов связано с тем, что они являются очень естественным средством объяснения сложных ситуаций на интуитивном уровне. Эти преимущества представления сложных структур и процессов графами становятся еще более ощутимыми при наличии хороших средств их визуализации.

В данной работе будут рассмотрены понятия независимых множеств вершин и ребер, доминирующих множеств вершин и ребер, наибольшие независимые множества вершин и ребер, наименьшие доминирующие множества вершин и ребер, вершинные и реберные числа независимости и доминирования, а также связные доминирующие, независимые доминирующие и наименьшие связные и независимые доминирующие множества вершин для заданных графов.

В практической части будет реализована программа на языке программирования C++ CLI в среде Microsoft Visual Studio 2022, реализующая отрисовку любых неориентированных графов, подающихся в формате Graph6 или в виде матрицы смежности. С помощью программы можно получить все искомые множества любых графов с определенным числом вершин и обозначить эти множества на отрисованном изображении графа.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

1 Теоретическая часть

1.1 Основные определения

В этом разделе приводятся основные теоретические понятия, необходимые для рассмотрения темы, излагаются определения и обозначения из теории графов, а также примеры, демонстрирующие предмет изучения.

1.2 Независимые множества графа

В неориентированном графе $G = (V, \alpha)$ множество его вершин SS, где $S \subset VS \subset V$, называется независимым (или внутренне устойчивым), если любые две вершины в нем несмежны, то есть никакая пара вершин не соединена ребром, или, другими словами, множество SS порождает пустой подграф: $G(S, \alpha') \subset G \Rightarrow \alpha' = \emptyset$.

Наибольшее число вершин в таких множествах называется вершинным числом независимости $\beta_0(G)$ графа G, то есть, если Q есть семейство всех независимых множеств вершин S, то $\beta_0(G) = \max\{|S|: S \in Q\}$.

В неориентированном графе $G = (V, \alpha)$ множество его ребер M, где $M \subset \alpha$, называется независимым, если никакая пара ребер не смежна или множество M порождает пустой подграф: $G = (V', M) \subset G \Rightarrow V' = \emptyset$.

Наибольшее число ребер в таких множествах называется реберным числом независимости $\beta_1(G)$ графа G, то есть, если W есть семейство всех независимых множеств ребер M, то $\beta_1(G) = \max\{|M|: M \in W\}$.

Максимальным независимым множеством называется независимое множество, не являющееся подмножеством другого независимого множества. То есть это такое множество вершин S, что любое ребро графа имеет хотя бы одну конечную вершину, не принадлежащую S, и любая вершина не из S имеет хотя бы одну соседнюю в S.

1.3 Доминирующие множества графа

Для графа $G = (V, \alpha)$ доминирующее множество вершин (или внешне устойчивое) есть множество вершин $S \subseteq V$, выбранное так, что для каждой вершины v_j, не входящей в S, существует ребро, идущее из некоторой вершины множества S в вершину v_j. Таким образом, S есть доминирующее множество вершин, если $S \cup \alpha(S) = V$.

Число доминирования (число вершинного доминирования) $\gamma_0(G)$ – это число вершин в наименьшем доминирующем множестве G.

В теории графов доминирующее множество ребер (или реберное доминирующее множество) графа $G = (V, \alpha)$ – это подмножество $D \subseteq \alpha$, такое, что любое ребро не из D смежно по меньшей мере одному ребру из D.

Наименьшее доминирующее множество вершин или ребер – это доминирующие множества вершин или ребер с наименьшим размером.

Связное доминирующее множество графа G – это множество D вершин с двумя свойствами:

1. из любого узла в D можно перейти в любой другой узел в D по пути, полностью находящемся внутри D. То есть D порождает связный подграф графа G;

2. любая вершина в G либо принадлежит D, либо смежна с вершиной из D. То есть D является доминирующим множеством графа G.

