МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Конгруэнции диграфов

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Панфилова Владимира Владимировича

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов

21.01.2023 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов

21.01.2023 г.

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Граф является математической абстрактной структурой, имеющей отражение во многих реальных объектах.

В данной работе рассматривается определенный подкласс графов: направленные графы, являющиеся частным случаем ориентированных графов, и свойства их решёток конгруэнций. Более подробно будут рассматриваться численные характеристики решётки конгруэнций диграфов.

Актуальность данной работы обусловлена кажущимся недостатком исследований по данной теме. Конгруэнциям различных типов графов посвящены работы А. В. Киреевой, Е. О. Фоминой, М. Р. Мирзаянова, М. А. Кабанова, О. Е. Смирнова, А. О. Шабарковой. Так, уже были изучены и описаны такие классы графов, как цепи, турниры (в том числе были результаты по отнесению их к собственному типу – простым турнирам), циклы, деревья, двудольные графы. Стоит заметить, что исследования, как правило, проводились внутри одного подкласса диграфов, и сделанные выводы касались некоторых свойств решёток конгруэнций. Таким образом, данные работы, вне сомнения, хоть и несут в себе важные и крайне полезные результаты в области теории графов, не могут быть рассмотрены иначе, как часть всё еще малоизученной темы.

Настоящая работа написана с целью провести масштабное исследование, аккумулировать и обобщить накопленные знания, сравнить результаты с имеющимися на данный момент выводами в данной области, и предложить собственные теоретические результаты. Наряду с этим, целью работы является распространение данной темы и акцент внимания на том, какой интерес для научного сообщества может представлять данная область знаний.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать и описать математически алгоритм построения решётки конгруэнции диграфа и представления её в виде неорграфа;
2. Реализовать программное обеспечение, реализующие эти алгоритмы;
3. Получить численные характеристики решётки диграфов, такие как ранг решётки, ширина решётки, высота решётки;
4. Проанализировать полученные данные и на их основе сформулировать теоретические утверждения.

Дипломная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и 3 приложений. Общий объем работы – 76 страниц, из них 52 страницы – основное содержание, включая 19 рисунков и 34 таблицы, список использованных источников из 15 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первом разделе приводятся теоретические понятия[1][2][3], необходимые для дальнейшего рассмотрения темы. Здесь излагаются основные определения и обозначения, относящиеся к теории графов, а также примеры, наглядно демонстрирующие предмет изучения.

Направленный граф, или диграф – это орграф $\vec{D}$ = (*V*, α), где α антисимметрично, то есть $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta_v$.

Пример диграфа изображен на рисунке 1.

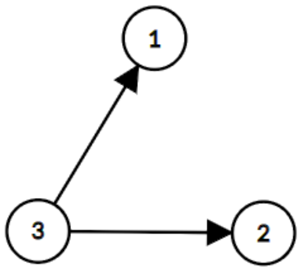

Рисунок 1 – Диграф с 3 вершинами

Конгруэнция диграфа $\vec{D}$ = (*V*, *α*) – это такая эквивалентность на множестве его вершин, что факторграф по ней является диграфом. То есть, конгруэнция диграфа $\vec{D}$ = (*V*, *α*) – это такая эквивалентность $\theta \subseteq V \times V$, что никакие два различных класса не имеют встречных дуг[4].

$Con\ \vec{D}$ – это совокупность всех конгруэнций диграфа $\vec{D}$[5]. Очевидно, что у всякого диграфа есть по крайней мере одна конгруэнция. Множество конгруэнций диграфов образуют решётку[6].

---

[1]Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 368 с.
[2]Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. – М.: Наука, 1990. – 383 с.
[3]Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари; пер. В. П. Козырева. М.: Мир, 1973. – 302 с.
[4]Киреева, А. В. Конгруэнции турниров / А.В. Киреева // Студенты – ускорению научного прогресса: Сб. студ. науч. раб. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 1990. – С. 3–5.
[5]Фомина, Е. О. Конгруэнции цепей и циклов: автореф. дис. … канд. ф.-м. наук // Е. О. Фомина. – Москва, 2013. – 17 с.
[6]Мирзаянов, М. Р. О минимальных сильно связных конгруэнциях ориентированных цепей / М. Р. Мирзаянов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 2006. – С. 104–114.

Располагая элементы $Con\ \vec{D}$ по уровням в упорядоченном виде, можем ввести определения высоты, ширины и ранга решётки[7]. Рангом решётки конгруэнций $Con\ \vec{D}$ назовём её мощность.

Высотой решётки конгруэнций $Con\ \vec{D}$ назовём количество уровней, на которых располагается хотя бы один элемент. Очевидно, что значение высоты любой решётки будет лежать от 1 до n.

