МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

__Задача рассеяния для дискретизаций системы Захарова - Шабата_

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

___

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки)__4___ курса __411__группы

направления _01.03.02 – Прикладная математика и информатика___________

код и наименование направления

________________механико-математического факультета_________________

наименование факультета, института, колледжа

________________Нестеркина Станислава Владиславовича________________

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент	___________________	__М.Ю.Игнатьев__
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф-м.н., профессор_____	___________________	___В.А. Юрко____
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Саратов, 2024 год

Введение. Система Захарова – Шабата представляет интерес прежде всего в контексте метода обратной задачи рассеяния, играя в схеме МОЗР для ряда нелинейных уравнений, в частности, нелинейного уравнения Шредингера, ту же роль, что классический оператор Штурма – Лиувилля играет в случае уравнения Кортевега – де Фриза. Аналогичную роль играют дискретизации системы Захарова – Шабата в теории дискретных интегрируемых систем.

Акутальность работы. Интерес к данному кругу вопросов не ослабевает с момента открытия МОЗР в 1967 году, а в последние годы нарастает в связи появлением новых приложений. К таковым можно отнести применения в области оптоволоконных линий связи, где МОЗР рассматривается как возможная основа построения алгоритмов компенсации искажений, возникающих вследствие совместного действия хроматической дисперсии и Керровской нелинейности, описываемого векторным аналогом нелинейного уравнения Шредингера. Поскольку применение МОЗР предполагает решение прямой и обратной задач рассеяния, разработка эффективных методов численного решения таких задач становится решающим элементом построения упомянутых алгоритмов. Наиболее эффективными здесь оказываются методы, которые фактически являются методами решения прямой и обратной задач рассеяния для дискретных аналогов системы Захарова – Шабата, таких, как система Абловица – Ладика.

Цель работы:

1. Рассмотреть теорию рассеяния для системы Абловица - Ладика
2. Рассмотреть прямые и обратаные задачи рассеяния
3. Описать быстрые алгоритмы для прямлй и обратной задачи рассеяния
4. Програмно реализовать быстрые алгоритмы

Основное содержание работы Основная часть работы состоит из 3 глав. В **первой** главе мы рассматриваем теорию рассеяния для схемы Абловица - Ладика.

Для начала попросту дискретизируем

$$\begin{aligned} v_{1x} &= -i\zeta v_1 + qv_2 \\ v_{2x} &= i\zeta v_2 + rv_1 \end{aligned} \tag{1}$$

положив

$$(v_i)_x = \frac{v_{i,n+1} - v_{i,n}}{h}$$

Таким образом, (1) дает

$$\begin{aligned} v_{1,n+1} &= v_{1,n}(1 - i\zeta h) + q_n h v_{2,n} \\ v_{2,n+1} &= v_{2,n}(1 + i\xi h) + r_n h v_{1,n} \end{aligned} \tag{2}$$

где $v_{l,n} = v_i(hn), q_n = q(hn), r_n = r(hn)$. Если q_n и r_n были равны нулю, то естественно было бы определить $z = e^{-i\xi\hbar}$; при этом непрерывное решение естественно переходит в дискретное: $v_1 = e^{-i\hbar x} = e^{-i\hbar nh} = z^n$ и аналогично $v_2 = z^{-n}$. Поэтому здесь мы возьмем $z = e^{-i\xi h} \sim 1 - i\zeta h, 1/z = e^{2\xi h} \sim 1 + i\zeta h$, и если определим $Q_n = q_n h, R_n = r_n h$, то получим

$$\begin{aligned} v_{1,n+1} &= zv_{1,n} + Q_n v_{2,n} \\ v_{2,n+1} &= \frac{1}{z} v_{2,n} + R_n v_{1,n} \end{aligned} \tag{3}$$

Имеется важное обобщение (3):

$$
\begin{aligned}
v_{1,n+1} &= z v_{1,n} + Q_n v_{2,n} + S_n v_{2,n+1} \\
v_{2,n+1} &= \frac{1}{z} v_{2,n} + R_n v_{1,n} + T_n v_{1,n+1}
\end{aligned} \tag{4}
$$

(Отметим, что непрерывный предел (4) также сводится к (1).)

Связанную с (3) или (4) эволюцию по времени мы представим в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} v_{1,n} &= A_n v_{1,n} + B_n v_{2,n} \\
\frac{\partial}{\partial t} v_{2,n} &= C_n v_{1,n} + D_n v_{2,n}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Опишем прямую задачу рассеяния, связанную с разностным 2×2-оператором Захарова - Шабата.