Доминирующие множества тесно связаны с независимыми множествами – независимое множество является доминирующим тогда и только тогда, когда оно является максимальным независимым множеством, так что любое максимальное независимое множество в графе является также наименьшим доминирующим множеством.

1.4 Визуализация графов с использованием физических аналогий

При нахождении изображения графа можно рассматривать граф как систему тел с силами, взаимодействующими между телами, например, считая вершины графа телами, а ребра пружинами. В этом случае алгоритм находит конфигурацию тел с локально минимальной энергией – так называемую конфигурацию равновесия сил, в которой каждое тело занимает такую позицию, что сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю.

Наиболее простой подход состоит в использовании комбинации пружин и электронных сил, когда каждое ребро рассматривается как пружина, а вершины считаются одинаково заряженными частицами, между которыми действуют силы отталкивания.

2 Практическая часть

2.1 Программа для работы с графами

На вход граф можно подавать в формате Graph6, в виде матрицы смежности. Также на вход можно подать список графов в формате Graph6. Для генерации такого списка будет использоваться программа nauty.

Graph6 – формат для компактного представления неориентированных графов. Имеется вектор, размер которого кратен 6, при необходимости дописываются нули. Компоненты вектора делятся на группу по 6 элементов, начиная с начала вектора. Далее эти группы интерпретируются как самостоятельные двоичные числа, переводятся в десятичную систему. В конце к каждому числу прибавляется 63, и он заменятся соответствующим символом из таблицы ASCII, с подходящим номером.

2.2 Примеры работы программы

Рассмотрим работу программы. Сначала зайдем на ссылку «Получение данных». Введем любой неориентированный граф в формате Graph6 и получим результат работы программы, показанный на рисунке 1, – визуализацию графа и все множества вершин и ребер этого графа.