Шириной решётки конгруэнций $Con\ \vec{D}$ назовём максимум из значений количества элементов на каждом из уровней решётки[8][9].

Описаны числа Белла[10] и Стирлинга[11].

В разделе 2 рассматриваются способы задания матрицы смежности диграфа; описываются алгоритмы, требующиеся для создания приложения для работы с диграфами и их решётками конгруэнций. Так, описаны алгоритм раскодирования матрицы из кода в формате *digraph6*[12], алгоритм проверки классов разбиения множества на конгруэнцию. Описывается программный комплекс, разработанный в рамках выполнения дипломной работы на языке C# на платформе .NET 3.0 с использованием Windows Forms[13].

Описывается интерфейс программного комплекса, демонстрация работы с использованием интерактивных элементов и пояснением функционала, в том

---

[7] Богомолов, А. М. Несколько задач из алгебры дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. // Материалы X Междунар. конф. по проблемам теоретич. кибернетики, Методы и системы технической диагностики. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 1993. – С. 32–34.

[8] Киреева, А. В. О конгруэнциях корневых деревьев / А. В. Киреева // XI Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики: тез. докл. – Волгоград, 1990. – Ч. 1. С. 23.

[9] Кабанов, М. А. Функциональные конгруэнции ориентированных графов / М. А. Кабанов // Упорядоч. множества и решетки. – Саратов, 1995: вып. 11. – С. 15–23.

[10] Числа Стирлинга второго рода [Электронный ресурс] : Викиконспекты студентов университета ИТМО / URL: https://neerc.ifmo.ru/wiki/index. php?title=Числа_Стирлинга_второго_рода (дата обращения 09.01.2023). Загл. с экрана. Яз. рус.

[11] Числа Белла [Электронный ресурс] : Викиконспекты студентов университета ИТМО / URL: https://neerc.ifmo.ru/wiki/index. php?title=Числа_Белла (дата обращения 09.01.2023). Загл. с экрана. Яз. рус.

[12] Graph formats – ANU College of Engineering & Computer Science [Электронный ресурс]: Page Master: Brendan McKay / URL: https:// users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/formats.html (дата обращения 12.12.2022). Загл. с экрана. Яз. англ.

[13] Создание приложения Windows Forms на C# в Visual Studio [Электронный ресурс]: Microsoft Learn. Документация / URL: https://learn.microsoft.com/ru-ru/visualstudio/ide/create-csharp-winform-visual-studio?view=vs-2019 (дата обращения 12.12.2022). Загл с экрана. Яз. рус.

числе механизмов отслеживания корректности ввода данных и вывода ошибок[14].

Раздел 3 посвящен изучению всех диграфов с числом вершин от 3 до 9; для каждого возможного диграфа получена статистическая информация о соответствующей ему решётке конгруэнций. Были получены статистические результаты, содержащие такие данные, как число дуг, высота, ширина и ранг решётки конгруэнций диграфа. Были посчитаны максимальные значения данных характеристик.

Таблица 8 – Статистика по всем диграфам

	3	4	5	6	7	8	9
Макс. ширина	3	7	25	90	350	1701	7770
Мин. ранг	2	3	2	2	2	2	2
Макс. ранг	5	15	52	203	877	4140	21147

Эти данные были собраны в таблицы, показывающие количество графов с заданными характеристиками – например, ранг и ширина решётки, ранг и высота решётки определенных значений. В том числе рассматривались данные в том виде, в котором они хранятся в СУБД. Были получены и проанализированы данные для всех диграфов, отдельно для турниров, ориентаций графов-цепей и графов-циклов. Эти данные рассматривались независимо друг от друга и на их основе были сформулированы следующие гипотезы, теорема и следствие из неё.

Наблюдение 1. Не существует простого четырёхвершинного диграфа, то есть, такого диграфа с числом вершин 4, что у него нет нетривиальных конгруэнций.

[14]MessageBox Класс [Электронный ресурс]: Microsoft Learn. Документация / URL: https://learn.microsoft.com/ru-ru/dotnet/api/system.windows.forms. messagebox?view=windowsdesktop-7.0 (дата обращения 09.01.2023). Загл. с экрана. Яз. рус.

Теорема 1. Существует точно 2 диграфа с максимальной решёткой конгруэнций: диграфы с $n-1$ дугами, один с точно одним истоком, другой с точно одним стоком. Ширина решётки этих диграфов равна наибольшему числу Стирлинга второго порядка из n по всем k. Ранг этой решётки равен числу Белла для этого n.