Мы будем изучать обратную задачу рассеяния, связанную с (4). Функции Йоста определяются следующим образом:

$n \to -\infty$:

$$
\varphi_n \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z^n, \quad \bar{\varphi} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} z^n \tag{10a}
$$

$n \to \infty$:

$$
\psi_n \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z^{-n}, \quad \bar{\psi}_n \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z^n \tag{10b}
$$

Можно показать, что для достаточно быстро убывающих при $|n| \to \infty$ потенциалов Q_n, R_n функции

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n z^{-n}, \;\; \psi_n z^n \text{ аналитичны при } |z| > 1, \\
&\bar{\varphi}_n z^n, \quad \bar{\psi} z^{-n} \text{ аналитичны при } |z| < 1
\end{aligned}
$$

(т. е. вне и внутри единичного круга). Это легче всего показать, когда потенциалы имеют компактный носитель. В этом случае можно по индукции установить, что функции, аналитичные при $|z| > 1$, являются полиномами по $1/z$, а функции, аналитичные при $|z| < \infty$, - полиномами по z. Вронскиан задается соотно- шением

$$W_n(\psi, \bar{\psi}) = \prod_{i=n}^{\infty} \frac{1}{1 - R_i Q_i} = \psi_{1n}\bar{\psi}_{2n} - \psi_{2n}\bar{\psi}_{1n}$$

Если $R_i = -Q_i^*$, то функция W_n положительно определена. В остальных случаях мы будем предполагать, что R_i и Q_i меньше единицы. Линейная зависимость $\psi_n, \bar{\psi}_n$ приводит к

$$\varphi_n = a\bar{\psi}_n + b\psi_n \tag{11a}$$

$$\bar{\varphi}_n = -\bar{a}\psi_n + \bar{b}\bar{\psi}_n \tag{11b}$$

а соотношение Вронского даёт

$$\alpha\bar{a} + b\bar{b} = \prod_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1 - R_i Q_i}{1 - S_i T_i} \right) \tag{11c}$$

где $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ зависят от времени как от параметра. Мы покажем, что $a\bar{a}+b\bar{b}$ не зависит от времени. Поэтому если $\Pi_{-\infty}^{\infty}$ $((1 - R_i Q_i)$ / (1)) является ненулевой конечной величиной в начальный момент времени, то и вронскиан W_n является конечным и ненулевым. Разложениями (11) мы будем пользоваться при $|z| = 1$.

Теперь опишем обратную задачу рассеяния

Разделим (11a) на а (предполагая $a(z) \neq 0$ при $|z| = 1$) :

$$\frac{\varphi_n}{a} = \bar{\psi}_n + \frac{b}{a}\psi_n \tag{11d}$$

и предположим существование следующих представлений (имеющих необходимые свойства аналитичности):

$$\psi_n = \sum_{n'=n}^{\infty} K\left(n, n'\right) z^{-n'}$$
$$\bar{\psi}_n = \sum_{n'=n}^{\infty} \bar{K}\left(n, n'\right) z^{n'} \tag{12}$$

по аналогии

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^{\infty} K(x, s) e^{i\xi s} ds$$

Подставив $\psi_n, \bar{\psi}_n$ в (11c) и подействовав на (11c) оператором $1/2\pi i \oint dz z^{-m-1}$ (контуром служит единичная окружность), получим

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_n}{a} z^{-m-1} dz = \sum_{n'=n}^{\infty} \bar{K}_n\left(n, n'\right) \frac{1}{2\pi i} \oint z^{n'-m-1} dz + \sum_{n'=n}^{\infty} \bar{K}\left(n, n'\right) \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{b}{a}(z)$$
$$z^{-(m+n')-1} dz$$

Заметив, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{n'-m-1} dz = \delta\left(n', m\right)$$

($\delta(n, m) = 1$ при $n = m$ и 0 в остальных случаях; $\delta(n, m)$ - это дельта-символ Кронекера) и определяя

$$F_c\left(m + n'\right) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{b}{a}(z) z^{-(m+n')-1} dz \tag{13}$$

получим

$$I = \bar{K}(n, m) + \sum_{n'=n}^{\infty} K\left(n, n'\right) F_c\left(m + n'\right) \tag{14}$$