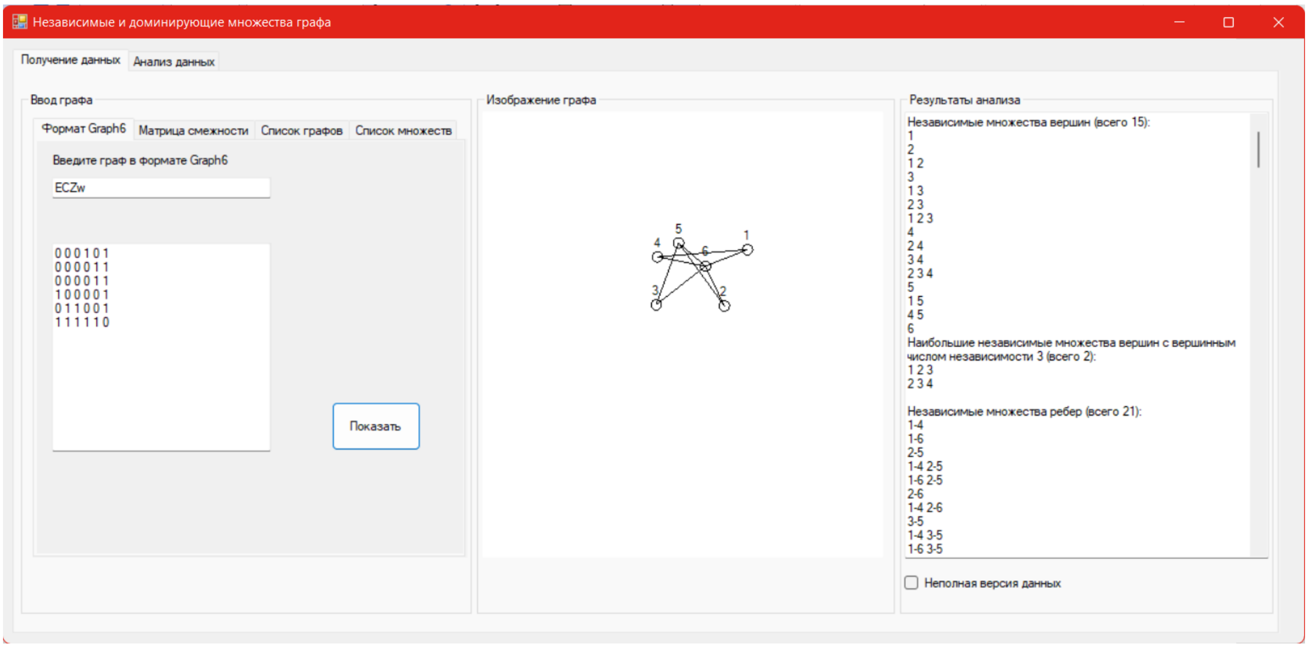

Рисунок 1 – Результат работы программы

При желании можно получить сокращенную версию данных. Тогда будут перечислены только наибольшие и наименьшие множества вершин и ребер.

Теперь введем любой другой неориентированный граф в виде матрицы смежности. Результат работы программы показан на рисунке 2.

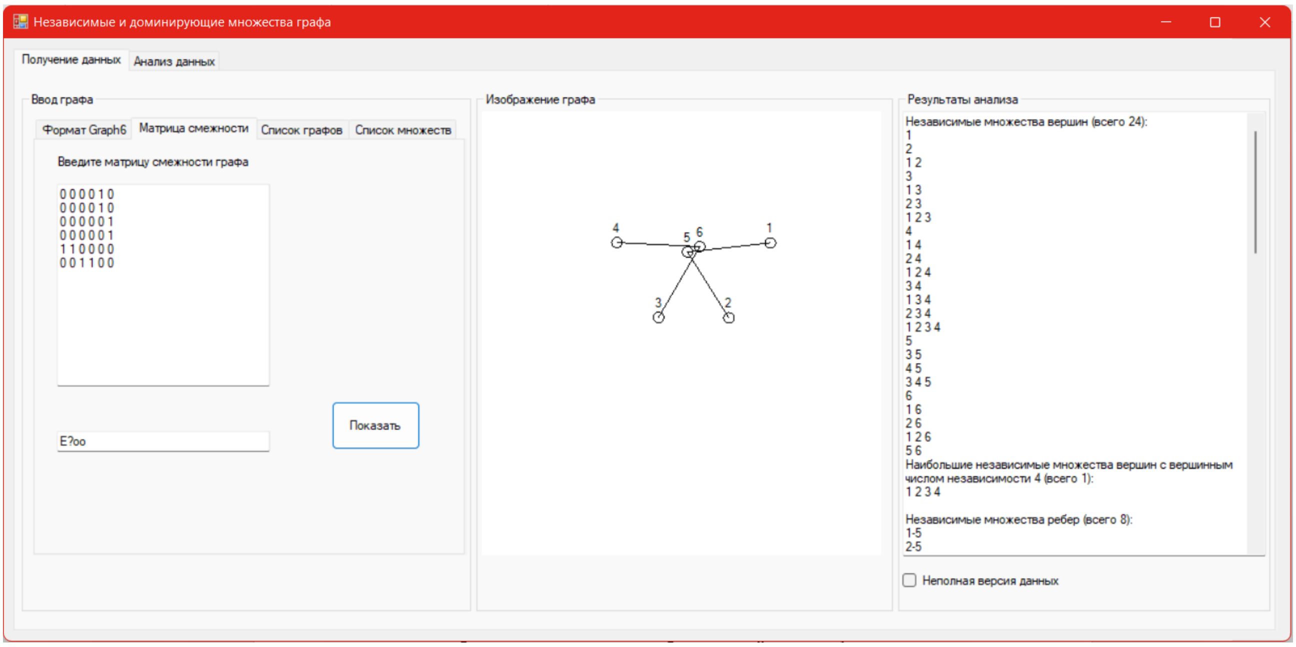

Рисунок 2 – Результат работы программы

Теперь загрузим список 6-вершинных графов. На рисунке 3 показан результат работы программы при выборе случайного графа из списка.

