МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ РИСКОВОЙ СИТУАЦИИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Григорьева Андрея Алексеевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ В. Р. Шебалдин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире, где неопределенность и риски являются неотъемлемой частью любой деятельности, эффективное управление рисками становится ключевым фактором успеха для компаний и индивидов. Оптимальный выбор параметров рисковой ситуации позволяет найти баланс между желаемым уровнем доходности и приемлемым уровнем риска, что в свою очередь способствует устойчивому развитию и росту.

В данной работе рассматриваются различные аспекты оптимального выбора параметров рисковой ситуации, начиная с анализа видов распределений суммарного риска и заканчивая методами максимизации полезности без учета вероятности разорения. В процессе исследования также изучаются дискретные риски и задача минимизации собственных средств, что позволяет получить целостное представление о существующих подходах к управлению рисками и их применении на практике(программирования, алгебры и т.п.).

Актуальность темы "Оптимальный выбор параметров рисковой ситуации"обусловлена рядом факторов, которые делают эффективное управление рисками жизненно важным для успешного функционирования компаний и индивидов в современном мире. Некоторые из ключевых причин актуальности данной темы включают:

— Увеличение неопределенности и рисков: В глобализированной экономике компании сталкиваются с возрастающим количеством внутренних и внешних рисков, таких как изменения в законодательстве, политические риски, техногенные катастрофы и другие. Эффективное управление этими рисками является критически важным для выживания и успешного развития бизнеса.

— Рост конкуренции: В условиях усиливающейся конкуренции компании вынуждены искать новые способы повышения эффективности и сокращения затрат. Оптимальный выбор параметров рисковой ситуации может помочь компаниям найти баланс между риском и доходностью, что в свою очередь способствует повышению конкурентоспособности.

— Инвестиционные потребности: Для реализации стратегических планов и инвестиционных проектов компании нуждаются в адекватном финансировании. Оптимальный выбор параметров рисковой ситуации позволяет привлечь необходимые средства на наиболее выгодных условиях, минимизируя риски и затраты.

— Увеличение внимания к устойчивому развитию: В последнее время наблюдается рост интереса к вопросам устойчивого развития и социальной ответственности бизнеса. Оптимальный выбор параметров рисковой ситуации может способствовать достижению баланса между экономическими, социальными и экологическими аспектами деятельности компании.
— Развитие информационных технологий и аналитических инструментов: Современные информационные технологии и аналитические инструменты предоставляют компании новые возможности для сбора, обработки и анализа данных о рисках. Это позволяет более точно оценивать и управлять рисками, что делает тему оптимального выбора параметров рисковой ситуации еще более актуальной.

Целью настоящей работы является :

1. Рассмотреть виды распределений суммарного риска, для использования в решении задач.
2. Изучение дискретных рисков и понятий связанных с ними,а также модификаций распределения ущербов.
3. Изучение проблемы оптимального выбора параметров страховой компании-задача минимизации объема собственных средств.
4. Разработка стратегий принятия решений, которые максимизируют ожидаемую полезность, без учета вероятности разорения.
5. Решение задач минимизации объема собственных средств.

Структура бакалаврской работы

В первом разделе даны основные понятия и виды распределений суммарного риска, его основные характеристики.

Во втором разделе рассматриваются различные типы дискретных рисков, такие как операционные риски, кредитные риски, рыночные риски и другие, а также их классификация и характеристика.

В третьем разделе рассмотрены различные финансовые инструменты и методы, такие как оптимизация структуры капитала, выбор источников финансирования, управление оборотным капиталом, а также использование финансовых инструментов для хеджирования рисков.

1 Виды распределений суммарного риска

Распределение $F(x)$ суммарного ущерба клиентов (или суммарного риска) $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ играет ключевую роль в актуарных расчетах страховщика, поскольку его рисковая ситуация $(w, D, F(x))$ определяется именно распределением риска X и денежным покрытием из собственных средств w и взноса D. Теоритически выражение для $F(x)$ всегда можно получить, взяв светрку распределений $F_i(x)$ индивидуальных рисков, которые предполагаются независимыми.

$$F(x) = F_1(x) * ... * F_n(x) \tag{1}$$

Свертка, например $F_1(x)$ и $F_2(x)$ есть интеграл $F_1(x)*F_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(x-t)dF_2(t) = \int\limits_{0}^{x} F_1(x-t)dF_2(t)$ и, таким образом, нахождение $F(x)$ сводится к вычислению $(n-1)$ кратного интеграла. Если число клиентов n велико, то такая задача практически неразрешима.