Теперь вычислим левую часть этого уравнения:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_n}{a} z^{-m-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_n z^{-n}}{a} z^{n-m-1} dz \tag{15}$$

Функции $\varphi_n z^{-n}$ и $a(z)$ являются аналитическими в области $|z| > 1$, поэтому единственные сингулярности - это точки, в которых $a(z_j) = 0$. Таким образом, при $z \to \infty \varphi_n z^{-n}/a \to J_{\infty,n}$. (Мы могли бы вычислять $J_{\infty,n}$ переходом к пределу $z \to \infty$ в (11c), но для дальнейшего эта формула не потребуется.) Предположив, что a имеет N простых нулей z_k, в которых $\varphi_k = \tilde{c}_k \psi_k$, получим

$$I = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_n(z_j)}{a'(z_j)} z_j^{-m-1} + J_{\infty,n}\delta(n,m) = \tag{16}$$
$$= -\sum_{j=1}^{N} \frac{\tilde{c}_j}{a'(z_j)} \sum_{n'=n}^{\infty} K(n,n')\, z_j^{-(n'+m)-1} + J_{\infty,n}\delta(n,m)$$

Определив $F_D(m+n') \equiv \sum^N \tilde{c}_j z_j^{-(n'+m)-1}$, $c_j = \bar{c}_j / a'_j$, и воспользовавшись (15), (16), получим

$$\bar{K}(n,m) + \sum_{n'=n}^{\infty} K(n,n')\, F(m+n') = J_{\infty,n}\delta(n,m), \tag{17a}$$

где

$$F(m+n') = F_c(m+n') + F_D(m+n') =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{b}{a} z^{-(n'+m)-1} dz + \sum_{j=1}^{N} \tilde{c}_j z_j^{-(n'+m)-1} \tag{17b}$$

Если мы проделаем то же самое с (11b), то получим

$$K(n,m) - \sum_{n'=n}^{\infty} \bar{K}(n,n')\, \bar{F}(m+n') = -J_{0,n}\delta(n,m) \tag{18a}$$

$$\bar{F}(m+n') = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{b}}{\bar{a}} z^{n'+m-1} dz - \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_i \bar{z}_j^{n'+m-1} \tag{18b}$$

где

$$\bar{J}_{0,n} = \lim_{z \to 0} z^n \frac{\bar{\varphi}_n}{\bar{a}}$$

(как и раньше, $J_{0,n}$ можно вычислить, но в этом нет необходимости). Соотношения (17) и (18) нам нужны только при $m > n$.

Во **второй** главе рассмотрим дискретные интегрируемые системы, связанные со схемой Абловица - Ладика.

Дифференциально-разностный случай. Уравнение (5) задает эволюцию по времени. Предположим, что при $n \to \pm\infty$ $A_n \to A_\pm, D_n \to D_\pm, B_n, C_n \to 0$. Собственные функции, удовлетворяющие одновременно (4) и (5), имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(t)} &= \varphi_n e^{A_- t}, \quad \psi_n^{(t)} = \psi_n e^{D_+ t}, \\ \bar{\varphi}_n^{(t)} &= \bar{\varphi}_n e^{D_- t}, \quad \bar{\psi}_n^{(t)} = \bar{\psi}_n e^{A_+ t} \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} a &= a_0 e^{(A_+ - A_-)^t}, \quad b = b_0 e^{(D_+ - A_-)^t} \\ \bar{a} &= \bar{a}_0 e^{(D_+ - D_-)^t}, \quad \bar{b} = \bar{b}_0 e^{(A_+ - D_-)^t} \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{b}{a}(t) &= \left(\frac{b}{a}\right)_0 e^{(D_+ - A_+)^t} \\ \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(t) &= \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)_0 e^{(A_+ - D_+)^t} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} c_j &= c_{j,0} e^{(D_+ - A_+)(z_j)^t} \\ \bar{c}_j &= \bar{c}_{f,0} e^{(A_+ - D_+)(\bar{z}_j)^t} \end{aligned}$$