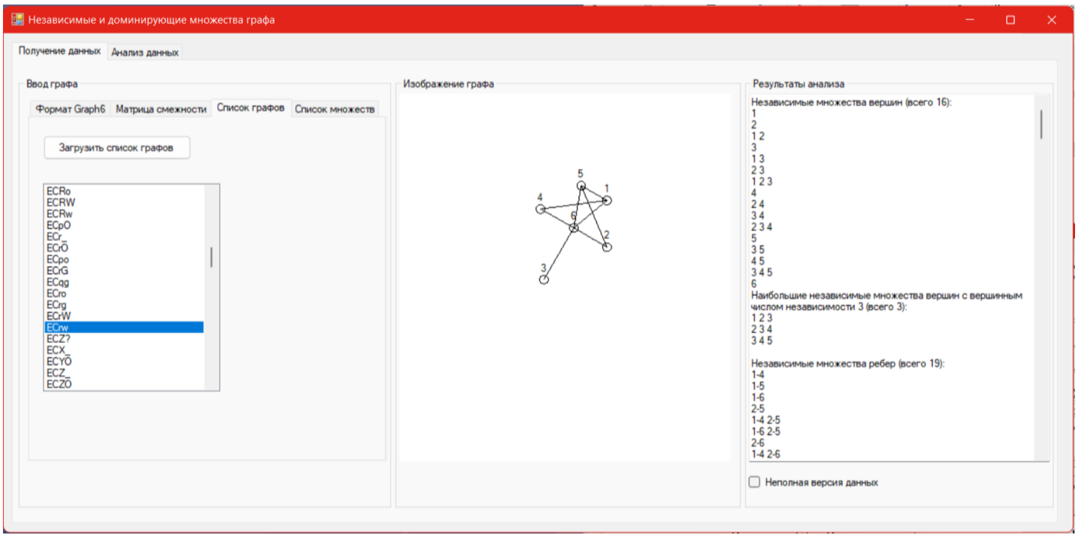

Рисунок 3 – Результат работы программы с графом ECrw

Рассмотрим подробнее множества графа ECrw. Для этого во вкладке «Список множеств» загрузим полный список множеств выбранного графа. На рисунках 4 и 5 показаны изображения графа с подсвеченными множествами вершин и ребер, выбранными из списка.