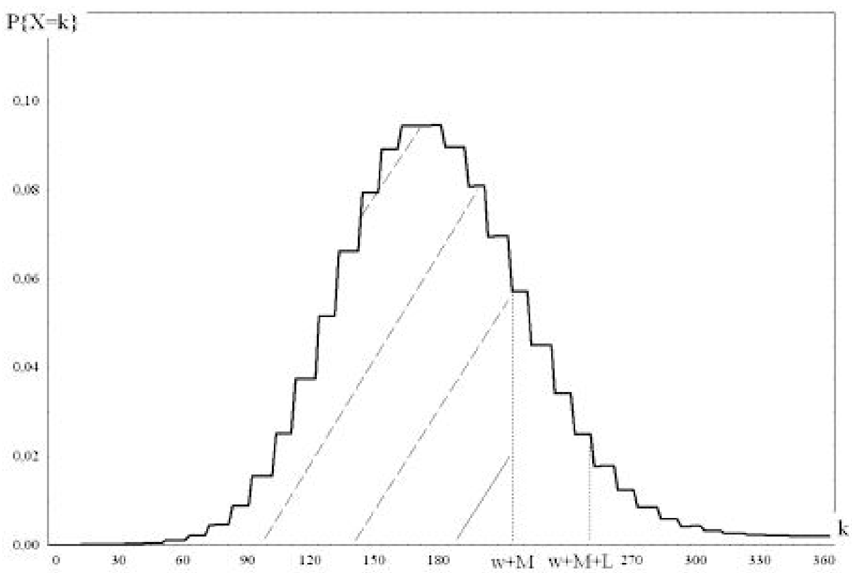

Рисунок 1

На рисунке (1) приведен вид в определенной степени «типичного» распределения риска страховщика. Для наглядности в качестве X была рассмотрена целочисленная случайная величина, по оси ординат отложены вероятности $P\{X = k\}, k = 0, 1, ...,$ по оси абсцисс – возможные значения суммарного ущерба. Из рисунка видно, что площадь под графиком на интервале $[0, w + M]$, где w обозначает собственный капитал страховщика, - т.е. вероятность неразорения $P\{X \leq w + M\}$ при взносе D, равном только рисковой премии $D = M$, - недостаточно велика. В то же время вероятность $P\{X \leq w + M + L\}$ уже ощутимо больше (≈ 0.95). Распределение X имеет длинный, но тонкий «хвост» - что и объясняет необходимость введения некоторой положительной нагрузки L к рисковой премии для обеспечения приемлемой вероятности неразорения в случае «характерного» риска X и «не очень большого» объема собственных средств w.

Рассмотрим в первую очередь индивидуальные риски X_i, входящие в $X = \sum\limits_{1}^{n} X_i$. Обозначим через $p_i = P\{X_i > 0\} = 1 - F_i(0)$ вероятность ненулевого ущерба, или, что то же самое, вероятность страхового случая у i-го клиента. Всюду в дальнейшем будем считать $0 < p_i < 1$ (случай $p_i = 1$ хотя формально и допустим, но означает, что у i-го клиента обязательно произойдет страховой случай на периоде страхования, - предположение, далекое от реальности). Размер ущерба клиента при условии,что страховой случай произошел, назовем страховой выплатой (ненулевой по определению) и будем обозначать как случайную величину X_i^0 с функцией распределения $F_i^0(x)$.