Дисперсионное соотношение линеаризованной задачи имеет вид

$$-i\omega\left(z^2\right) = (A_+ - D_+)(z)$$

Конечно-разностный случай. Мы опять предположим, что $A_n^m \to A_\pm$,

$D_n^m \to D_\pm, B_n^m \to 0, C_n^m \to 0$ при $n \to \pm\infty$. Собственные функции, одновременно удовлетворяющие уравнением (4), задаются соотношеннями

$$\begin{gathered}\Phi_n^{m(t)} = \Phi_n^m \left(1 + A_-\right)^m, \;\; \Psi_n^{m(t)} = \Psi_n^m \left(1 + D_+\right)^m \\ \bar{\varphi}_n^{m(t)} = \bar{\varphi}_n^m \left(1 + D_-\right)^m, \;\; \bar{\Psi}_n^{m(t)} = \bar{\Psi}_n^m \left(1 + A_+\right)^m\end{gathered}$$

Қак и прежде, можно получить

$$\begin{gathered}a = a_0 \left(\tfrac{1+A_+}{1+A_-}\right)^m, \;\; \bar{a} = \bar{a}_0 \left(\tfrac{1+D_+}{1+D_-}\right)^m \\ b = b_0 \left(\tfrac{1+D_+}{1+A_-}\right)^m, \;\; \bar{b} = \bar{b}_0 \left(\tfrac{1+A_+}{1+D_-}\right)^m\end{gathered}$$

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)_0 \left(\frac{1+D_+}{1+A_+}\right)^m, \quad \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)_0 \left(\frac{1+A_+}{1+D_+}\right)^m$$

и

$$c_i = c_{j,0} \left(\frac{1+D_+}{1+A_+}\right)^m (z_j), \quad \bar{c}_j = \bar{c}_{j,0} \left(\frac{1+A_+}{1+D_+}\right)^m (\bar{z}_j)$$

.

Здесь $a_0, \ldots, \bar{c}_{j,0}$ отвечают данным рассеяния при $m = 0$. Дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения ($Q_n^m = = z^n \omega^m$) имеет вид

$$\omega\left(z^2\right) = \frac{1+A_+}{1+D_+}$$

Схема построения решений дифференциально-разностных и конечно-разностных уравнений описана полностью.

В **третьей** главе - практическая часть работы. Она заключается в написании быстрого алгоритма решения задачи на собственные значения и обратной задачи рассеяния.

Рассмотрим задачу Захарова-Шабата на собственные значения:

$$\frac{dv_1}{dx} = -i\zeta v_1 + q v_2, \tag{27a}$$

$$\frac{dv_2}{dx} = i\zeta v_2 + rv_1 \tag{27b}$$

Прежде всего мы предположим, что q и r достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Отметим, что это предложение очень важно, поскольку теория рассеяния с другими граничными условиями приводит к совершенно другим результатам. Быстрое убывание позволяет определить собственные функции $\varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi}$ со следующими граничными условиями при $\zeta = \xi (\zeta = \xi + i\eta$ - собственное значение):

$$\left.\begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\xi x} \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\xi x} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } x \to -\infty \tag{28a}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\xi x} \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\xi x} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } x \to +\infty \tag{28b}$$

Отметим, что $\bar{\varphi}$ не является комплексным сопряжением φ, будем пользоваться обозначением φ^* для комплексного сопряжения. Это решение определено в фиксированный момент времени (скажем, при $t = 0$), и вся развиваемая в этом разделе теория рассеяния (прямая и обратная) относится к этому фиксированному моменту времени. Далее в этом разделе мы будем опускать временную зависимость в обозначениях. Теперь, если $u(x, \xi)$ - это 2×1 вектор-столбец с компонентами $u_i(x, \xi), i = 1, 2)$ и $v(x, \zeta)$ являются решениями (27), мы имеем

$$\frac{d}{dx} W(u, v) = 0 \tag{29}$$

где $W(u, v)-$ вронскиан u и v :

$$W(u,v) = u_1 v_2 - v_1 u_2 \tag{30}$$

Из (28) мы видим, что $W(\varphi, \bar{\varphi}) = -1$ и $W(\psi, \bar{\psi}) = 1$. Решения $\psi, \bar{\psi}$ являются линейно независимыми; таким образом, мы можем написать

$$\varphi = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi \tag{31a}$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi} \tag{31b}$$

(Знак минус здесь выбран для удобства.) Мы также отметим, что матрица рассеяния определяется обычно следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} \tag{32}$$

Используя (31) (32) и $W(\varphi, \bar{\varphi}) = -1$, мы получим

$$a(\xi)\bar{a}(\xi) + b(\xi)\bar{b}(\xi) = 1 \tag{33}$$

Далее мы установим аналитические свойства данных рассеяния (как функций комплексной переменной ζ).