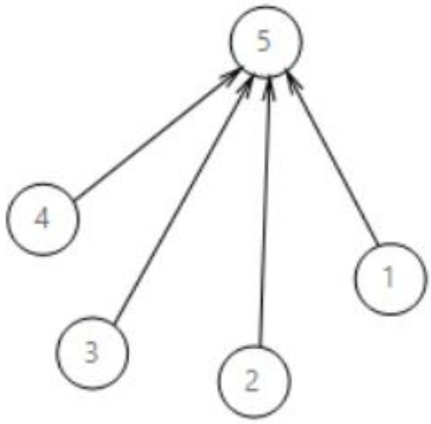

Рисунок 14 – Диграф с наибольшей решёткой конгруэнций для n = 5

Следствие 1. Число элементов на k-ом уровне решётки конгруэнций n-вершинного диграфа не превышает $S(n,k)$.

Наблюдение 2. У турнира наибольшая решётка конгруэнции тогда и только тогда, когда это транзитивный турнир, и ранг этой решётки составляет 2^{n-1}, где n – число вершин турнира.

Наблюдение 3. У турнира решётка конгруэнции имеет максимальную ширину тогда и только тогда, когда это транзитивный турнир, и ширина её равна в точности $\binom{n}{\frac{n}{2}}$, где n – число вершин турнира.

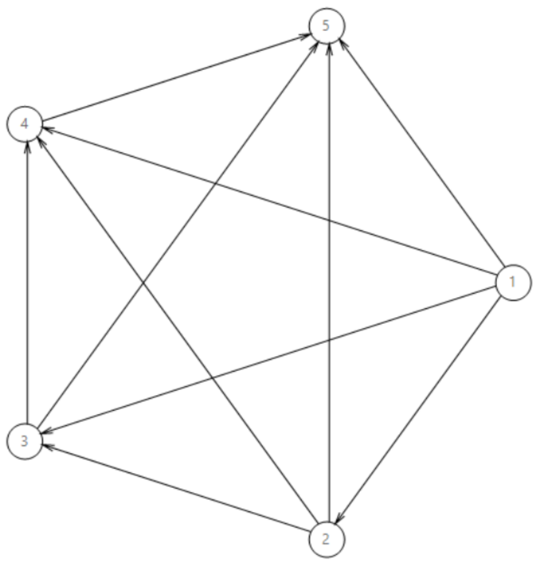

Рисунок 15 – Транзитивный турнир

Наблюдение 4. Для класса турниров с n вершинами не существует представителя с решёткой конгруэнций-цепью высоты n.

Наблюдение 5. Все решётки конгруэнций ориентированных графов-цепей имеют высоту, равную числу вершин графа n.

Наблюдение 6. Решётки конгруэнций направленных цепей (то есть, таких диграфов, у всех вершин которых, кроме двух крайних, число исхода равно числу захода и равно единице) минимальны по ширине и рангу среди решёток всевозможных ориентаций графов-цепей.

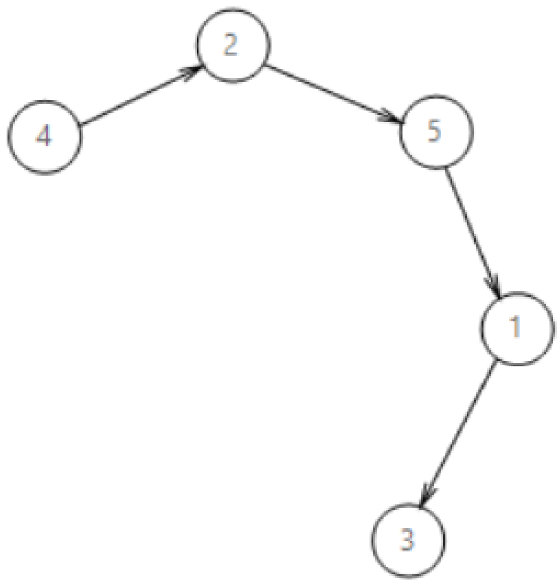

Рисунок 16 – Направленная цепь

Наблюдение 7. Решётка конгруэнций максимальна по ширине и рангу у таких ориентации графа-цепи, в которой у каждой вершины равна нулю или степень исхода, или степень захода, и существует точно две таких ориентации.

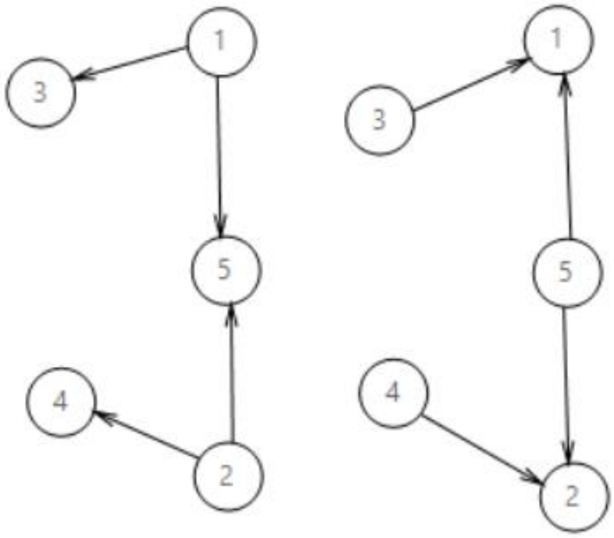

Рисунок 17 – Ориентации цепей с максимальной решёткой конгруэнций

Наблюдение 8. Решётки конгруэнций ориентированных графов-циклов имеют высоту, равную числу вершин графа, кроме решётки ориентированного графа-цикла, то есть графа, степень захода и исхода каждой из вершин которой совпадают и равны единице.