2 Дискретные риски

Довольно часто встречаются ситуации, где все индивидуальные ущербы представляют собой дискретные случайные величиныс конечным множество значений. Пусть ущерб k-го клиента имеет возможные значения $0, x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{mk}$ - мы предполгаем, что X_k не обязательно одинаково распределены, но число возможных значений m одинаково для каждого клиента(если это не так, то формально можно добавить фиктивные значения x_{jk} и положить соответствующие вероятности нулевыми). В дискретном варианте точная формула вычисления распределения X как n-кратном свертки упрощается: рекуррентная формула вычисления свертка для $\sum\limits_1^n X_k$ по распределению $\sum\limits_1^{n-1} X_k$ здесь имеет вид

$$P\{\sum_1^n X_k = x\} = P\{\sum_{j=1}^m X_1 + X_2 + ... + X_{j-1} = x - x_{jm}\}P_{jk} + P\{\sum_1^{n-1} X_k = x\}q_k \tag{2}$$

Применение такой вычислительной процедуры оказывается эффективным даже при высоких значения n, если все значения x_{jk} кратны некоторый базисной денежной единице, относительно которой x_{jk} имеют небольшое количество значащих цифр. Однако на практике часто оказывается, что такая базисная единица должна быть очень маленькой.

Также есть некоторые модификации распределений ущербов

1. Способ округления

   Каждое ненулевое значение x_{jk}, $j = 1, \dots, m$ ущерба k-го клиента ($k = 1, \dots, n$) заменяется на $\tilde{x}_{jk}$ – ближайшее число, кратное выбранной денежной единице. Вероятности p_{jk} изменяются по следующему правилу

$$p_{jk} \to \tilde{p}_{jk} = p_{jk}\frac{p_{jk}}{x_{jk}}, \quad q_k \to \tilde{q}_k = 1 - \sum_{j=1}^m \tilde{p}_{jk}.$$

2. Способ рассредоточения

   Для каждого x_{jk} обозначим через x_{jk}^- и x_{jk}^+ соответственно ближайшие слева и справа к x_{jk} значения, кратные выбранной базисной единице. Далее, массу распределения, находящуюся в точке x_{jk}, рассредоточим по точкам x_{jk}^{-} и x_{jk}^{+} так, чтобы EX_k осталось неизменным.

3 Задача минимизации собственных средств

Рассмотрим задачу определения минимальной величины собственных средств страховщика, гарантирующей требуемую вероятность неразорения (надежность) β, если задано распределение $F(x)$ суммарного риска, величина взносов D и вероятность неразорения β.

Ограничение на вероятность неразорения в данном случае означает

$$P\{w + D \geq X\} \geq \beta. \tag{3}$$

Обозначим через x_β квантиль порядка β распределения $F(x)$. Тогда из 3 сразу же получаем множество допустимых значений собственного капитала: $w \geq x_\beta - D$. Поэтому минимальный капитал $w_* = x_\beta - D$. Если взнос рассчитывается по формуле среднего значения, $D = (1+\alpha)EX = (1+\alpha)M$ с заданным коэффициентом нагрузки $\alpha > 0$, то

$$w_* = x_\beta - (1+\alpha)M. \tag{4}$$

Видно, что w^* растет с увеличением квантиля x_β, который, в свою очередь, возрастает с ростом надежности β. Увеличение α приводит к увеличению взноса D и уменьшению необходимого капитала w_*. Вообще говоря, возможна ситуация, когда при некотором α значение w_* отрицательно, это означает, что в данной схеме страхования даже собранных взносов D более чем достаточно для достижения требуемой надежности β, и остаток, равный $|w_*|$, целиком находится в распоряжении страховой компании.

4 Максимизация полезности без учета вероятности разорения

Теперь будем считать критерием оптимальности ожидаемую полезность остаточного капитала $E[u(w+Dd-X_d)]$, где функция полезности страховщика экспоненциальна, $u(y) = -\exp(-cy)$ (здесь $c > 0$ — заданный показатель неприятия риска). На этот раз управляемым параметром будет сама цена полиса (взнос клиента) d, которая может варьироваться страховщиком на множестве $[d^-, d^+]$. Суммарный взнос есть (детерминированная) величина, равная $Dd = n(d)d$, где $n(d)$ – положительный параметр, имеющий смысл спроса на страховой продукт, от которого параметрически зависит и распределение суммарного риска X_d рассматриваемой однородной группы клиентов. Если бы страховщик был заинтересован только в увеличении «выручки» $n(d)d$, то, например, при линейном спросе $n(d) = -Ad + B$ оптимальная цена была бы вершиной параболы $d_0 = B/(2A)$. Но от $n(d)$ зависит также ущерб X_d, причем увеличение $n(d)$ (т.е. уменьшение d, поскольку $n(d)$ убывает с ростом d) приводит к «худшему» X_d с большим числом слагаемых и наоборот. Поэтому оптимальная цена d^* будет смещена вправо от «примитивного» оптимума d^0. Величина этого смещения будет зависеть как от выбранной модели для X_d, так и от распределения индивидуального риска X_1.