Теорема 1. Если q,r $\in L_1$ (являются абсолютно интегрируемыми), то $\oint$ функции $e^{i\zeta x}\varphi, e^{-i\zeta x}\psi$ являются аналитическими в верхней полуплоскости $(\eta > 0)$, $ae^{-i\zeta x}\bar{\varphi}, e^{i\zeta x}\bar{\psi}$– аналитическими в нижней полуплоскости $(\eta < 0)$

Рассмотрим прямую задачу рассеяния, для которой изложим схему Абловица–Ладика аппроксимации системы уравнений Захарова–Шабата.

Считаем, что $t_1 = 0, t_2 = L$. Тогда условие на вектор v при $t = 0$ принимает вид

$$v|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Аппроксимируем дифференциальные уравнения системы Захарова-Шабата разностной схемой Эйлера

$$\frac{v_1^{n+1} - v_1^n}{h} = -ikv_1^n + q_n v_2^n, \tag{58a}$$

$$\frac{v_2^{n+1} - v_2^n}{h} = ikv_2^n - q_n^* v_1^n, \tag{58b}$$

где q_n^* обозначает комплексное сопряжение q_n. Запишем систему (58) в виде

$$\begin{pmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ikh & q_n h \\ -q_n^* h & 1 + ikh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \end{pmatrix} \tag{59}$$

В схеме Абловица-Ладика величину $1 \pm ikh$ заменяют на $e^{\pm ikh}$. Переобозначим $q_n h$ за q_n. В результате схема (59) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1} & q_n \\ -q_n^* & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

После замены переменных

$$v_1^n = z^{-n} P_1^n, \quad v_2^n = z^{-n-1} P_2^n$$

получим

$$\vec{P}^N = M_n \dots M_1 \vec{P}^0 = M \vec{P}^0$$

где

$$M = M_n \dots M_1$$

Полиномы $P_1^N(k), P_2^N(k)$ определяют функции $v_1^N(k), v_2^N(k)$ и, следовательно, данные рассеяния $a(k), b(k)$. Таким образом, основная задача заключается в быстром вычислении $\vec{P}^N$.

Предложение 1. Коэффициенты матрицы полиномов

$$M = M_N M_{N-1} \dots M_1$$

могут быть вычислены "сверхбыстрым"образом, т.е. за $O\left(N \log_2^2 N\right)$ операций.

Метод сверхбыстрого вычисления произведения матриц $M_N M_{N-1} \dots M_1$ основан на технике "разделяй и властвуй"и быстром умножении полиномов.

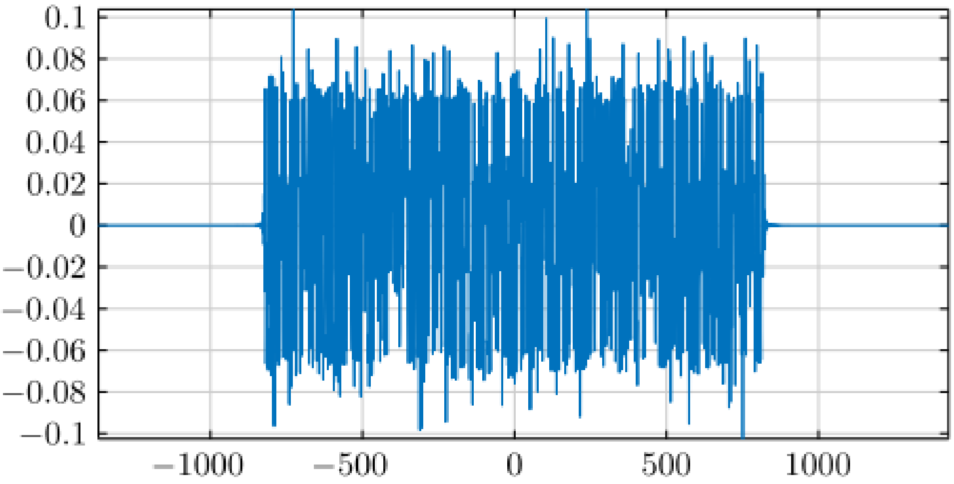
Напомним, что при решении нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи рассеяния, требуется решить задачу на собственные значения для системы уравнений Захарова-Шабата

$$\frac{dv_1}{dt} + ikv_1 = iq_0(t)v_2,$$
$$\frac{dv_2}{dt} - ikv_2 = -iq_0^*(t)v_1,$$