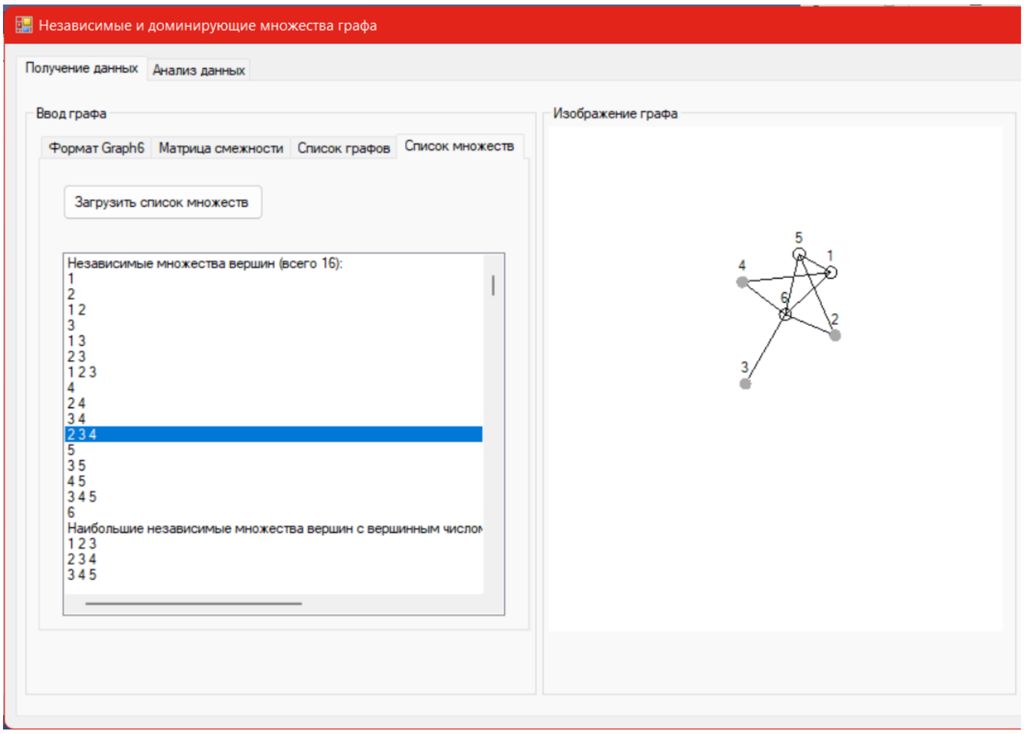

Рисунок 4 – Подсветка независимого множества вершин

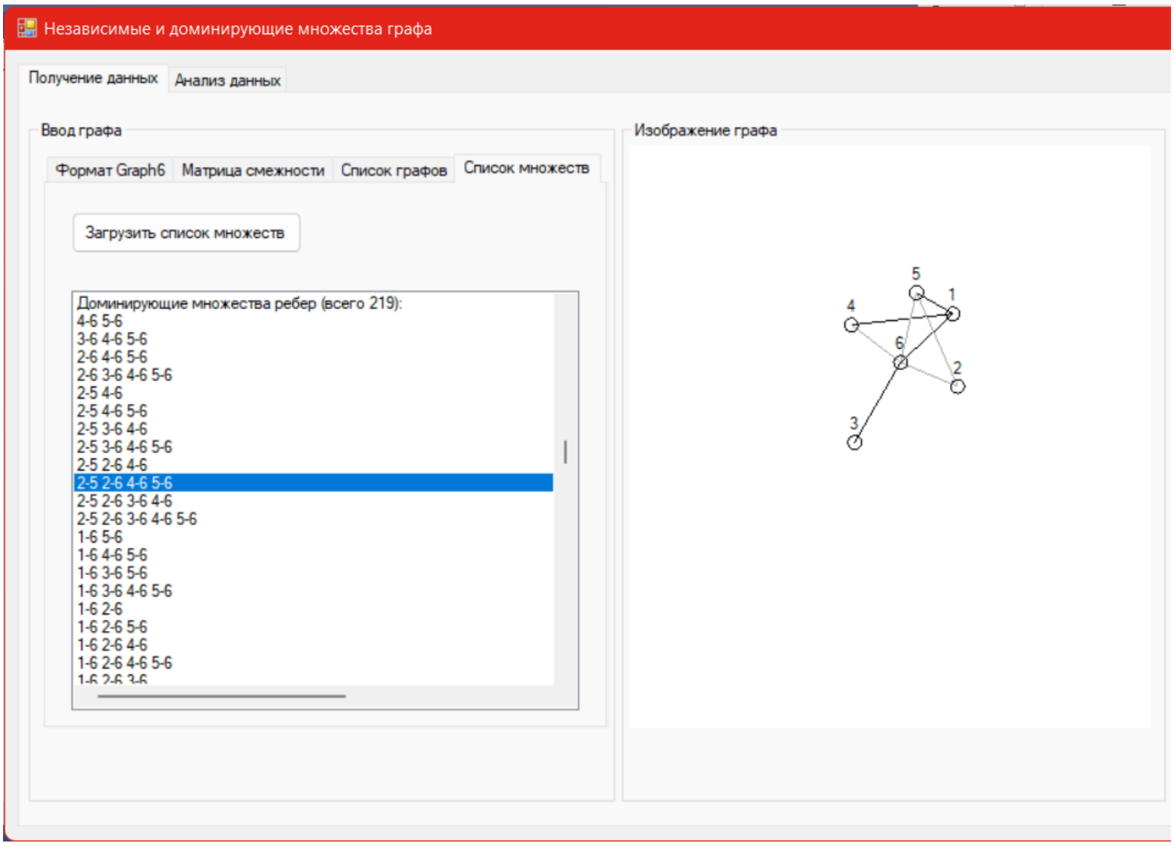

Рисунок 5 – Подсветка доминирующего множества ребер

2.3 Исследование графов

Исследуем вершинные числа независимости и доминирования графов и таблицы соотношения чисел независимости и доминирования для графов с определенным количеством вершин. Для этого перейдем во вкладку «Анализ данных» и загрузим полный список графов. На рисунке 6 показан пример таблицы соотношения чисел независимости и доминирования 5-вершинных графов.

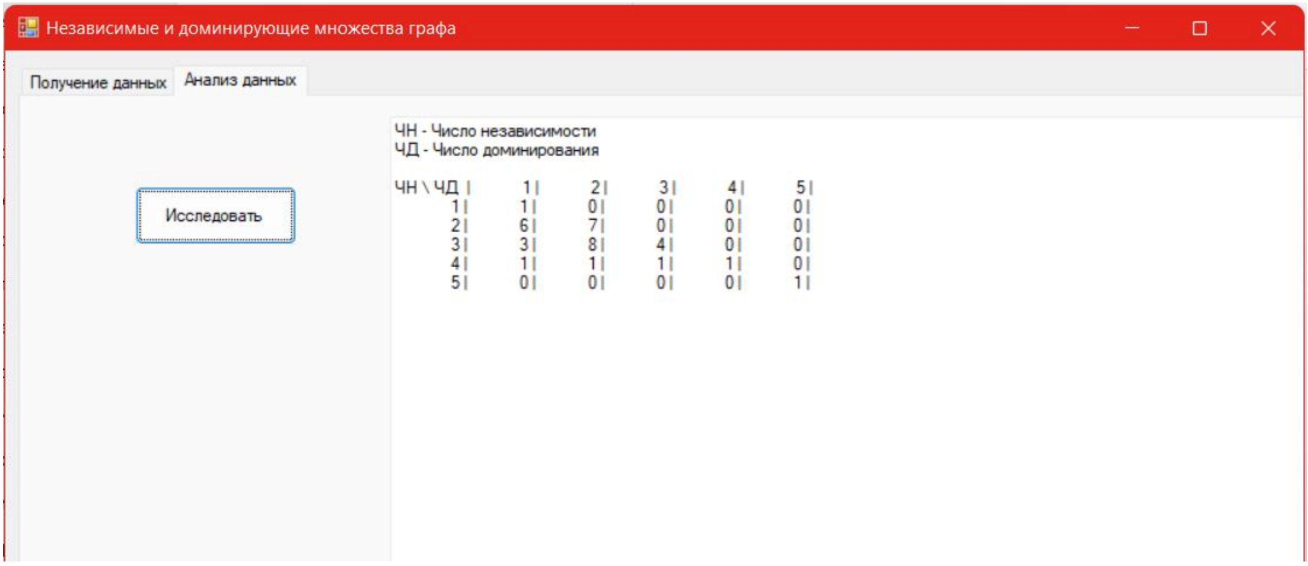

Рисунок 6 – Результат работы программы анализа данных

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены понятия независимых множеств вершин и ребер, доминирующих множеств вершин и ребер, наибольшие независимые множества вершин и ребер, наименьшие доминирующие множества вершин и ребер, вершинные и реберные числа независимости и доминирования, а также связные доминирующие, независимые доминирующие множества вершин и наименьшие связные и независимые доминирующие множества вершин для заданных графов.

В практической части работы была реализована программа на языке программирования C++ CLI в среде Microsoft Visual Studio 2022.

Программа позволяет находить все указанные выше множества и определять соответствующие им числа. Также в программе реализована визуализация графа и отображение соответствующих множеств.