Когда случайная численность клиентов $\eta = \eta_d$ параметрически зависит от d, то форма целевой функции будет зависеть от распределения суммарного случайного взноса $\eta_d d$. Убывающий характер рассмотренной ранее детерминированной функции спроса $n(d)$ тогда должен означать, по крайней мере, убывание среднего числа клиентов $E\eta_d$.

5 Практическая часть

Однородная группа имеет численность $n = 5000$, вероятность страхового случая у страхователя $p = 0.1$, а размер страховой выплаты имеет гамма-распределение с параметрами $a = 1.5$ и $\lambda = 1$. Требуется найти минимальный объем собственных средств, необходимый для обеспечения надежности $\beta = 0.95$, если коэффициент нагрузки равен 50%. (Указание: воспользоваться нормальной аппроксимацией суммарного риска.)

Для решения задачи воспользуемся нормальной аппроксимацией суммарного риска. Суммарный риск - это сумма всех страховых случаев, которые могут произойти в группе.

1. Найдем математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию размера страховой выплаты, исходя из гамма-распределения с параметрами $a = 1.5$ и $\lambda = 1$.

Математическое ожидание гамма-распределения: $E(X) = \frac{a}{\lambda} = \frac{1.5}{1} = 1.5$

Дисперсия гамма-распределения: $D(X) = \frac{a}{\lambda^2} = \frac{1.5}{1^2} = 1.5$

2. Найдем математическое ожидание и дисперсию суммарного риска.

Математическое ожидание суммарного риска: $E(S) = n \cdot p \cdot E(X) = 5000 \cdot 0.1 \cdot 1.5 = 750$

Дисперсия суммарного риска: $D(S) = n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot D(X) = 5000 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.1) \cdot 1.5 = 675$

3. Найдем стандартное отклонение суммарного риска: $\sigma(S) = \sqrt{D(S)} = \sqrt{675} \approx 25.98$

4. Найдем минимальный объем собственных средств, необходимый для обеспечения надежности $\beta = 0.95$. Для этого воспользуемся таблицей стандартного нормального распределения (таблицей Z-значений).

По таблице находим, что для $\beta = 0.95$ соответствующее Z-значение равно 1.645.

5. Найдем минимальный объем собственных средств: $C = E(S) + Z \cdot \sigma(S) = 750 + 1.645 \cdot 25.98 \approx 792.7$

6. Учитывая коэффициент нагрузки, равный 50%, найдем окончательный объем собственных средств: $C_{final} = C \cdot (1 + 0.5) = 792.7 \cdot 1.5 \approx 1189.05$

Рассмотрим следующию задачу

Пусть на основе предшествующего опыта страховщик полагает, что объем портфеля однотипных договоров (т.е. их количество), которые удастся заключить на предстоящий страховой период, распределен по закону Пуассона с параметром n. Среднее и дисперсия ущербов клиентов равны соответственно M_1 и σ_1^2, задан коэффициент нагрузки страховщика α. Известно, что значение n достаточно велико ($np > 10$). Найти явную формулу для минимального объема собственных средств w^*, гарантирующего заданную вероятность неразорения β как функцию от n, и определить интервалы ее монотонности.

Для решения задачи воспользуемся теоремой Лапласа о нормальном приближении распределения Пуассона при больших значениях параметра n.

Пусть X - случайная величина, описывающая количество договоров, которые удастся заключить на предстоящий страховой период. Тогда X имеет распределение Пуассона с параметром n.