с граничным условием

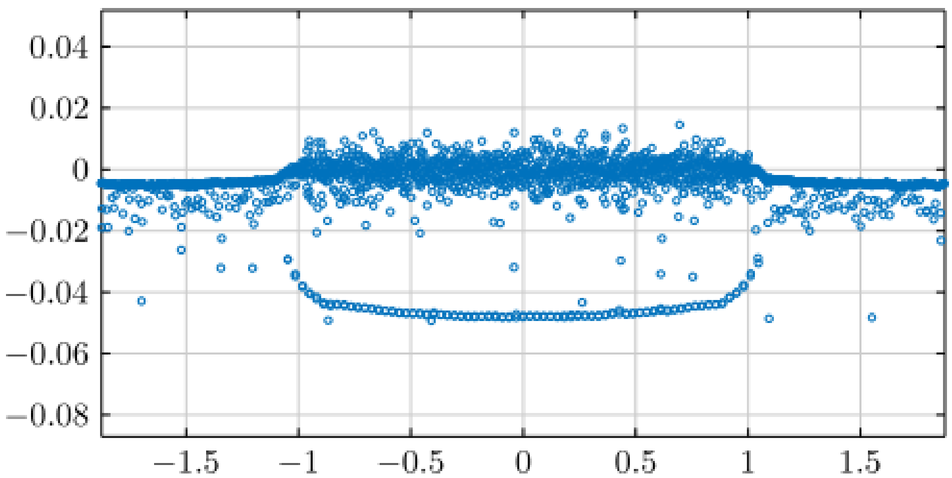
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in L_2\left(\mathbb{R}^1\right)$$

Пример вещественной части потенциала $q_0(t)$, возникающего в технике связи в качестве начальных данных для нелинейного уравнения Шредингера, приведен на рис. 1. Распределение собственных значений и резонансов спектральной задачи для системы Захарова-Шабата в комплексной плоскости показано на рис. 2.



.png

Рис. 1: Вещественная часть потенциала $q_0(t)$ системы Захарова-Шабата.



.png

Рис. 2: Распределение собственных значений и резонансов.

Рассмотрим Layer Peeling метод для решения обратной задачи рассеяния.

Замечание 1. Если для финитного потенциала известны коэффициенты рассеяния $a(k), b(k)$, то известен вектор $\vec{v}(k,t)$, разложение которого в ряд Фурье определяет полином $\vec{P}(z)$. Коэффициенты $a(k), b(k)$ в приближении задачи Абловица-Ладика с точностью до фазового сдвига равняются первому столбцу матрицы M.

предложение 2. Вычисление значений $q_n, n = 1, \ldots, N$, требует $O\left(N \log_2^2 N\right)$ действий.

Замечание 2. Для решения дискретной обратной задачи рассеяния для системы уравнений Абловица-Ладика в точной арифметике не требуется никакой информации о дискретном спектре какой бы то ни было задачи, связанной с исходной задачей для дифференциальной системы уравнений Захарова-Шабата.

Предложение 3. Для последовательного применения преобразования Дарбу при присоединении решений солитонного типа, отвечающих побственным значениям, необходимо $O\left(m^2N\right)$ операций.

Замечание 3. Точное решение эволюционной задачи q не требуется. Необходимо найти его приближение q_{apr}, от которого требуется только, чтобы

$$\|q_{\mathrm{apr}} - q\| < \varepsilon$$

Layer Peeling метод является наиболее быстрым из применяемых в настоящее время алгоритмов решения обратной задачи рассеяния. В то же время его устойчивость остается серьезной проблемой. Рост L_2 нормы начальных данных увеличивает количество возникающих солитонов. Необходимость учета все большего количества солитонов ограничивает возможности практического применения метода.

Заключение. В работе рассмотрены прямая и обратная задачи рассеяния для дискретизаций системы Захарова – Шабата, основное внимание уделено системе Абловица – Ладика. Показано, что для рассмотренных дискретных систем прямая и обратная задачи рассеяния допускают эффективное решение. В частности, для решения обратной задачи могут быть использованы как дискретные аналоги уравнений Гельфанда - Левитана - Марченко, так и специфический метод Layer Peeling, не имеющий непосредственного аналога в непрерывном случае. В работе показано также, что методы теории рассеяния для дискретных систем могут быть использованы для построения эффективных методов численного решения прямой и обратной задач рассеяния для системы Захарова – Шабата.