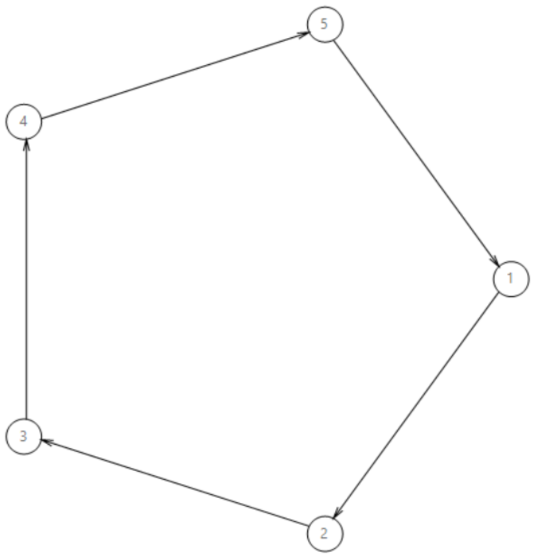

Рисунок 18 – Ориентированный граф-цикл

Наблюдение 9. Решётки конгруэнций ориентированных графов-циклов минимальны по высоте, ширине и рангу среди решёток всевозможных ориентаций графов-циклов.

Наблюдение 10. Решётка конгруэнций максимальна по ширине и рангу у такой ориентации графа-цикла, в которой у каждой, кроме, может быть, одной, вершины равна нулю или степень исхода, или степень захода, и существует ровно два таких диграфа.

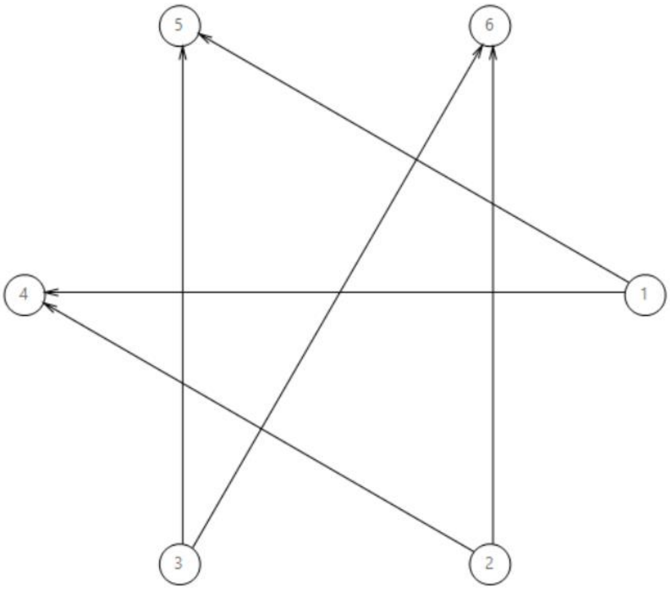

Рисунок 19 – Ориентация цикла с максимальной решёткой конгруэнций

При доказательстве теоремы 1 были использованы известные результаты по значениям некоторых последовательностей, в частности последовательности значений чисел Белла и Стирлинга[15].

[15]The on-line encyclopedia of integer sequences [Электронный ресурс]: founded in 1964 by N. J. A. Sloane / URL: https://oeis.org/ (дата обращения 09.01.2023). Загл с экрана. Яз. рус.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изложены теоретические и практические вопросы, связанные с конгруэнциями диграфов, а именно рассмотрены различные виды решёток конгруэнций и выделены закономерности в их построении, а также рассмотрены все существующие различные описанные математически диграфы с различным числом вершин.

Был введён необходимый для исследования математический аппарат из области теории графов. Для практического изучения вопроса в рамках поставленных задач реализованы программы для наглядного изображения решётки конгруэнций и для сбора статистической информации.

Была собрана статистика для всех диграфов с числом вершин от 3 до 9, которая затем была изучена посредством средств по созданию сводных отчетов.

Рассматривался как общий класс диграфов, так и его некоторые основные подклассы – турниры, ориентированные цепи, циклы. Для представителей данных подклассов диграфов также были проведены аналогичные действия по изучению особенностей решёток конгруэнций.

Таким образом, все поставленные задачи решены полностью.