Пусть Y - случайная величина, описывающая ущерб клиента. Среднее и дисперсия ущербов клиентов равны соответственно M_1 и σ_1^2.

Суммарный ущерб страховщика будет равен $Z = XY$. Так как X и Y независимы, то математическое ожидание и дисперсия Z будут равны:

$M_Z = M_X \cdot M_Y = n \cdot M_1$

$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2 = n \cdot \sigma_1^2$

Теперь рассмотрим функцию полезности страховщика $U(w)$, где w - объем собственных средств страховщика. Страховщик хочет минимизировать вероятность разорения, то есть вероятность того, что суммарный ущерб Z превысит объем собственных средств w. Заданная вероятность неразорения равна β.

Используя теорему Лапласа, вероятность неразорения можно записать в виде:

$\beta = P(Z \leq w) = P\left(\frac{Z-M_Z}{\sigma_Z} \leq \frac{w-M_Z}{\sigma_Z}\right) \approx \Phi\left(\frac{w-M_Z}{\sigma_Z}\right)$

где $\Phi(x)$ - функция распределения стандартного нормального закона.

Из последнего равенства можно выразить минимальный объем собственных средств w^*:

$w^* = M_Z + \sigma_Z \cdot \Phi^{-1}(\beta)$

где $\Phi^{-1}(x)$ - обратная функция распределения стандартного нормального закона.

Теперь определим интервалы монотонности функции $w^*(\beta)$. Функция

$w^*(\beta)$ является линейной функцией от β:

$w^*(\beta) = M_Z + \sigma_Z \cdot \Phi^{-1}(\beta)$

Таким образом, функция $w^*(\beta)$ монотонно возрастает на всей области определения $\beta \in (0, 1)$.

Итак, минимальный объем собственных средств w^*, гарантирующего заданную вероятность неразорения β, равен:

$w^* = n \cdot M_1 + \sqrt{n \cdot \sigma_1^2} \cdot \Phi^{-1}(\beta)$

Функция $w^*(\beta)$ монотонно возрастает на интервале $\beta \in (0, 1)$.

Таким образом, минимальный объем собственных средств, необходимый для обеспечения надежности $\beta = 0.95$, составляет примерно 1189.05.

6 Заключение

В результате проведенного исследования были рассмотрены различные аспекты управления рисками и принятия решений в контексте страхования и финансов. Мы начали с анализа видов распределений суммарного риска, что является фундаментальным элементом для понимания и моделирования рисковых событий. Этот анализ позволил нам выявить наиболее подходящие распределения для различных типов рисков и сфер применения.

Далее были изучены виды дискретных рисков и связанных с ними понятий, а также модификаций распределения ущербов. Этот раздел был важен для понимания специфики рисков, которые не могут быть описаны с помощью непрерывных распределений, и для разработки методов оценки и управления такими рисками.

Особое внимание было уделено проблеме оптимального выбора параметров страховой компании, сфокусированной на задаче минимизации объема собственных средств. Мы исследовали различные стратегии и модели, которые позволяют страховщикам наиболее эффективно использовать свои ресурсы, сохраняя при этом финансовую устойчивость.

В рамках исследования также были разработаны стратегии принятия решений, которые максимизируют ожидаемую полезность без учета вероятности разорения. Этот подход, хотя и не учитывает риск катастрофических потерь, может быть полезен в определенных контекстах, особенно когда акцент делается на краткосрочные результаты и быстрый прирост капитала.

Наконец, были рассмотрены и решены задачи минимизации объема собственных средств, что является ключевым вопросом для обеспечения финансовой устойчивости и платежеспособности страховых компаний. Результаты этой части исследования могут быть использованы для разработки практических рекомендаций по управлению капиталом и резервами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Arrow, K. J. (1965). *Аспекты теории принятия риска.* Helsinki: Yrjo Jahnssonin Saatio.

2 Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.

3 Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425-442.

4 Lintner, J. (1965). Оценка рисковых активов и выбор рискованных инвестиций в портфели акций и капитальные бюджеты. *The Review of Economics and Statistics*, 47(1), 13-37.

5 Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies*, 25(2), 68-85.